

## Domande di teoria

*NB: degli argomenti tra parentesi si richiede solo la conoscenza dei risultati principali senza i dettagli di eventuali dimostrazioni.*

### PRIMA PARTE

**1) Introduzione.** Quali sono le caratteristiche comuni alle quattro interazioni fondamentali? Si enunci il teorema dell'energia cinetica. Cosa si intende con forza conservativa e qual è il suo legame con la conservazione dell'energia meccanica? Cosa affermano i teoremi della divergenza e del rotore? Si dimostri il *teorema del flusso nullo*.

**2) Elettrostatica.** Cosa afferma la *legge di Coulomb*? Quali sono le proprietà della forza tra due cariche? Si scrivano le espressioni del campo elettrico e del potenziale prodotti da un insieme di cariche puntiformi. Che relazione sussiste tra potenziale e campo elettrico? A partire dalla legge di Coulomb si derivino le rappresentazioni integrali per  $\vec{E}$  e  $\varphi$  prodotti da una distribuzione continua di carica  $\rho$ , specificando le assunzioni utilizzate. Si verifichi esplicitamente che le espressioni ottenute soddisfano la relazione  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Qual è l'andamento a grandi distanze del campo elettrico e del potenziale di una distribuzione di carica a supporto compatto e come lo si deriva? Come si definiscono le linee di campo? Si enunci e si dimostri il *teorema di Gauss* a partire dalla legge di Coulomb. Si scrivano le *equazioni fondamentali dell'Elettrostatica* in forma integrale e differenziale e si spieghi in che modo discendono dalla legge di Coulomb. Che legame sussiste tra queste equazioni e l'equazione di Poisson? Si dimostri che l'equazione di Poisson sotto opportune condizioni ammette soluzione unica. Si derivi l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica  $U_e$  di un sistema di cariche puntiformi e si spieghi il suo legame con il lavoro del campo elettrico. Qual è l'espressione dell'energia meccanica conservata di un sistema di cariche puntiformi in presenza di un campo elettrico esterno? Si derivi l'espressione di  $U_e$  per una distribuzione continua di carica in termini del campo elettrico. Qual è l'espressione della densità di energia  $w_e(\vec{x})$  del campo elettrico? Come si definisce il momento di dipolo elettrico  $\vec{p}$  di un sistema di cariche? Si derivino le espressioni del potenziale e del campo elettrico generati da un sistema di cariche a grandi distanze dallo stesso, in termini di  $\vec{p}$  e della carica totale  $Q$ .

**3) Conduttori in equilibrio.** Cosa distingue un materiale conduttore da un materiale isolante? Quali sono e come si derivano le caratteristiche principali del campo elettrico, del potenziale e della distribuzione di carica in un conduttore? Che legame sussiste tra il campo elettrico sul bordo di un conduttore e la distribuzione superficiale di carica e come lo si dimostra? Cosa afferma il *teorema di Laplace* sull'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace? Si dimostri che in assenza di campo elettrico esterno il rapporto tra la carica  $Q$  di un conduttore e la differenza  $\varphi_0 - \varphi_\infty$  è costante, dove  $\varphi_0$  e  $\varphi_\infty$  sono rispettivamente il potenziale del conduttore e il potenziale all'infinito. Da questa proprietà si deduca che il campo elettrico e la distribuzione superficiale di carica  $\sigma(S)$  di un conduttore con carica  $Q$  sono univocamente determinati. In cosa consistono e come si dimostrano l'*effetto punta* e il fenomeno della *gabbia di Faraday*? Si derivi per un sistema di  $N$  conduttori un'espressione per  $U_e$  che coinvolga solo le loro cariche  $Q_j$  e i loro potenziali  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . (Che cosa è un condensatore e come si definisce la capacità? Si derivino le espressioni della capacità e dell'energia elettrostatica di un condensatore piano. Si dimostrino le formule per le capacità dei condensatori in serie e in parallelo.)

