ELETTRODINAMICA CLASSICA

Kurt Lechner

Prefazione

In base alle conoscenze teoriche e sperimentali acquisite a tutt'oggi sul comportamento della materia a livello microscopico, la totalità dei fenomeni fisici microscopici può essere spiegata assumendo che tutta la materia sia costituita da particelle elementari soggette a quattro tipi di interazioni fondamentali: gravitazionale, elettromagnetica, debole, forte. Queste interazioni non avvengono in modo diretto ma sono mediate a loro volta da un particolare tipo di particelle elementari, i cosiddetti *bosoni intermedi*. L'interazione gravitazionale è quella nota da più tempo, mentre l'interazione elettromagnetica è quella studiata e compresa più a fondo, avendo trovato una solida formulazione teorica nell'*Elettrodinamica Quantistica* ancora a metà del secolo scorso. La quasi totalità dei fenomeni fisici quotidiani – dalla stabilità della materia alla globalità dei fenomeni luminosi – è, infatti, riconducibile a questa teoria. Le interazioni deboli e forti, che a differenza di quelle elettromagnetica e gravitazionale si manifestano solo a distanze microscopiche, hanno trovato una formulazione analoga nell'ambito del *Modello Standard* delle particelle elementari – che include la stessa Elettrodinamica Quantistica – mentre l'interazione gravitazionale appare tuttora in conflitto con le leggi della fisica quantistica, malgrado i recenti progressi maturati nell'ambito delle *teorie di superstringa*.

Nonostante il comune ruolo di mediatrici dell'azione reciproca tra i costituenti elementari della natura, ciascuna interazione fondamentale è contrassegnata da proprietà esclusive che comportano fenomeni fisici peculiari. Così l'interazione forte, mediata da particelle chiamate *gluoni*, è la sola a dar luogo al fenomeno del *confinamento* che imprigiona i quark e gli stessi gluoni all'interno dei nucleoni, mentre l'interazione debole è l'unica a essere mediata da particelle *massive*, le $W^\pm$ e la Z^0. Similmente l'interazione elettromagnetica è l'unica a essere mediata da particelle – i *fotoni* – le quali, non essendo dotate di carica elettrica non sono soggette a loro volta a un'interazione elettromagnetica reciproca. E infine, l'interazione gravitazionale è l'unica a esercitarsi tra *tutte* le particelle elementari – compresi i bosoni intermedi – e a essere mediata da particelle di spin *due* – i *gravitoni* – mentre le rimanenti tre interazioni sono mediate da particelle di spin *uno*.

Di fronte a queste importanti distinzioni appare alquanto sorprendente come le quattro interazioni fondamentali siano rette da un'impalcatura teorica *comune*, che ne determina fortemente la struttura generale; impalcatura elegante nella forma e matematicamente solida, le cui profonde origini fisiche sono in parte ancora da scoprire. Tra i pilastri principali di questa impalcatura unificante ricordiamo i seguenti: tutte le interazioni fondamentali soddisfano il principio di *relatività einsteiniana* e ammettono una formulazione covariante a vista, con conseguente conservazione del quadrimomento e del momento angolare quadridimensionale. Inoltre ciascuna interazione si trasmette attraverso lo scambio di una o più particelle bosoniche – i bosoni intermedi nominati sopra – che sono rappresentate da campi vettoriali o tensoriali la cui dinamica è controllata da una *invarianza di gauge* locale. Il teorema di Nöther associa poi a ciascuna invarianza, e quindi a ciascun bosone intermedio, una *grandezza fisica conservata*. Infine il pilastro forse più misterioso, ma non per questo meno fondante, è rappresentato dal fatto che la dinamica di tutte e quattro le interazioni fondamentali discende da un *principio variazionale*.

Il presente testo è un trattato di Elettrodinamica *classica* ed è stato costruito sulla base degli argomenti svolti nel corso *Campi Elettromagnetici* da me tenuto negli anni accademici 2004/05–2010/11 per la Laurea Magistrale in Fisica, presso l'Università di Padova. Nella sua stesura ha avuto preminenza l'intento di enucleare gli aspetti che accomunano l'Elettrodinamica alle altre interazioni fondamentali – vale a dire i pilastri sopra nominati – e di mettere in evidenza, ove possibile, analogie e differenze. La rinuncia più pesante dovuta a questa impostazione consiste nell'aver trascurato quasi completamente l'importante argomento dei campi elettromagnetici nella *materia*. L'Elettrodinamica classica viene presentata come una teoria basata su un sistema di postulati – essenzialmente il *principio di relatività einsteiniana* e *le equazioni di Maxwell e di Lorentz* – da cui l'intera e ricca fenomenologia delle interazioni elettromagnetiche può essere derivata in modo stringente. Conseguentemente si è dedicata particolare attenzione alle proprietà di consistenza interna, oltre che fisica, di questa teoria. In linea con questa impostazione si evidenziano fin dall'inizio le tracce lasciate dalle *divergenze ultraviolette* che accompagnano inevitabilmente l'Elettrodinamica classica di particelle cariche *puntiformi*, rendendola così – in ultima analisi – una teoria *internamente inconsistente*. Le inconsistenze interne dell'Elettrodinamica classica come teoria fondamentale sono codificate nella cosiddetta *reazione di radiazione*, fenomeno di importanza fisica basilare che viola *esplicitamente* l'invarianza sotto *inversione temporale*. Questa simmetria discreta dell'Elettrodinamica e la sua "evoluzione" da una simmetria *intatta* a una simmetria violata *spontaneamente* prima, ed *esplicitamente* poi, attraverserà dunque la nostra esposizione della teoria come un filo rosso. Le inconsistenze interne dell'Elettrodinamica sono in apparente contraddizione con il fatto che da un punto di vista sperimentale questa teoria descrive tutti i fenomeni elettromagnetici classici con estrema precisione. A questa contraddizione è stata riservata particolare attenzione, soprattutto nell'esposizione delle applicazioni dell'Elettrodinamica, presentando una sua soluzione *pragmatica* nei capitoli 14 e 15, la soluzione definitiva potendo essere trovata solo nell'ambito della fisica quantistica. Infine, sempre per un motivo di consistenza interna, onde poter formulare le equazioni di Maxwell in modo matematicamente rigoroso è risultato indispensabile ambientarle nello spazio delle *distribuzioni*.

In generale ogni argomento teorico viene illustrato con una serie di esempi fisicamente rilevanti e svolti in dettaglio, così come l'introduzione di ogni nuovo strumento matematico viene motivata e accompagnata da esemplificazioni pratiche. Similmente la soluzione dei problemi proposti a conclusione dei singoli capitoli dovrebbe comportare una migliore comprensione di alcuni argomenti trattati nel testo, pur non condizionando la comprensione dei capitoli successivi.

