Problemi di Magnetostatica

Problema 1

Una particella di carica q si trova in presenza di campi elettrico e magnetico costanti e uniformi diretti lungo l'asse z: $\vec{E} = (0,0,E)$, $\vec{B} = (0,0,B)$.

a) Si dimostri che la particella percorre un'elica di passo crescente.

b) Come varia il passo $P(t)$ dell'elica in funzione del tempo?

c) Nota la velocità iniziale $\vec{v}(0) = (V_x, 0, V_z)$ si determinino le componenti della velocità $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ a un istante t generico.

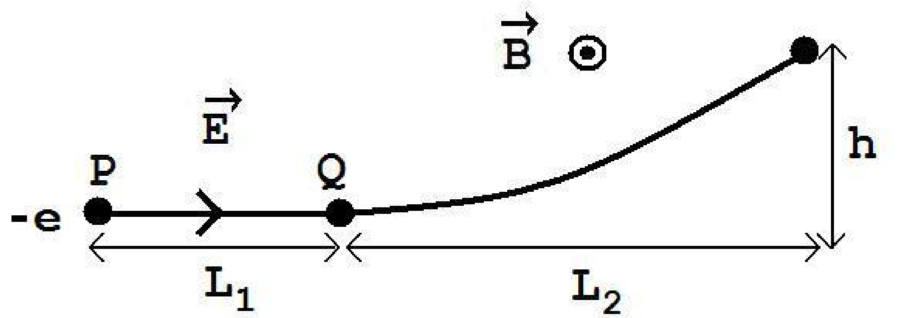
d) Conoscendo il valore $T(0)$ dell'energia cinetica della particella quando attraversa il piano xy si determini l'energia cinetica $T(z)$ come funzione della sola coordinata z. *Suggerimento: visto che il campo magnetico non compie lavoro si conserva l'energia meccanica.*

e) Si supponga d'ora in avanti che la particella in questione sia un elettrone. Si osserva che la sua energia cinetica aumenta di $\Delta\varepsilon = 2eV$ quando la sua coordinata z varia di $\Delta z = 3cm$ e che la componente x della sua velocità cambia segno ogni $\Delta t = 2\mu s$. Si determinino i valori di E e B.

f) Sapendo che $V_z = 10^3 m/s$, in quale istante t^* l'energia cinetica dell'elettrone è minima?

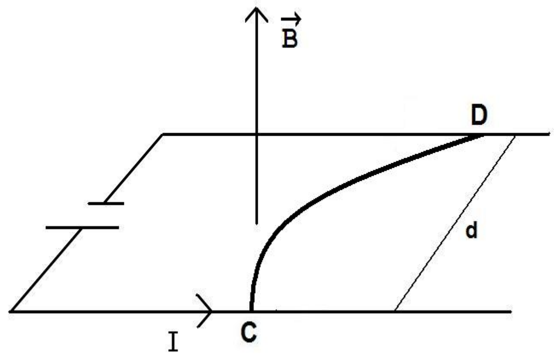
Problema 2

Gli elettroni di un tubo televisivo vengono emessi con velocità trascurabile ed accelerati lungo un tratto PQ orizzontale di lunghezza $L_1 = 1cm$ da un campo elettrico di intensità costante $E = 10^6 V/m$ parallelo a PQ. Successivamente continuano a viaggiare in direzione orizzontale colpendo lo schermo che dista $L_2 = 30cm$ dal punto Q. Si supponga che lo schermo sia piano e perpendicolare al tratto PQ. Assumendo che il televisore si trovi al polo nord geografico dove il modulo del campo magnetico terrestre vale $B = 65\mu T$, si determini la deviazione orizzontale h subita dal fascio di elettroni tra il punto Q e lo schermo. Si trascuri l'azione del campo magnetico durante il tratto PQ.