**4) Correnti elettriche.** Come si definisce la corrente  $I$ ? Come si esprime la *densità di corrente*  $\vec{j}$

in termini di  $\rho$  e  $\vec{v}$ ? Qual è il significato fisico del modulo e della direzione di  $\vec{j}$ ? Qual è il significato delle velocità di deriva, di agitazione termica e di propagazione del segnale? Si derivi l'equazione di continuità e si spieghi il suo nesso con la conservazione locale della carica elettrica. (Si derivi la legge di Ohm per un resistore a partire dal modello di urti successivi con il reticolo metallico.) Si derivi l'espressione della potenza dissipata per effetto Joule in un resistore. (Si derivino le espressioni delle resistenze equivalenti di resistori in serie e in parallelo.) Cosa si intende per *forza elettromotrice*? Si derivi l'espressione della potenza erogata da un generatore di differenza di potenziale. (Cosa affermano le leggi di Kirchhoff e da quali proprietà del campo elettrico e della carica discendono?)

**5) Fenomeni magnetici stazionari.** Quali sono le caratteristiche sperimentali dell'azione magnetica? Quali sono le proprietà della forza magnetica agente su una particella con carica  $q$  e velocità  $\vec{v}$ ? Sfruttando queste proprietà si dimostri che l'azione magnetica è riconducibile a un campo vettoriale, ovvero il *campo magnetico*, e si derivi l'espressione della *forza di Lorentz*. Si derivi la *seconda legge elementare di Laplace* dall'espressione della forza di Lorentz. Come si definisce il momento magnetico  $\vec{\mu}$  associato a una densità di corrente  $\vec{j}$ ? Si determini l'espressione di  $\vec{\mu}$  per una spira percorsa da corrente. Qual è l'interpretazione geometrica di  $\vec{\mu}$  per una spira piana? Si dimostri che il momento delle forze agente su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme è dato da  $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ . (Si esprimano la forza magnetica  $\vec{F}$  agente su una densità di corrente  $\vec{j}$  e la relativa *energia potenziale* meccanica  $U_m$  in termini del campo magnetico  $\vec{B}$ , se quest'ultimo varia poco nello spazio. Si esprima il lavoro meccanico compiuto dal campo magnetico in termini di  $U_m$ .) Si determini il moto di una carica in presenza di un campo magnetico costante e uniforme. Cosa si intende per *frequenza di ciclotrone*?

## SECONDA PARTE

Si scrivano le equazioni fondamentali della *Magnetostatica* in forma differenziale e integrale. Per quale motivo in Magnetostatica occorre imporre il vincolo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ? Qual è il significato fisico del fatto che il campo magnetico è solenoidale? (Quali sono le caratteristiche delle linee di campo di un generico campo magnetico?) Si derivi la legge di Ampere in forma integrale a partire dall'espressione del campo magnetico di un filo rettilineo infinito, ovvero  $\vec{B} = \mu_0 I \vec{u}_\varphi / 2\pi r$ , specificando le ipotesi utilizzate e, in particolare, il ruolo del vincolo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Si derivi la legge di Ampere in forma differenziale. In che modo si introduce il potenziale vettore  $\vec{A}$ ? Per quale motivo  $\vec{A}$  non è univocamente determinato? Si determini la soluzione dell'equazione di Ampere usando il potenziale vettore e la gauge di Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , derivando per  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  rappresentazioni integrali in termini di  $\vec{j}$ . Da queste rappresentazioni si derivi la *prima legge elementare di Laplace*. Qual è l'espressione del campo magnetico generato da un solenoide rettilineo infinito? (Si derivi la forza per unità di lunghezza che due fili paralleli infiniti percorsi da corrente si esercitano vicendevolmente. Si dimostri che il campo magnetico generato da una densità di corrente  $\vec{j}$  a supporto compatto a grandi distanze decresce come  $1/r^3$ , analizzando la rappresentazione integrale di  $\vec{A}$  in termini di  $\vec{j}$ .) Qual è il significato del *campo di dipolo magnetico* e quali sono le sue caratteristiche. Si spieghi perché poli dello stesso tipo di due magneti si respingono mentre un polo nord e un polo sud si attraggono. (Si descriva il principio di funzionamento di un *elettromagnete* e dell'*galvanometro*.)