Organizzazione del materiale. A grandi linee gli argomenti del testo sono suddivisi in tre parti. La prima parte (capitoli 1–4) espone le basi concettuali e matematiche su cui si fonda l'Elettrodinamica di un sistema di particelle cariche puntiformi. Questa parte iniziale presenta in particolare gli strumenti matematici necessari per una formulazione precisa della teoria, vale a dire la *teoria delle distribuzioni*, strumento indispensabile per una trattazione corretta delle singolarità dovute alla natura puntiforme delle particelle cariche, e il *calcolo tensoriale* – sede naturale di una qualsiasi teoria relativistica. Nel capitolo 2 si introducono le equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica – le equazioni di Maxwell e di Lorentz – si esegue una loro analisi strutturale preliminare e si analizzano le leggi di conservazione da esse implicate. Conclude la prima parte la presentazione del metodo variazionale nei capitoli 3 e 4. Questo metodo viene introdotto come approccio alternativo per la formulazione di una generica teoria di campo, che ne codifica la dinamica in modo conciso ed elegante, e come presupposto fondamentale per la validità del teorema di Nöther. Lo stretto nesso esistente in generale tra questo teorema e il metodo variazionale viene poi esemplificato in dettaglio nel caso dell'Elettrodinamica di particelle puntiformi.

La seconda parte (capitoli 5–13) – la più estesa – è dedicata alla derivazione delle previsioni fenomenologiche dell'Elettrodinamica e inizia con la deduzione di una serie di soluzioni esatte delle equazioni di Maxwell. Questa parte comprende in particolare uno studio dettagliato delle proprietà del campo elettromagnetico nel vuoto, una trattazione sistematica dei campi elettromagnetici generati da una particella carica in moto arbitrario, i fondamentali *campi di Lienard-Wiechert*, e un'analisi approfondita del fenomeno dell'irraggiamento, sia nel limite non relativistico che in quello ultrarelativistico. Così si analizzano in dettaglio la distribuzione angolare e spettrale della radiazione emessa in alcuni sistemi fenomenologicamente rilevanti quali le antenne, gli acceleratori ultrarelativistici, le collisioni tra particelle cariche, l'atomo di idrogeno classico e la *diffusione Thomson*. In questa parte vengono inoltre presentati per esteso alcuni argomenti che raramente ricevono trattazione sistematica nei libri di testo: il problema del campo elettromagnetico creato da una particella carica priva di massa, il confronto tra la radiazione elettromagnetica e quella gravitazionale, la deduzione delle variegate sfaccettature della radiazione di sincrotrone e una spiegazione teorica particolareggiata dell'*effetto Cerenkov*.

La terza parte (capitoli 14–19) verte su argomenti di natura più speculativa o legati a sviluppi più recenti della fisica teorica delle particelle elementari. Il capitolo 14 è dedicato alla *reazione di radiazione* e affronta con cura il problema delle divergenze ultraviolette da cui essa è inevitabilmente affetta. Lo scopo di questo capitolo è doppio. Da un lato si vogliono evidenziare le motivazioni concettuali che costringono a sostituire l'equazione di Lorentz – un dogma dell'Elettrodinamica classica – con l'*equazione di Lorentz-Dirac* che viola esplicitamente l'invarianza per inversione temporale. Dall'altro si vuole illustrare come proprio a causa di questa sostituzione l'Elettrodinamica soffra di un'inconsistenza interna incurabile – che assume forme diverse a seconda del punto di vista pragmatico di volta in volta considerato – ma che in ultima analisi può essere sanata solamente nell'ambito della *Meccanica Quantistica*. Il capitolo successivo è dedicato all'altro problema "classico" dell'Elettrodinamica, ovvero quello dell'energia *infinita* del campo elettromagnetico prodotto da una particella puntiforme. Sorprendentemente questo problema, che minava la stessa legge di conservazione dell'energia, è stato risolto in modo definitivo solo una trentina di anni fa. Nel capitolo 15 si presenta la soluzione di questo problema in una veste moderna – nell'ambito della teoria delle distribuzioni – chiarendo il legame inestricabile esistente tra l'equazione di Lorentz-Dirac e la conservazione del quadrimomento totale. Il capitolo 16 è dedicato ai campi elettromagnetici "massivi". L'importanza di questi campi risiede nel fatto che a livello quantistico essi descrivono particelle massive di spin 1 – una specie di fotoni con massa diversa da zero – quali i mediatori $W^{\pm}$ e Z^0 delle interazioni deboli. Sebbene diversi aspetti fondamentali di queste particelle, come la loro vita media finita, emergano solo in ambito quantistico, l'analisi classica è comunque in grado di rivelare le principali differenze che intercorrono tra l'interazione elettromagnetica vera e propria e quella mediata da campi massivi. Il capitolo 17 costituisce un'introduzione all'Elettrodinamica degli oggetti carichi *estesi* lungo p dimensioni spaziali, le cosiddette *p-brane*. La scelta di questo argomento è motivata dal fatto che le p-brane costituiscono le eccitazioni elementari delle recenti *teorie di superstringa* – teorie candidate a unificare la *Relatività Generale* con la Meccanica Quantistica e con le altre interazioni fondamentali. L'esempio più semplice di una p-brana è la *stringa*, per cui $p = 1$, mentre la particella corrisponde a $p = 0$. Scopo del capitolo è mostrare come i paradigmi fondanti dell'Elettrodinamica delle particelle, come l'invarianza relativistica, le equazioni di Maxwell e di Lorentz e le principali leggi di conservazione, si estendano in modo naturale all'Elettrodinamica degli oggetti estesi. In particolare, nel linguaggio delle *forme differenziali* a cui è dedicata la prima parte del capitolo, la generalizzazione delle equazioni di Maxwell dalle particelle alle p-brane risulta immediata. I due capitoli finali del testo sono dedicati ai *monopoli magnetici*. Nel capitolo 18 si mostra come l'Elettrodinamica *classica* – pur essendo basata su un sistema di postulati molto rigidi – sia perfettamente compatibile con l'esistenza in natura di questo esotico tipo di particelle. Nel capitolo 19 si illustra invece come l'Elettrodinamica *quantistica* dei monopoli magnetici fornisca una soluzione al problema "antico" della *quantizzazione della carica elettrica*, rappresentato dal dato osservativo che tutte le cariche elettriche presenti in natura siano multiple intere di una carica fondamentale.