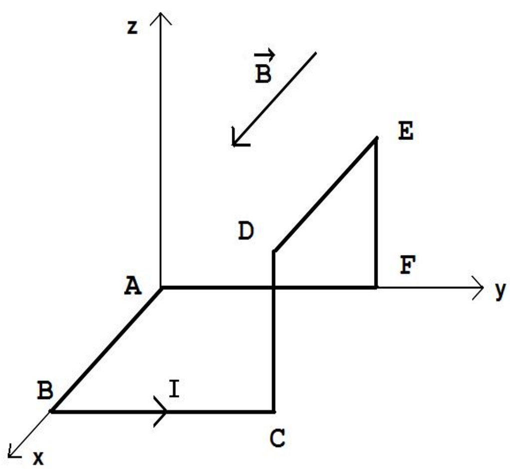
Problema 3

Gli estremi C e D di un tratto di filo conduttore rigido di forma incognita sono vincolati a scorrere senza attrito lungo due rotaie conduttrici parallele distanti $d = 20cm$ tra di loro. La massa del filo vale $m = 2g$ e il tratto CD è lungo $L = 30cm$. Il circuito è alimentato da un generatore che eroga una corrente mantenuta costante di $I = 2A$. Il sistema è immerso in un campo magnetico verticale costante e uniforme di intensità $B = 0.5T$, vedi figura. Si supponga che all'istante $t = 0$ il filo sia fermo.



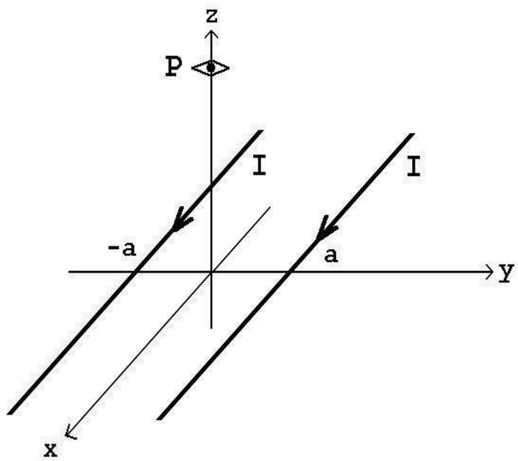
a) Si determinino modulo e verso della velocità del filo all'istante $t = 0.1s$.
b) Quanto vale lo spazio Δ percorso allo stesso istante?
c) Si determinino modulo e direzione della reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dalle rotaie.

Problema 4
Nel circuito in figura le coordinate dei punti sono $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a, a, 0)$, $D = (a, a, a)$, $E = (0, a, a)$, $F = (0, a, 0)$. Il circuito è percorso dalla corrente I con il verso indicato in figura.



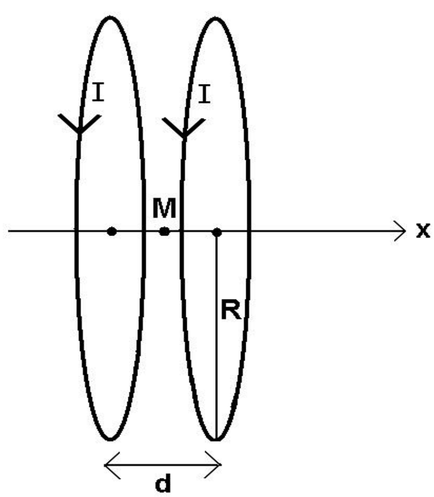
a) Si dimostri che il momento magnetico del circuito vale $\vec{\mu}_0 = (0, -Ia^2, Ia^2)$.
b) Si determini il momento meccanico $\vec{M}$ esercitato sul circuito da un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (B, 0, 0)$.
c) Si supponga ora che il circuito possa ruotare in modo rigido attorno all'asse z mantenendo il punto A vincolato in $(0, 0, 0)$ e i tratti CD e FE paralleli all'asse z. Di quale angolo φ^* deve ruotare il circuito per portarsi nella posizione di equilibrio stabile? Quanto vale dopo questa rotazione il momento magnetico $\vec{\mu}_f$?
d) Quanto vale il lavoro meccanico L compiuto dal campo magnetico durante la rotazione di cui al quesito precedente?