**6) Induzione elettromagnetica.** Quali sono i due tipi di esperimenti in cui si osserva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica? Quali sono i meccanismi fisici che causano la f.e.m. indotta nei

due casi? Qual è il significato della regola del flusso  $\varepsilon = -d\Phi/dt$ ? Si verifichi la regola del flusso a partire dalla forza di Lorentz in qualche caso semplice. Si enunci la legge di Lenz e la si illustri con qualche esempio. (Si quantifichino i lavori elettrici e meccanici compiuti dal campo magnetico su un generico circuito e si verifichi che la loro somma fa zero. Si descriva il principio di funzionamento di un *generatore* di corrente alternata.) Cosa afferma la *legge dell'induzione di Faraday* e quale nuovo fenomeno fisico predice? Che legame sussiste tra tale legge e la regola del flusso? Si spieghi il funzionamento del *betatrone* e si derivi il vincolo a cui deve soddisfare il campo magnetico. (Si spieghi il principio di funzionamento del *trasformatore*.) In che cosa consiste il fenomeno dell'induzione mutua e dell'*autoinduzione*? Come si definisce l'induttanza  $L$  di un circuito? Si determini l'espressione dell'induttanza di un solenoide ideale. Si derivi l'espressione dell'energia magnetica  $U_L$  immagazzinata in un circuito con induttanza  $L$  percorso da corrente  $I$ . Applicando la formula di  $U_L$  a un solenoide ideale si derivi l'espressione della densità di energia  $w_m$  associata al campo magnetico.

**7) Equazioni di Maxwell.** Per quale motivo l'equazione di Ampere per campi variabili nel tempo deve essere modificata? Si derivi un completamento consistente di tale equazione. Si illustri in maniera quantitativa la necessità della presenza della *corrente di spostamento* durante il processo di carica di un condensatore. Quale nuovo fenomeno fisico introduce l'*equazione di Ampere-Maxwell*? Quali sono le equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica in presenza di  $N$  particelle cariche e quali sono le funzioni incognite di tali equazioni? Si derivi la legge della potenza  $d\varepsilon_j/dt = q_j \vec{v}_j \cdot \vec{E}$  dall'equazione di Lorentz. (Si diano le espressioni di  $\rho$  e  $\vec{j}$  per un sistema di  $N$  particelle cariche.) Si scrivano le equazioni di Maxwell in forma differenziale e in forma integrale. (Quali sono le caratteristiche del campo elettromagnetico prodotto da una particella in moto rettilineo uniforme?) Cosa asserisce il teorema della conservazione dell'energia totale in Elettrodinamica? Si derivi l'*equazione di continuità* dell'energia  $\partial w_{em}/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$  a partire dalle equazioni di Maxwell. Cosa rappresenta il *vettore di Poynting*  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ ? (Sotto quale ipotesi si dimostra l'equazione  $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x = \frac{d}{dt} \sum_{j \in V} \varepsilon_j$ ?) Si discuta la conservazione locale dell'energia in Elettrodinamica, in presenza di  $N$  particelle cariche, a partire dall'equazione di continuità. (Si scrivano nel sistema internazionale [SI] e in quello di Heaviside-Lorentz [HL]: le equazioni di Maxwell, l'equazione di Lorentz, la forza di Coulomb, il vettore di Poynting, la densità di energia del campo elettromagnetico.)