Prerequisiti. Si suppone che il lettore di questo testo possegga conoscenze di base di elettromagnetismo classico e di cinematica relativistica, quali le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Lorentz speciali. È utile, ma non indispensabile, un minimo di familiarità con le equazioni di Maxwell scritte in forma covariante a vista e in generale con l'uso dei tensori quadridimensionali. L'origine fisica e gli elementi fondamentali del calcolo tensoriale vengono comunque esposti con il necessario grado di completezza nel capitolo 1. Possono risultare utili le nozioni elementari della teoria delle distribuzioni, in particolare il concetto della distribuzione-δ di Dirac. Gli elementi essenziali riguardanti le distribuzioni, e necessari per la comprensione del testo, sono comunque presentati in modo sintetico nel capitolo 2. Infine è utile, ma di nuovo non indispensabile, conoscere il metodo variazionale relativo a un sistema lagrangiano con un numero finito di gradi di libertà.

Padova, marzo 2012 — Kurt Lechner

Indice

1 I fondamenti della Relatività Ristretta

Nella scoperta della Relatività Ristretta l'Elettrodinamica ha giocato un ruolo fondamentale, rappresentando una teoria relativistica per eccellenza. Il *principio di relatività einsteiniana*, che afferma che tutte le leggi della fisica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, è emerso con forza da questa teoria ed è andato consolidandosi sempre di più, man mano che le nostre conoscenze del mondo microscopico sono diventate più complete: tutte le interazioni fondamentali rispettano infatti tale principio. Il modo più semplice ed elegante per implementarlo – difatti l'unico di un'utilità concreta – è rappresentato dal paradigma della *covarianza a vista* nell'ambito del *calcolo tensoriale*. Questo paradigma è stato applicato con successo a tutte le teorie di carattere fondamentale, come le teorie che descrivono le quattro interazioni fondamentali, oppure le più speculative *teorie di superstringa*, e mantiene la sua piena efficacia anche a livello quantistico. La nostra esposizione dell'Elettrodinamica si baserà dunque a ragione su questo paradigma.

Nella costruzione di una teoria fisica è di essenziale importanza porre in evidenza le assunzioni *aprioristiche* su cui la teoria si fonda, per poter distinguere le conseguenze di tali assunzioni dalle conseguenze di eventuali ipotesi aggiuntive, formulate strada facendo. Per questo motivo nella sezione introduttiva ritracciamo innanzitutto il percorso logico che ha portato dai postulati della Relatività Ristretta al paradigma della covarianza a vista e al calcolo tensoriale. Esporremo gli elementi fondamentali del calcolo tensoriale con un certo grado di completezza, poiché ne faremo ampio uso nel testo. Nella parte finale del capitolo analizzeremo in dettaglio la struttura del *gruppo di Poincaré*, vale a dire dell'insieme delle trasformazioni di coordinate che collegano un generico sistema di riferimento inerziale a un altro. In una teoria relativistica questo gruppo di simmetria è intimamente legato con le principali leggi di conservazione – attraverso il *teorema di Nöther*. Questo legame, di importanza fondamentale per tutta la fisica, verrà poi indagato approfonditamente nel capitolo 3.

1.1 I postulati della Relatività

La *Meccanica Newtoniana* e la teoria della *Relatività Ristretta* si basano su alcune assunzioni aprioristiche *comuni*, riguardanti in particolare le proprietà dello spazio e del tempo, mentre si distinguono in modo fondamentale nei *principi di relatività* su cui ciascuna teoria si basa. Le assunzioni comuni riguardanti lo spazio-tempo sono l'omogeneità del tempo e l'omogeneità e l'isotropia dello spazio vuoto. Un altro elemento in comune è che le leggi fisiche di entrambe le teorie sono formulate rispetto a una classe particolare di sistemi di riferimento – i *sistemi di riferimento inerziali* – e che entrambe implementano l'equivalenza fisica di questi sistemi di riferimento attraverso un principio di relatività. Il principio di *relatività galileiana* della Meccanica Newtoniana prevede che le leggi della meccanica mantengano la stessa forma sotto le trasformazioni di Galileo

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}\,t, \qquad t' = t.$$

Il principio di *relatività einsteiniana* richiede invece che *tutte* le leggi della fisica abbiano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, non facendo nessuna ipotesi aprioristica sul modo in cui si trasformano lo spazio e il tempo. Per di più la Relatività Ristretta rinuncia al paradigma dell'assolutezza degli intervalli spaziali e temporali della

Meccanica Newtoniana, sostituendolo con il postulato della costanza della velocità della luce. In definitiva i *postulati della fisica relativistica* sono:

I) Lo spazio è isotropo e omogeneo e il tempo è omogeneo.

II) La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

III) Tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Per rendere operativi questi postulati, in particolare il postulato III), che pone forti restrizioni sulla forma delle leggi fisiche ammesse, è necessario determinare preliminarmente le leggi di trasformazione delle coordinate spazio-temporali tra un sistema di riferimento inerziale e un altro. Difatti, come faremo vedere in sezione 1.2, la forma di queste leggi di trasformazione viene determinata in modo univoco dai postulati I) e II). Prima di proseguire specifichiamo le notazioni e le convenzioni che adotteremo.

Indicheremo le coordinate spazio-temporali *controvarianti* di un *evento* con indici greci, ovvero $\mu, \nu, \rho \dots = (0, 1, 2, 3)$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x^0 = ct.$$

Di seguito la velocità della luce c di frequente verrà posta uguale a uno. Le coordinate puramente spaziali $\vec{x}$ verranno invece indicate con gli indici latini $i, j, k \dots = (1, 2, 3)$

$$x^i = (x^1, x^2, x^3).$$

Scriveremo pertanto $x^\mu = (x^0, x^i) \equiv (x^0, \vec{x})$. Quando scriveremo "$x$" con nessun indice in generale ci riferiremo alla coordinata quadridimensionale x^μ. Un campo nello spazio-tempo quadridimensionale, ad esempio, verrà indicato con il simbolo $\varphi(x)$. La *metrica di Minkowski* e la sua inversa, indicate rispettivamente con $\eta^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, sono matrici diagonali 4×4 definite da

$$diag(\eta^{\mu\nu}) = (1, -1, -1, -1) = diag(\eta_{\mu\nu}), \qquad \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho.$$

Adotteremo la convenzione della *somma sugli indici muti* di Einstein, che sottintende il simbolo di sommatoria su ogni indice che compare due volte nella stessa espressione. Con l'espressione $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}$ di cui sopra, ad esempio, si intende la sommatoria

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} \equiv \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}$$

e analogamente per le sommatorie multiple. Usando la metrica di Minkowski si introducono le coordinate spazio-temporali *covarianti* di un evento

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2 - x^3), \qquad x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu.$$

Abbiamo quindi $x_\mu = (x_0, x_i) = (x^0, -\vec{x})$, ovvero $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$. Si dice che la metrica di Minkowski permette di *abbassare* e *alzare* gli indici.