Problema 5
Due fili molto lunghi paralleli all'asse x e distanti $2a = 4cm$ tra di loro sono percorsi da una corrente di intensità $I = 50A$ con verso concorde all'asse x. I fili intersecano il piano yz rispettivamente nei punti $(0, -a, 0)$ e $(0, a, 0)$.



a) Si determini il campo magnetico $\vec{B}(z)$ in un generico punto P dell'asse z.
b) In quale direzione punta un piccolo ago magnetico posto sull'asse z se è libero di ruotare attorno al suo baricentro?
c) Supponendo che l'ago si trovi nella posizione $z = 3cm$, che il suo momento magnetico sia $\mu = 0.01Am^2$ e che inizialmente punti nella direzione delle x crescenti, si determini il lavoro L che deve compiere il campo magnetico per portarlo nelle sue direzioni di equilibrio rispettivamente stabile ed instabile.
d) Si supponga ora che l'ago sia orientato parallelamente a $\vec{B}(z)$ e che possa scivolare senza attrito sull'asse z. Trascurando la forza peso si determinino le posizioni di equilibrio z_0.

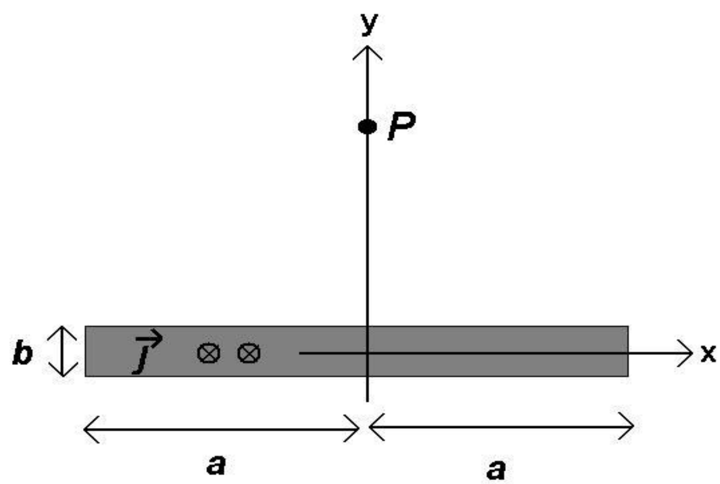
Problema 6
Due spire conduttrici circolari di raggio $R = 50cm$ hanno come asse l'asse x e centri che distano $d = 2cm$ tra di loro. Sono percorse dalla corrente $I = 5A$ in senso antiorario, vedi figura.



a) Il campo magnetico prodotto da una spira circolare di raggio R in un punto che dista una distanza $d \ll R$ dalla spira può essere approssimato con il campo magnetico prodotto da un filo infinito. Se ne spieghi qualitativamente il motivo.
b) Usando l'approssimazione di cui al quesito precedente si determini la forza totale $\vec{F}_0$ che le due spire si esercitano reciprocamente.
c) Si determini il campo magnetico $\vec{B}_M$ nel punto M equidistante dai centri delle spire.

d) In M si trova un piccolo ago magnetico con momento magnetico $\mu = 0.1Am^2$ libero di ruotare attorno al suo baricentro. Qual è il lavoro L_{ext} che occorre compiere contro il campo magnetico per allontanare l'ago di 120^o dalla sua direzione di equilibrio stabile?
e) Se l'ago è diretto parallelamente al campo magnetico, quanto vale la forza magnetica $\vec{F}_1$ agente sull'ago?
f) Se l'ago è diretto parallelamente al campo magnetico e in una delle due spire non circola corrente, quanto vale la forza magnetica $\vec{F}_2$ agente sull'ago?