**8) Onde elettromagnetiche.** Cosa si intende per un'onda progressiva che si propaga con velocità  $v$ ? Qual è la soluzione generale dell'*equazione delle onde* unidimensionale? Che legame sussiste tra la soluzione generale e le onde *monocromatiche*? Quali sono le caratteristiche delle onde monocromatiche? Qual è il significato delle grandezze  $v$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $T$ ,  $\lambda$  e come sono legate tra loro? Si dia una base completa di soluzioni dell'equazione delle onde tridimensionale  $\square f = (\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \nabla^2) f = 0$ . Cosa si intende per onda *piana*? Qual è il significato del vettore d'onda  $\vec{k}$ ? A partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si deduca che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  soddisfano l'equazione delle onde tridimensionale, con  $v = c$ . Che conclusione se ne può trarre? A partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si deducano le espressioni di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  relative a una generica onda elettromagnetica monocromatica. Quali sono le proprietà dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  risultanti? Come si quantifica il trasporto di energia di un'onda elettromagnetica monocromatica? Qual è la direzione del vettore di Poynting associato? Si scrivano i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  di una generica onda elettromagnetica monocromatica polarizzata linearmente. Qual è la struttura della soluzione generale delle equazioni di Maxwell nel vuoto? Da che cosa discende il principio di sovrapposizione e in che cosa consiste la sua importanza? Un generico campo elettromagnetico, soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto, è trasverso? Quali sono le osservazioni sperimentali che hanno portato Maxwell

a identificare la luce come un fenomeno elettromagnetico? Cosa hanno dimostrato gli esperimenti di Hertz? (In che modo avvengono i processi di emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche da parte di particelle cariche? Qual è l'origine della radiazione cosmica di fondo? Quali sono le proprietà dei fotoni che compongono un'onda elettromagnetica monocromatica?)

**9) Relatività.** In che senso le equazioni di Maxwell e Lorentz sono incompatibili con il *principio di relatività galileiana*? Cosa prova l'esperimento di Michelson e Morley? Quali sono i postulati della Meccanica Newtoniana e quali quelli della Relatività? Cosa afferma il *principio di relatività einsteiniana*? A partire dai postulati si dimostri in sequenza a) la *linearità delle trasformazioni* da un sistema di riferimento a un altro, b) il teorema dell'*invarianza dell'intervallo*, c) che una generica trasformazione da un sistema di riferimento a un altro è una *trasformazione di Poincaré*, ovvero della forma  $x' = \Lambda x + a$  con  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ , dove  $\Lambda$  rappresenta una *trasformazione di Lorentz*. (Si dimostri che l'insieme delle trasformazioni di Lorentz forma un gruppo. Si deduca la forma di una *trasformazione di Lorentz speciale* per un moto relativo lungo l'asse  $x$ .) Utilizzando le trasformazioni di Lorentz speciali si derivino i fenomeni della *dilatazione dei tempi* e della *relatività della simultaneità*. Si dimostri che particelle con velocità superiori alla velocità della luce violano la causalità. In che senso il principio della *covarianza a vista* nell'ambito del formalismo tensoriale costituisce una realizzazione del *principio di relatività einsteiniana*? (Quali sono le basi del formalismo tensoriale? Si dimostri che le operazioni di derivata, di *contrazione* e di prodotto preservano il carattere tensoriale degli elementi coinvolti.) Quali sono gli elementi principali della cinematica relativistica di una particella? Cosa si intende con *tempo proprio* di una particella? Come sono definiti il *quadrimento* e l'*energia relativistica* di una particella e come si giustificano tali definizioni? In che modo si deriva che particelle che viaggiano con la velocità della luce devono avere massa nulla? Si definisca la *quadrivettore*  $j^\mu$  e si scriva l'equazione di continuità per la carica elettrica in forma covariante a vista. (Si dia un argomento euristico per cui  $j^\mu$  costituisce un quadrivettore.) Si scrivano le componenti del *tensor di Maxwell*  $F^{\mu\nu}$  in termini di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Si scrivano le equazioni di Maxwell e Lorentz in forma covariante a vista e si verifichi che sono equivalenti alle corrispondenti equazioni in notazione tridimensionale. Qual è il significato della quarta componente dell'equazione di Lorentz quadridimensionale?

### Quesiti consigliati

La numerazione dei *quesiti* si riferisce ai rispettivi capitoli del testo *Elettromagnetismo* di A. Bettini.

Cap1: 3,6,12,13,18,19,21

Cap2: 1,2,6,7,10,14,16

Cap3: 2,5,7,8,12

Cap5: 3,4,7,9,11

Cap6: 7,14,17,21,22,26,28

Cap7: 2,5,9,10,12,15,18

Cap8: 1,4

Cap10:1,3,6,7,9