1.2 Trasformazioni di Lorentz e di Poincaré

Come abbiamo anticipato, al contrario dei postulati della Meccanica Newtoniana i postulati della Relatività non specificano *a priori* la forma delle trasformazioni delle coordinate da un sistema di riferimento a un altro: sono piuttosto i postulati stessi a determinare la forma di tali trasformazioni, che risulteranno essere le *trasformazioni di Poincaré*. In questa sezione presentiamo la derivazione di queste trasformazioni a partire dai postulati, illustrando così l'estrema economia degli ultimi assieme alla solidità delle prime.

1.2.1 Linearità delle trasformazioni

Innanzitutto dimostriamo che dal postulato I) discende che le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale a un altro sono necessariamente *lineari*. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale K con coordinate x^μ. Le coordinate x'^μ di un altro sistema di riferimento K' saranno allora legate alle coordinate di K attraverso una mappa invertibile $f^\mu : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $x'^\mu(x) = f^\mu(x)$. Consideriamo ora due eventi generici che in K hanno coordinate x^μ e y^μ. In K' le coordinate di questi eventi sono allora $x'^\mu = f^\mu(x)$ e $y'^\mu = f^\mu(y)$. Secondo il postulato I) non esistono istanti e posizioni privilegiati e di conseguenza un cambiamento dell'origine dello spazio e del tempo in K, ovvero la traslazione $x^\mu \to x^\mu + b^\mu$, $y^\mu \to y^\mu + b^\mu$ con b^μ arbitrario vettore costante, non può cambiare le "distanze" temporali e spaziali tra gli eventi in K'. Deve dunque valere

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y) = f^\mu(x+b) - f^\mu(y+b) \quad \text{per ogni } b^\mu. \tag{1.1}$$

Supponendo che f^μ sia una mappa differenziabile, derivando la (1.1) rispetto a x^ν si trova

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial f^\mu(x+b)}{\partial x^\nu} \quad \text{per ogni } b^\mu.$$

Ne segue che le derivate parziali delle funzioni $f^\mu(x)$ sono indipendenti da x:

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu = \text{costante}.$$

Integrando queste relazioni si deduce allora che le coordinate di K' sono legate a quelle di K da una generica trasformazione *lineare non omogenea*

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{1.2}$$

I quattro parametri costanti a^μ corrispondono ad arbitrarie *traslazioni* dello spazio e del tempo, che sono effettivamente operazioni che connettono un sistema di riferimento inerziale a un altro. D'altro canto per una matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ arbitraria la (1.2) in generale non corrisponde a una trasformazione che connette due sistemi di riferimento inerziali. Scegliendo ad esempio $\Lambda^\mu{}_\nu = k\delta^\mu{}_\nu$ e $a^\mu = 0$ si ottiene la trasformazione di scala $x'^\mu = kx^\mu$ e, come vedremo, se due sistemi di riferimento sono legati da una trasformazione di questo tipo uno solo dei due può essere inerziale. Prima di passare alla determinazione delle matrici Λ permesse deriviamo la legge di trasformazione delle coordinate covarianti. Moltiplicando la (1.2) per $\eta_{\rho\mu}$ otteniamo

$$x'_\rho = \eta_{\rho\mu} x'^\mu = \eta_{\rho\mu}\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \eta_{\rho\mu} a^\mu = \eta_{\rho\mu}\Lambda^\mu{}_\nu \eta^{\nu\sigma} x_\sigma + \eta_{\rho\mu} a^\mu,$$

ovvero

$$x'_\rho = \widetilde{\Lambda}_\rho{}^\sigma x_\sigma + a_\rho, \qquad \widetilde{\Lambda}_\rho{}^\sigma \equiv \eta_{\rho\mu}\Lambda^\mu{}_\nu \eta^{\nu\sigma}, \qquad a_\rho \equiv \eta_{\rho\mu} a^\mu. \tag{1.3}$$

1.2.2 Invarianza dell'intervallo

Per individuare le matrici Λ che corrispondono a trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali è necessario ricorrere al postulato II) e dimostrare *l'invarianza dell'intervallo.* L'*intervallo* tra gli eventi x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, con dx^μ distanze infinitesime o finite, è definito da

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = dt^2 - |d\vec{x}|^2.$$

Sfruttando il postulato II) possiamo allora dimostrare il seguente teorema fondamentale.

Teorema dell'invarianza dell'intervallo: l'intervallo tra due eventi è indipendente dal sistema di riferimento:

$$ds'^2 = ds^2. \ \square \tag{1.4}$$

Cominciamo la dimostrazione considerando due eventi qualsiasi che in un sistema inerziale K distano dx^μ. In base alla (1.2) le distanze tra gli stessi due eventi in un altro sistema inerziale K' sono allora date da $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \, dx^\alpha$. L'intervallo ds'^2 tra i due eventi in K' si scrive allora

$$ds'^2 = dx'^\mu dx'^\nu \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \, dx^\alpha \, \Lambda^\nu{}_\beta \, dx^\beta \, \eta_{\mu\nu} \equiv G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.5}$$

dove abbiamo introdotto la matrice simmetrica

$$G_{\alpha\beta} \equiv \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}$$

che è *indipendente dagli eventi considerati.* Due eventi distanti dx^μ possono essere collegati da un raggio di luce se e solo se $v = |d\vec{x}/dt| = 1$, ovvero se e solo se $ds^2 = 0$. Visto che per il postulato II) la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento, segue allora che

$$ds'^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ds^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dt = \pm|d\vec{x}|.$$

Concludiamo che la forma quadratica ds'^2 in (1.5), considerata come polinomio del secondo ordine in dt, ha gli zeri in $dt = \pm|d\vec{x}|$. Vale quindi la decomposizione

$$ds'^2 = G_{00} \, (dt - |d\vec{x}|) \, (dt + |d\vec{x}|) = G_{00} \, ds^2, \tag{1.6}$$

dove il coefficiente G_{00} può dipendere solo dalla velocità $\vec{v}$ di K' rispetto a K. In particolare per l'invarianza per rotazioni – postulato I) – G_{00} può dipendere solo dal modulo della velocità relativa. La (1.6) si scrive allora

$$ds'^2 = G_{00}(|\vec{v}|) \, ds^2. \tag{1.7}$$

Se invertiamo ora i ruoli di K e K', nella (1.7) dobbiamo effettuare le sostituzioni $\vec{v} \to -\vec{v}$, $s \to s'$, $s' \to s$, ottenendo quindi

$$ds^2 = G_{00}(|\vec{v}|) \, ds'^2.$$

Combinando questa relazione con la (1.7) si deduce che deve essere $G_{00}(|\vec{v}|) = \pm 1$ e visto che $G_{00}(0) = 1$ per continuità si conclude che $G_{00}(|\vec{v}|) = 1$. Segue quindi la (1.4). Dal teorema dell'invarianza dell'intervallo discende un importante vincolo che la matrice Λ deve soddisfare. Dalla (1.5) segue infatti che per ogni distanza dx^μ deve valere

$$ds'^2 = dx^\alpha dx^\beta (\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}) = ds^2 = dx^\alpha dx^\beta \eta_{\alpha\beta}.$$