Problema 7
Una lamina conduttrice infinitamente lunga parallela al piano xz di sezione rettangolare con lati $2a = 10cm$ e $b = 0.1cm$ è percorsa da una densità di corrente uniforme $\vec{j} = -2A/mm^2\vec{u}_z$.



a) Si dimostri che il campo magnetico in un punto $P = (0, y, 0)$, con $y \gg b$, è dato da

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 jb}{\pi} arctg\left(\frac{a}{y}\right)\vec{u}_x, \qquad j = |\vec{j}|. \tag{1}$$

b) Si deterimini il momento meccanico $\vec{M}$ agente su un piccolo ago magnetico di momento magnetico $\vec{\mu} = 0.2Am^2\vec{u}_y$ posto in P, con $y = 4cm$.
c) Si dimostri che nei due casi *i)* $a \to \infty$ e *ii)* $a \ll y$ la (1) restituisce i campi magnetici prodotti rispettivamente da una lamina di larghezza infinita e da un filo infinito.

Problema 8
Una spira circolare di raggio R_1 giacente nel piano xy e avente come centro l'origine è percorsa dalla corrente I_1 in senso antiorario. Una seconda spira circolare di raggio R_2 è percorsa dalla corrente I_2 e può ruotare attorno al suo centro, fissato nel punto $A = (0, L, 0)$. Vale $L \gg R_1$ e $L \gg R_2$.
a) Si determinino le direzioni di equilibrio della seconda spira.
b) Supponendo che la seconda spira assuma rispettivamente le direzioni di equilibrio stabile e instabile si determini la forza $\vec{F}$ che le spire si esercitano reciprocamente. Tale forza nei due casi è attrattiva o repulsiva?
c) Si risponda ai quesiti precedenti assumendo che il centro della seconda spira si trovi nei punti $A_\pm = (0, 0, \pm L)$.

Soluzioni

Problema 1
a) La particella carica deve soddisfare l'equazione di Lorentz (è sottinteso che $v \ll c$, sicché è valida l'approssimazione non relativistica)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q((0,0,E) + \vec{v} \times (0,0,B)).$$

Ponendo $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ questa equazione si proietta nelle equazioni,

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega\, v_y, \tag{2}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega\, v_x, \tag{3}$$
$$\frac{dv_z}{dt} = a, \tag{4}$$

dove $a = qE/m$ e $\omega = qB/m$ è la frequenza di ciclotrone. Lungo l'asse z il moto è quindi uniformemente accelerato con accelerazione a, mentre nel piano xy il moto è circolare uniforme con frequenza ω. Visto che i due moti sono disaccoppiati il moto combinato è un'elica con passo crescente, che si avvolge attorno all'asse z (con verso *antiorario* se $q < 0$.)
b) A un istante t generico abbiamo $z(t) = z(0) + v_z(0)\, t + \frac{1}{2}\, at^2$. Dopo un periodo $\tau = 2\pi/\omega$ le coordinate x e y riassumono gli stessi valori, mentre la coordinata z vale $z(t+\tau)$. Il passo dell'elica all'istante t vale quindi

$$P(t) = z(t+\tau) - z(t) = v_z(0)\tau + \frac{1}{2}\, a\tau^2 + a\tau t$$

e cresce dunque linearmente con il tempo.
c) Con le condizioni iniziali date nel problema la soluzione del sistema (2)-(4) è

$$v_x(t) = V_x\, cos(\omega t), \qquad v_y(t) = -V_x\, sen(\omega t) \qquad v_z(t) = V_z + at.$$

d) Dal momento che $U(\vec{x}) = q\varphi(\vec{x}) = -qEz$, dalla conservazione dell'energia cinetica si ottiene $T(0) + 0 = T(z) - qEz$, ovvero

$$T(z) = T(0) + qEz. \tag{5}$$

e) Se l'energia cinetica dell'elettrone aumenta di $\Delta\varepsilon$ quando la sua coordinata z varia di Δz, dalla (5) segue

$$\Delta\varepsilon = T(z+\Delta z) - T(z) = eE\Delta z \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\Delta\varepsilon}{e\Delta z}.$$

D'altra parte, dal fatto che la componente x della velocità cambia segno ogni $\Delta t = 2\mu s$ segue che il periodo è $\tau = 2\Delta t$. Da $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ segue allora $B = \pi m/e\Delta t$.
f) A un generico istante t l'energia cinetica è data da $T(t) = \frac{1}{2}\, m(v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t))$. D'altra parte, visto che la proiezione del moto sul piano xy è un moto circolare uniforme, la quantità $v_x^2(t) + v_y^2(t)$ è costante. $T(t)$ è quindi minima quando $v_z(t) = V_z + at = 0$, ovvero per $t^* = -V_z/a = -mV_z/eE$.