Questo è possibile se e solo se Λ soddisfa i vincoli

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{1.8}$$

Gruppo di Lorentz. Le matrici Λ che compaiono nelle trasformazioni (1.2) tra due sistemi di riferimento inerziali non sono dunque arbitrarie ma devono soddisfare le condizioni supplementari (1.8), che in notazione matriciale si scrivono

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{1.9}$$

Moltiplicando questa relazione a sinistra per $\Lambda\eta$ e a destra per $\Lambda^{-1}\eta$ la si può porre nella forma equivalente

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta. \tag{1.10}$$

L'insieme di queste matrici costituisce un *gruppo*, si veda il problema 1.9, che viene chiamato *gruppo di Lorentz* e denotato con

$$O(1,3) \equiv \{\Lambda, \text{ matrici reali } 4 \times 4 \,/\, \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \tag{1.11}$$

Il simbolo "O" indica comunemente il fatto che si tratta di matrici (pseudo)ortogonali e la sigla $(1,3)$ si riferisce al fatto che la metrica ha come diagonale $(+1,-1,-1,-1)$. Prendendo il determinante di ambo i membri della (1.9) si ottiene

$$(det\Lambda)(-1)(det\Lambda) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad (det\Lambda)^2 = 1.$$

Il determinante di una matrice appartenente al gruppo di Lorentz può quindi assumere soltanto i valori

$$det\Lambda = \pm 1. \tag{1.12}$$

Segue in particolare che ogni elemento di $O(1,3)$ ammette inverso, come deve succedere per un gruppo.

Gruppo di Poincaré. Due generici sistemi di riferimento inerziali sono dunque collegati da una trasformazione lineare non omogenea del tipo (1.2)

$$x' = \Lambda x + a, \tag{1.13}$$

dove Λ è un elemento del gruppo di Lorentz. L'insieme di queste trasformazioni forma a sua volta un gruppo $\mathcal{P}$, che viene chiamato *gruppo di Poincaré*. Gli elementi di questo gruppo sono costituiti dalle coppie $(\Lambda^\alpha{}_\beta, a^\mu)$, vale a dire

$$\mathcal{P} \equiv \{(\Lambda, a) \,/\, \Lambda \in O(1,3),\ a \in \mathbb{R}^4\}. \tag{1.14}$$

La legge di composizione tra gli elementi di $\mathcal{P}$ si ottiene iterando la (1.13):

$$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1).$$

Il gruppo di Lorentz è isomorfo al sottogruppo di $\mathcal{P}$ formato dagli elementi $(\Lambda, 0)$ e gli elementi di $\mathcal{P}$ della forma $(\mathbf{1}, a)$ costituiscono il *sottogruppo delle traslazioni.* Le trasformazioni di coordinate (1.13) vengono chiamate *trasformazioni di Poincaré* e le trasformazioni corrispondenti ad $a^\mu = 0$ vengono chiamate *trasformazioni di Lorentz.*

Strettamente parlando quello che abbiamo dimostrato finora è che una trasformazione che collega due sistemi di riferimento inerziali è necessariamente una trasformazione di Poincaré. A rigore dovremmo ancora convincerci che ogni trasformazione di Poincaré corrisponde realmente al passaggio da un sistema di riferimento inerziale a un altro; in realtà questo problema riguarda solo le trasformazioni di Lorentz, in quanto le traslazioni hanno un significato fisico immediato. Affronteremo questo problema in sezione 1.4.

1.3 Leggi fisiche covarianti a vista

Una volta determinata la forma delle trasformazioni delle coordinate tra due sistemi di riferimento inerziali procediamo ora all'implementazione del postulato III), vale a dire alla messa a punto di una strategia per formulare leggi fisiche che rispettino il principio di relatività einsteiniana. Come primo passo dobbiamo individuare il modo in cui si trasformano le grandezze fisiche nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro. Affrontiamo questo problema traendo spunto dalla Meccanica Newtoniana, formulata in un sistema di assi cartesiani, per cui il ruolo dell'invarianza di Lorentz viene giocato dall'invarianza per *rotazioni spaziali*.

<u>*Tensori tridimensionali.*</u> Una rotazione degli assi cartesiani trasforma un sistema di riferimento inerziale in un sistema di riferimento che è ancora inerziale. Il gruppo delle rotazioni spaziali, rappresentato dalle matrici 3×3 ortogonali e di determinante unitario

$$SO(3) \equiv \{\mathbf{R}, \text{ matrici reali } 3 \times 3 \,/\, \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1},\, det\mathbf{R} = 1\},$$

costituisce quindi un sottogruppo del gruppo di Lorentz, si veda la sezione 1.4. L'importanza di questo sottogruppo risiede nel fatto che sotto una rotazione degli assi le equazioni fondamentali della Meccanica Newtoniana mantengono la stessa forma; più precisamente, sotto l'azione di $SO(3)$ queste equazioni risultano *covarianti a vista* in un senso che specificheremo tra breve. Esempi di equazioni di questo tipo sono la stessa equazione di Newton $F^i = ma^i$ e il teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dL^i}{dt} = \varepsilon^{ijk} r^j F^k, \tag{1.15}$$

dove $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ e il simbolo ε^{ijk} denota il *tensore di Levi-Civita* tridimensionale

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari di } 1,2,3, \\ -1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari di } 1,2,3, \\ 0, & \text{se almeno due indici sono uguali.} \end{cases} \tag{1.16}$$