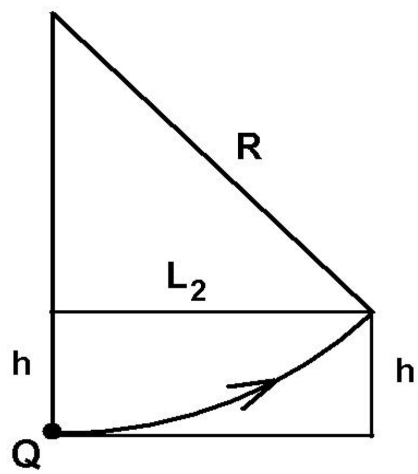
Problema 2
Scegliendo come asse x la direzione del tratto orientato $\overrightarrow{PQ}$, il campo elettrico ha componenti

$\vec{E} = (-E, 0, 0)$ e, visto che è di intensità costante, il potenziale è $\varphi(\vec{x}) = -\vec{E} \cdot \vec{x} = Ex$. Essendo l'energia potenziale $U(\vec{x}) = -e\varphi(\vec{x}) = -eEx$, dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene allora

$$0 = \frac{1}{2} mv^2 - eEL_1 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eEL_1}{m}} = 60.000 \, \frac{km}{s}.$$

Dal punto Q in poi l'elettrone viene deviato dal campo magnetico terrestre. Visto che il televisore si trova al polo nord magnetico, il campo magnetico ha direzione verticale (uscente) e, siccome inoltre la velocità $\vec{v}$ dell'elettrone nel punto Q è orizzontale, esso compie un'orbita circolare uniforme appartenente al piano orizzontale, con velocità angolare $\omega = eB/m$. Il raggio dell'orbita è quindi

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{eB} = 5.2m.$$



Per la deviazione dalla linea retta si ottiene allora, vedi figura,

$$h = R - \sqrt{R^2 - L_2^2} = R - R\sqrt{1 - \frac{L_2^2}{R^2}} \approx R - R\left(1 - \frac{L_2^2}{2R^2}\right) = \frac{L_2^2}{2R} = 8.6mm,$$

dove si è tenuto conto che $(L_2/R)^2 \ll 1$.

Problema 3

a) Sul tratto CD agisce la forza $\vec{F} = I\,\overrightarrow{CD} \times \vec{B}$. Introducendo un sistema di coordinate con l'asse z parallelo a $\vec{B}$ e l'asse x parallelo alle rotaie si ha

$$\overrightarrow{CD} = \sqrt{L^2 - d^2}\,\vec{u}_x + d\,\vec{u}_y, \quad \vec{B} = B\,\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = IB\left(d\,\vec{u}_x - \sqrt{L^2 - d^2}\,\vec{u}_y\right).$$

Lungo l'asse x agisce quindi la forza $F_x = IdB = ma$, sicchè all'istante t la velocità del filo vale in modulo $v(t) = at = IdBt/m$ ed è diretta nel verso delle x crescenti.

b) $\Delta = IdBt^2/2m$.

c) La reazione vincolare possiede solo la componente $R_y = -F_y = IB\sqrt{L^2 - d^2}$.