Un altro esempio è la formula del momento angolare di un corpo rigido

$$\mathcal{L}^i = I^{ij}\omega^j, \tag{1.17}$$

che coinvolge il vettore velocità angolare ω^i, nonché il tensore d'inerzia

$$I^{ij} = \sum_n m_n (r_n^i r_n^j - r_n^2\, \delta^{ij}). \tag{1.18}$$

Consideriamo ora una rotazione $\mathbf{R}^i{}_j$ che collega un sistema cartesiano K a un altro sistema cartesiano K'. Le componenti del *vettore* posizione e del *tensore* d'inerzia si trasformano allora secondo le regole

$$r'^i = \mathbf{R}^i{}_j\, r^j, \qquad I'^{ij} = \mathbf{R}^i{}_m\, \mathbf{R}^j{}_n\, I^{mn}, \tag{1.19}$$

e i vettori v^i, a^i, F^i, ω^i e L^i si trasformano allo stesso modo di r^i (si veda il problema 1.8). Si noti che il tensore d'inerzia si trasforma come se fosse il prodotto di due vettori, legge di trasformazione che lo qualifica come un tensore di *rango due*. La *covarianza a vista* di una legge fisica consiste nel fatto che a seguito di queste trasformazioni essa mantiene la stessa forma in modo "palese". L'equazione di Newton, ad esempio, si trasforma secondo

$$F^j = ma^j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^i{}_j F^j = m\,\mathbf{R}^i{}_j a^j, \quad \text{ovvero} \quad F'^i = ma'^i,$$

sicché in K' essa ha la stessa forma che in K. In ultima analisi questa proprietà discende dal fatto che l'equazione di Newton uguaglia un *vettore* a un altro *vettore*, oggetto geometrico che sotto rotazioni si trasforma in un ben determinato modo. Similmente, sfruttando le (1.19) e il fatto che $\mathbf{R} \in SO(3)$, si dimostra che le equazioni (1.15), (1.17) assumono in K' la forma, si veda il problema 1.8,

$$\frac{dL'^i}{dt} = \varepsilon^{ijk} r'^j F'^k, \qquad \mathcal{L}'^i = I'^{ij}\omega'^j. \tag{1.20}$$

Anche queste equazioni sono dunque covarianti a vista.

Tensori quadridimensionali. Dall'analisi svolta vediamo che le grandezze fisiche della Meccanica Newtoniana sono raggruppate in vettori e tensori tridimensionali che si trasformano *linearmente* sotto il gruppo delle rotazioni e che ogni indice di un tensore comporta una matrice di trasformazione $\mathbf{R}^i{}_j$, si vedano le (1.19). Essendo le rotazioni un sottogruppo del gruppo di Lorentz risulta allora naturale assumere che anche in una teoria relativistica le grandezze fisiche siano raggruppate in *multipletti*, che si trasformano *linearmente* sotto il gruppo di Lorentz. Nel linguaggio della teoria dei gruppi questa circostanza si esprime dicendo che ciascun multipletto è *sede di una rappresentazione*, riducibile o irriducibile, del gruppo di Lorentz. Da un risultato fondamentale della teoria delle rappresentazioni dei gruppi segue allora che questi multipletti devono costituire necessariamente *tensori quadridimensionali di rango* (m, n). Per definizione un tensore quadridimensionale $T^m{}_n$ di rango (m, n) porta m indici controvarianti e n indici covarianti,

$$T^m{}_n \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}, \tag{1.21}$$

ed è contraddistinto da una peculiare legge di trasformazione sotto l'azione del gruppo di Poincaré (1.14), che specificheremo tra breve. Tensori di rango (0,0) vengono chiamati *scalari* e tensori di rango (1,0) e (0,1) vengono chiamati rispettivamente *vettori controvarianti* e *vettori covarianti*. Più in generale considereremo *campi* tensoriali $T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x)$ di rango (m, n), che rispetto ai tensori esibiscono anche una dipendenza dalla coordinata quadridimensionale x. Per definizione un campo tensoriale di rango (m, n) sotto la trasformazione di Poincaré $x' = \Lambda x + a$ si trasforma secondo la legge

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_m}{}_{\alpha_m}\,\widetilde{\Lambda}_{\nu_1}{}^{\beta_1}\cdots\widetilde{\Lambda}_{\nu_n}{}^{\beta_n}\,T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x), \tag{1.22}$$

dove la matrice $\widetilde{\Lambda}$ è stata definita in (1.3):

$$\widetilde{\Lambda} = \eta\Lambda\eta. \tag{1.23}$$

La (1.22) rappresenta una generalizzazione naturale delle (1.19). In particolare sotto traslazioni un campo tensoriale non cambia. La legge di trasformazione del *tensore* (1.21) si ottiene dalla (1.22) semplicemente omettendo la dipendenza dalla coordinata spazio-temporale. In seguito adotteremo la dicitura generica *tensore* sia per un campo tensoriale che per un tensore in quanto sarà chiaro dal contesto di che tipo di oggetto si tratta.

Una volta accettato che le osservabili fisiche di una teoria relativistica si devono raggruppare in tensori quadridimensionali, l'implementazione del postulato III) – la relatività einsteiniana – avviene in analogia con la Meccanica Newtoniana. Così come le leggi di quest'ultima, eguagliando vettori tridimensionali a vettori tridimensionali risultano automaticamente invarianti sotto rotazioni spaziali, così le leggi della fisica relativistica hanno automaticamente la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali se sono scritte nel formalismo quadritensoriale, vale a dire se eguagliano *quadritensori a quadritensori.* Più precisamente, se $S^m{}_n$ e $T^m{}_n$ sono due tensori dello stesso rango schematicamente vale l'implicazione

$$S^m{}_n(x) = T^m{}_n(x) \text{ in } K \quad \Rightarrow \quad S'^m{}_n(x') = T'^m{}_n(x') \text{ in } K'. \tag{1.24}$$

L'equazione in K' si ottiene infatti da quella in K moltiplicando quest'ultima per un'opportuna serie di matrici Λ e $\widetilde{\Lambda}$. Una legge fisica scritta nella forma quadritensoriale (1.24) si dice *covariante a vista* poiché soddisfa il principio di relatività einsteiniana in modo "palese".

Il paradigma della covarianza a vista rappresenta il metodo più diretto ed efficace per implementare il terzo postulato in una qualsivoglia teoria relativistica. Difatti questo pardigma risulta equivalente al postulato stesso nella misura in cui non sono note leggi fisiche che abbiano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, ma non possono essere poste in forma covariante a vista. Dato il largo uso che ne faremo, nel prossimo pargrafo introduciamo gli elementi fondamentali del calcolo tensoriale.

1.3.1 Calcolo tensoriale

Di seguito presentiamo le principali operazioni che si possono eseguire sui tensori, vale a dire le operazioni che a partire da tensori danno luogo di nuovo a tensori. Nelle derivazioni il vincolo (1.9) giocherà un ruolo fondamentale. Moltiplicandolo per η e ricordando la (1.23) questo vincolo può essere posto anche nella forma equivalente

$$\Lambda^T \widetilde{\Lambda} = \mathbf{1} = \widetilde{\Lambda}\,\Lambda^T \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\mu \widetilde{\Lambda}_\alpha{}^\nu = \delta^\nu_\mu = \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\alpha \Lambda^\nu{}_\alpha. \tag{1.25}$$

<u>*Indici covarianti e controvarianti.*</u> Un tensore di rango (m, n) può essere trasformato in un tensore di rango $(m-k, n+k)$ alzando o abbassando k indici con la metrica di Minkowski. Il tensore nuovo viene indicato con lo stesso simbolo del tensore di partenza. Preso, ad esempio, un tensore $T^{\mu\nu}{}_\rho$ di rango $(2,1)$, per $k=2$ il nuovo tensore è di rango $(0,3)$ e si scrive

$$T_{\alpha\beta\rho} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}T^{\mu\nu}{}_\rho.$$

Di conseguenza un tensore di rango (m, n) è a tutti gli effetti equivalente a un tensore di rango $(m-k, n+k)$, motivo per cui come rango di un tensore si definisce spesso l'intero $m+n$. A titolo illustrativo dimostriamo che se $T^\mu{}_\nu$ è un tensore di rango $(1,1)$ allora $T_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha}T^\alpha{}_\nu$ è effettivamente un tensore di rango $(0,2)$ in quanto si trasforma come tale:

$$T'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}T'^\alpha{}_\nu = \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\widetilde{\Lambda}_\nu{}^\rho T^\beta{}_\rho = \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\widetilde{\Lambda}_\nu{}^\rho\eta^{\beta\gamma}T_{\gamma\rho} = (\eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta\eta^{\beta\gamma})\widetilde{\Lambda}_\nu{}^\rho T_{\gamma\rho} = \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\gamma\widetilde{\Lambda}_\nu{}^\rho T_{\gamma\rho},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà (1.23).

<u>*Prodotti tra tensori.*</u> Il prodotto tra un tensore $T^m{}_n$ di rango (m,n) e un tensore $S^k{}_l$ di rango (k,l) è un tensore di rango $(m+k, n+l)$. Questa proprietà discende direttamente dalla (1.22).

Prodotto scalare e contrazione degli indici. Dati due vettori controvariante e covariante T^μ e U_ν, *contraendo* i loro indici si può formare il *prodotto scalare* $T^\mu U_\mu$ che risulta essere uno *scalare*. Usando la (1.25) si trova infatti

$$T'^\mu U'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu T^\nu \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\rho U_\rho = (\Lambda^\mu{}_\nu \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\rho) T^\nu U_\rho = \delta^\rho_\nu T^\nu U_\rho = T^\nu U_\nu.$$

Indicheremo il *quadrato* di un vettore con $V^2 \equiv V^\mu V_\mu$. Più in generale, a partire da un tensore di rango (m, n), contraendo k indici covarianti con k indici controvarianti si ottiene un tensore di rango $(m-k, n-k)$. Partendo ad esempio da un tensore $T^{\mu\nu}{}_\rho$ di rango $(2,1)$, contraendo un indice si ottiene il vettore controvariante

$$V^\mu \equiv T^{\mu\nu}{}_\nu. \tag{1.26}$$

Usando la (1.25) si verifica infatti facilmente che vale $V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$.

Derivata di un campo tensoriale. La derivata parziale di un campo tensoriale di rango (m, n) è un campo tensoriale di rango $(m, n+1)$. Indicando le derivate parziali con il simbolo abbreviato

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

scriveremo la derivata di un campo tensoriale $T^m{}_n(x)$ come

$$\partial_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x).$$

Per fare vedere che questo oggetto costituisce un tensore di rango $(m, n+1)$ dobbiamo dimostrare che l'operatore ∂_μ costituisce un vettore *covariante*, vale a dire che si trasforma secondo

$$\partial'_\mu = \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu. \tag{1.27}$$

Dalle (1.2), (1.25) troviamo infatti

$$\partial_\nu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \partial'_\alpha = \Lambda^\alpha{}_\nu \, \partial'_\alpha \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu = \widetilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \Lambda^\alpha{}_\nu \, \partial'_\alpha = \delta^\alpha_\mu \partial'_\alpha = \partial'_\mu.$$

Tensori invarianti. Un tensore $T^m{}_n$ si dice *invariante* se per ogni $\Lambda \in O(1,3)$ vale

$$T'^m{}_n = T^m{}_n.$$

Il gruppo di Lorentz ammette i tensori invarianti *fondamentali*

$$\eta^{\alpha\beta}, \qquad \eta_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

dove $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ denota il *tensore di Levi-Civita*, antisimmetrico nello scambio di qualsiasi coppia di indici:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ è una permutazione pari di } 0,1,2,3, \\ -1, & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ è una permutazione dispari di } 0,1,2,3, \\ 0, & \text{se almeno due indici sono uguali.} \end{cases} \tag{1.28}$$

L'invarianza della metrica di Minkowski discende direttamente dal vincolo (1.9), ovvero dalla (1.10):

$$\eta'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, \eta^{\mu\nu} = \left(\Lambda \eta \Lambda^T\right)^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}.$$

L'invarianza del tensore di Levi-Civita discende invece dall'*identità del determinante*

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\rho \Lambda^\delta{}_\sigma \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = det\Lambda \cdot \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{1.29}$$

valida per un'arbitraria matrice Λ 4×4. Visto che in generale $det\Lambda = \pm1$, si veda la (1.12), strettamente parlando il tensore di Levi-Civita è invariante solamente sotto trasformazioni di Lorentz per cui $det\Lambda = +1$, si veda il paragrafo 1.4.3. Questo tensore soddisfa inoltre le identità algebriche

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4!\, \delta^\mu_{[\alpha}\, \delta^\nu_\beta\, \delta^\rho_\gamma\, \delta^\sigma_{\delta]}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -3!\, \delta^\mu_{[\alpha}\, \delta^\nu_\beta\, \delta^\rho_{\gamma]}, \tag{1.30}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2!2!\, \delta^\mu_{[\alpha}\, \delta^\nu_{\beta]}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -3!\, \delta^\mu_\alpha, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \tag{1.31}$$

La forma di un *generico* tensore invariante è fortemente vincolata dal seguente teorema, che si dimostra nell'ambito della *teoria dei gruppi*.