Problema 4

a) Il circuito può essere considerato come composto dai circuiti quadratici $\gamma_1 = ABCF$ e $\gamma_2 =$

$CDEF$, percorsi dalla stessa corrente I. Il momento magnetico del primo vale $\vec{\mu}_1 = (0, 0, Ia^2)$ e quello del secondo $\vec{\mu}_2 = (0, -Ia^2, 0)$, sicchè $\vec{\mu}_0 = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = (0, -Ia^2, Ia^2)$.
b) Da $\vec{B} = (B, 0, 0)$ segue $\vec{M} = \vec{\mu}_0 \times \vec{B} = (0, Ia^2B, Ia^2B)$.
c) Se il circuito ruota attorno all'asse z di un generico angolo φ in senso antiorario il suo momento magnetico diventa

$$\vec{\mu}(\varphi) = (Ia^2 sen\varphi, -Ia^2 cos\varphi, Ia^2), \qquad \vec{\mu}(0) = \vec{\mu}_0.$$

La posizione di equilibrio stabile si ottiene determinando il minimo dell'energia potenziale

$$U(\varphi) = -\vec{\mu}(\varphi) \cdot \vec{B} = -Ia^2 B sen\varphi, \quad \text{ovvero} \quad \varphi^* = \frac{\pi}{2}.$$

Per portarsi nella posizione di equilibrio stabile il circuito deve quindi ruotare di 90^o in senso antiorario. Il nuovo momento magnetico vale $\vec{\mu}_f = \vec{\mu}(\varphi^*) = (Ia^2, 0, Ia^2)$.
d) $L = -\Delta U(\varphi) = -(U(\varphi^*) - U(0)) = Ia^2 B$.

Problema 5
a) Ciascun filo crea un campo magnetico appartenente al piano yz. Per motivi di simmetria, essendo i fili percorsi da corrente con lo stesso verso, sull'asse z il campo magnetico totale è diretto lungo y, $\vec{B}(z) = (0, B(z), 0)$. Il modulo del campo magnetico prodotto da un singolo filo sull'asse z vale $B_1 = \mu_0 I / 2\pi\sqrt{z^2 + a^2}$, sicché la componente y del campo totale in un generico punto dell'asse z è data da

$$B(z) = -2B_1\, sen\alpha = -2B_1 \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = -\frac{\mu_0 I z}{\pi(a^2 + z^2)}.$$

b) Siccome sull'asse z il campo magnetico è dato da $\vec{B} = (0, B(z), 0)$, con $B(z) < 0$ per $z > 0$ e $B(z) > 0$ per $z < 0$, la direzione di equilibrio stabile dell'ago è quella delle y decrescenti per $z > 0$ e quella delle y crescenti per $z < 0$.
c) $L = -\Delta U = \vec{\mu}_f \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_i \cdot \vec{B} = \vec{\mu}_f \cdot \vec{B}$. Visto che $z = 3cm > 0$ si ha che $\vec{\mu}_f = (0, -\mu, 0)$ nella posizione di equilibrio stabile e $\vec{\mu}_f = (0, \mu, 0)$ nella posizione di equilibrio instabile. Nel primo caso si ha allora $L = -\mu B(z) > 0$, mentre nel secondo risulta $L = \mu B(z) < 0$.
d) Se l'ago è orientato parallelamente a $\vec{B}$, per $z > 0$ si ha $\vec{\mu} = (0, -\mu, 0)$, sicché $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B(z)$. La componente z della forza magnetica è quindi

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B(z)}{\partial z} = \frac{\mu_0 \mu I (a^2 - z^2)}{\pi(z^2 + a^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = a.$$

Analogamente per $z < 0$ si ottiene la posizione di equilibrio $z_0 = -a$.

Problema 6
a) Se il raggio di curvatura R di una spira circolare tende a infinito, la spira localmente appare come una retta. Secondo la prima legge elementare di Laplace il campo magnetico creato da un elemento di filo in un punto P decresce come $1/r^2$, se r è la distanza del filo da P. Ciò vuol dire che contribuiscono maggiormente al campo in un punto gli elementi di filo che si trovano vicini a P. Nel caso della spira in un punto che dista d dalla spira contribuiscono quindi al campo maggiormente gli elementi di filo vicini a tale punto. Se questi elementi sono praticamente rettilinei il campo si approssima allora bene con quello di un filo rettilineo. L'approssimazione sarà tanto migliore quanto più piccolo è d rispetto a R.
b) La forza esercitata dalla spira di sinistra su un elemento $d\vec{s}_1$ della spira di destra è data da

$d\vec{F}_0 = Id\vec{s}_1 \times \vec{B}_2$, dove in base all'approssimazione di cui al quesito precedente per il modulo del campo creato dalla spira di sinistra si ha $B_2 = \mu_0 I/2\pi d$. Inoltre $\vec{B}_2$ è ortogonale a $d\vec{s}_1$, sicché la direzione di $d\vec{F}_0$ è quella delle x decrescenti per qualsiasi $d\vec{s}_1$. Per il modulo si ha quindi $dF_0 = Ids_1 B_2 = \mu_0 I^2 ds_1/2\pi d$. Anche la forza totale è quindi diretta nel verso delle x decrescenti e risulta pertanto *attrattiva*. Per il suo modulo si ottiene

$$F_0 = I 2\pi R B_2 = \frac{\mu_0 R I^2}{d}.$$

c) Dalla formula per il campo magnetico prodotto da una spira sul suo asse

$$B_S(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}, \tag{6}$$

tenendo conto che in M le due spire creano campi concordi si ottiene

$$B_M = 2B_S(d/2) = \frac{\mu_0 I R^2}{\left(R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I}{R}, \qquad \text{visto che} \quad d \ll R.$$

Vale quindi $\vec{B}_M = (\mu_0 I/R, 0, 0)$.
d) $L_{ext} = -L = \Delta U = -\Delta(\vec{\mu} \cdot \vec{B}_M) = -\mu B_M \, cos(120^o) + \mu B_M = 3\mu B_M/2$.
e) In base alla formula (6) sull'asse x il campo magnetico totale è diretto nel verso delle x crescenti, essendo dato da

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{1}{\left(R^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right), \tag{7}$$

dove si è scelto come origine dell'asse x il punto M. Per $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$ si ha $U = -\mu B(x)$, sicché la componente x della forza magnetica agente sull'ago nel punto M è data da

$$F_1^x = - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu \left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Tuttavia, la funzione $B(x)$ in (7) è simmetrica, $B(-x) = B(x)$, e pertanto la derivata $\partial B(x)/\partial x$ in $x = 0$ si annulla. Vale quindi quindi $F_1^x = 0$. Per motivi di simmetria vale allora $\vec{F}_1 = 0$.
f) Se nella spira di destra non circola corrente il campo sull'asse x è dato da

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

ed eseguendo i calcoli si trova

$$F_2^x = \mu \left.\frac{\partial B(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{3\mu_0 \mu I R^2 d}{4\left(R^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{5/2}} \approx -\frac{3\mu_0 \mu I d}{4R^3}.$$

Per motivi di simmetria vale allora $\vec{F}_2 = (F_2^x, 0, 0)$, forza che è dunque attrattiva, come segue anche da argomenti generali.

Problema 7
a) Per $y \gg b$ la lamina appare come una lamina piana, con corrente per unità di lunghezza $dI/dx = jb$. Si può allora suddividere la lamina in striscie larghe dx, assimilabili a fili rettilinei infiniti disposti lungo l'asse z, percorsi dalla corrente $dI = jb\,dx$ nel verso delle z decrescenti. Il modulo del campo magnetico prodotto in un punto dell'asse y da uno di questi fili situato in x vale

$$dB^* = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0 jb\,dx}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Per motivi di simmetria questi fili creano sull'asse y un campo magnetico complessivo diretto lungo l'asse x. Sommando le componenti x di questi contributi si ottiene

$$B(y) = \int_{-a}^{a} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dB^* = \frac{\mu_0 jb\,y}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\mu_0 jb}{\pi}\, arctg\left(\frac{a}{y}\right), \qquad \vec{B}(y) = B(y)\vec{u}_x. \quad (8)$$

Per $y > 0$ il campo è quindi diretto nel verso delle x crescenti, mentre per $y < 0$ è diretto nel verso delle x decrescenti.
b) Ponendo $\vec{\mu} = \mu\,\vec{u}_y$ si ottiene

$$\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}(y) = -\mu B(y)\,\vec{u}_z.$$

c) Per $a \to \infty$ si ha che $arctg(a/y) = \pm\pi/2$, a seconda che sia $y > 0$ o $y < 0$. Considerando j fissato la (8) dà allora

$$\lim_{a\to\infty} B(y) = \frac{\mu_0 jb}{2}\, sign(y),$$

che corrisponde al campo prodotto da una lamina infinita con densità di corrente superficiale $k = jb$.

Per quanto riguarda invece il caso $a \ll y$ occorre eseguire il limite della (8) per $a \to 0$, tenendo la corrente totale $I = 2jab$ fissata. Si ottiene

$$\lim_{a\to 0} B(y) = \lim_{a\to 0}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\, arctg\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y},$$

che corrisponde al campo prodotto da un filo infinito.

Problema 8
a) Il momento magnetico della prima spira è fissato e vale $\vec{\mu}_1 = \mu_1\,\vec{u}_z,\ \mu_1 = \pi R_1^2 I_1$, mentre il momento magnetico della seconda vale $\vec{\mu}_2 = \mu_2\,\vec{n},\ \mu_2 = \pi R_2^2 I_2$, $\vec{n}$ essendo la normale alla spira orientata concordemente con il verso della corrent I_2. Visto che vale $L \gg R_1$ e $L \gg R_2$ il campo magnetico prodotto dalla prima spira nella regione dove si trova la seconda è ben approssimato dal *campo di dipolo magnetico*, ovvero

$$\vec{B}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}_1\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}_1\right) = \frac{\mu_0\mu_1}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,z\,\vec{x}}{r^2} - \vec{u}_z\right), \qquad r = |\vec{x}|. \quad (9)$$

Nel punto $A = (0, L, 0)$ dove si trova la seconda spira questo campo vale

$$\vec{B}_1(A) = -\frac{\mu_0\mu_1}{4\pi r^3}\,\vec{u}_z.$$

Avendo tale campo la direzione delle z decrescenti, la direzione di equilibrio *stabile* della seconda spira corrisponde a $\vec{\mu}_2 = -\mu_2\vec{u}_z$ (spira giacente nel piano xy e corrente circolante in senso *orario*), mentre la sua direzione di equilibrio *instabile* corrisponde a $\vec{\mu}_2 = \mu_2\vec{u}_z$ (spira giacente nel piano

xy e corrente circolante in senso *antiorario*).
b) Nel campo magnetico (9) della prima spira la seconda possiede l'energia potenziale meccanica ($\vec{\mu}_2 = \pm\mu_2\vec{u}_z$)

$$U(\vec{x}) = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - \frac{3\,(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{x})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{x})}{r^2}\right) = \pm\,\frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right). \tag{10}$$

Si noti che vale $U(A) = \pm\mu_0\mu_1\mu_2/4\pi L^3$, a conferma del fatto che per $\vec{\mu}_2 = \mu_2\vec{u}_z$ e $\vec{\mu}_2 = -\mu_2\vec{u}_z$ l'equilibrio è rispettivamente instabile e stabile.

La forza esercitata dalla prima spira sulla seconda – trovantesi in un generico punto $\vec{x}$ – si ottiene calcolando il gradiente della (10)

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x}) = \pm\,\frac{3\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi r^5}\left(\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right)x,\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right)y,\left(3 - \frac{5z^2}{r^2}\right)z\right).$$

Nel punto A, corrispondente a $x = z = 0$ e $y = L$, questa formula dà

$$\vec{F}(A) = \pm\,\frac{3\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi L^4}\,\vec{u}_y.$$

La forza è quindi radiale e attrattiva (repulsiva) per la direzione stabile (instabile).