<u>*Teorema:*</u> Un generico tensore $T^m{}_n$ invariante sotto il gruppo di Lorentz è necessariamente una combinazione algebrica dei tensori invarianti $\eta^{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. $\Box$

Illustriamo il teorema con qualche esempio.

a) Non esistono tensori invarianti di rango totale $m+n$ *dispari*. Infatti, essendo la metrica di Minkowski e il tensore di Levi-Civita tensori di rango pari, qualsiasi loro combinazione algebrica è un tensore di rango pari. In particolare non esistono né vettori né tensori di rango totale tre invarianti.

b) Un tensore invariante $T^{\mu\nu}$ di rango $(2,0)$ è necessariamente della forma $T^{\mu\nu} = a\,\eta^{\mu\nu}$, dove a è una costante. Infatti $\eta^{\mu\nu}$ è l'unica combinazione algebrica di rango $(2,0)$ che si può formare con $\eta^{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Analogamente un tensore invariante $T^\mu{}_\nu$ è necessariamente della forma $T^\mu{}_\nu = a\delta^\mu_\nu$. Si noti che vale $\delta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}$.

c) La forma generale di un tensore invariante $T^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = a_1\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + a_2\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} + a_3\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + a_4\eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma},$$

dove $a_1, \cdots, a_4$ sono costanti. Se in più è noto, ad esempio, che $T^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è antisimmetrico in α e β, allora deve essere $a_2 = 0$ e $a_4 = -a_3$. Se invece è noto che $T^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è simmetrico in α e β, allora deve valere $a_1 = 0$ e $a_4 = a_3$.

<u>*Simmetrie.*</u> Un tensore di rango $(2,0)$ si dice simmetrico se $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ e si dice antisimmetrico se $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, proprietà che vengono preservate dal gruppo di Lorentz. La contrazione doppia del prodotto tra un tensore simmetrico e uno antisimmetrico è nulla:

$$A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 0. \tag{1.32}$$

Infatti

$$A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}S_{\nu\mu} = -A^{\mu\nu}S_{\mu\nu},$$

da cui segue la (1.32). Si definiscono *parte simmetrica* e *parte antisimmetrica* di un generico tensore di rango $(2,0)$ $T^{\mu\nu}$ i tensori

$$T^{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}\,(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}), \qquad T^{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}\,(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}),$$

il primo essendo un tensore simmetrico e il secondo un tensore antisimmetrico. Vale la decomposizione

$$T^{\mu\nu} = T^{(\mu\nu)} + T^{[\mu\nu]}.$$

Per la contrazione doppia tra un generico tensore $T^{\mu\nu}$ e un tensore simmetrico o antisimmetrico valgono le identità

$$T^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = T^{\nu\mu}S_{\mu\nu} = T^{(\mu\nu)}S_{\mu\nu}, \qquad T^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}A_{\mu\nu} = T^{[\mu\nu]}A_{\mu\nu}, \tag{1.33}$$

le dimostrazioni essendo lasciate per esercizio.

Tensori completamente (anti)simmetrici. Un tensore di rango $(n, 0)$ $A^{\mu_1\cdots\mu_n}$ si dice completamente (anti)simmetrico se è (anti)simmetrico nello scambio di qualsiasi coppia di indici. Queste proprietà vengono preservate dal gruppo di Lorentz. Un esempio importante è il tensore di Levi-Civita, che è un tensore di rango $(4, 0)$ completamente antisimmetrico. Come generalizzazione della (1.32) si ha che la contrazione doppia tra un tensore completamente simmetrico (antisimmetrico) di rango $(n, 0)$ e un tensore di rango $(0, 2)$ antisimmetrico (simmetrico) è nulla. Si definisce *parte completamente antisimmetrica* di un tensore $T^{\mu_1\cdots\mu_n}$ di rango $(n, 0)$ il tensore dello stesso rango

$$T^{[\mu_1\cdots\mu_n]} \equiv \frac{1}{n!}\left(T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} - T^{\mu_2\mu_1\cdots\mu_n} + \cdots\right),$$

dove nella sommatoria compaiono $n!$ termini corrispondenti alle $n!$ permutazioni degli indici, ciascun termine con il segno $(-)^p$ dove p è l'ordine della permutazione. Per costruzione $T^{[\mu_1\cdots\mu_n]}$ è un tensore completamente antisimmetrico ed è nullo se $T^{\mu_1\cdots\mu_n}$ è simmetrico anche in una sola coppia di indici. Se $A^{\mu_1\cdots\mu_n}$ è un tensore completamente antisimmetrico e $T^{\mu_1\cdots\mu_n}$ è un tensore qualsiasi vale

$$T^{\mu_1\cdots\mu_n}A_{\mu_1\cdots\mu_n} = T^{[\mu_1\cdots\mu_n]}A_{\mu_1\cdots\mu_n}, \tag{1.34}$$

identità che generalizza la seconda formula in (1.33). Proprietà speculari valgono per la *parte completamente simmetrica* di un tensore di rango $(n, 0)$:

$$T^{(\mu_1\cdots\mu_n)} \equiv \frac{1}{n!}(T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} + T^{\mu_2\mu_1\cdots\mu_n} + \cdots).$$

1.4 Struttura del gruppo di Lorentz

In questa sezione analizziamo la struttura del gruppo di Lorentz che, ricordiamo, è formato da tutte le matrici Λ soddisfacenti il vincolo (1.9). Da una parte vogliamo trovare una parametrizzazione esplicita per una generica matrice Λ soggetta a questo vincolo e dall'altra vogliamo individuare le operazioni fisiche, colleganti i due sistemi di riferimento coinvolti, associate a ciascuna Λ – questione lasciata aperta nel paragrafo 1.2.2. Come vedremo, a questo scopo sarà particolarmente utile eseguire un'analisi dettagliata delle trasformazioni di Lorentz prossime all'identità.

1.4.1 Il gruppo di Lorentz proprio $SO(1,3)_c$

Incominciamo osservando che il vincolo (1.9) implica le condizioni

$$|det\Lambda| = 1 \quad \text{e} \quad |\Lambda^0{}_0| \geq 1.$$

La prima condizione è stata derivata in precedenza, si veda la (1.12), e la seconda si deriva ponendo nella (1.9) $\alpha = \beta = 0$:

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + |\vec{L}|^2, \quad \text{dove} \quad L^i \equiv \Lambda^i{}_0. \tag{1.35}$$

Ne segue che $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$. Si ha dunque $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ oppure $\Lambda^0{}_0 \leq -1$, e $det\Lambda = 1$ oppure $\det \Lambda = -1$. Il gruppo di Lorentz si scinde pertanto in quattro sottoinsiemi disgiunti tra di loro:

$$O(1,3) = SO(1,3)_c \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \tag{1.36}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} SO(1,3)_c &= \{\Lambda \in O(1,3)/det\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\}, && (1.37)\\ \Sigma_1 &= \{\Lambda \in O(1,3)/det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\}, && (1.38)\\ \Sigma_2 &= \{\Lambda \in O(1,3)/det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\}, && (1.39)\\ \Sigma_3 &= \{\Lambda \in O(1,3)/det\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\}. && (1.40) \end{aligned}$$

Di questi quattro sottoinsiemi solo $SO(1,3)_c$ costituisce un sotto*gruppo* di $O(1,3)$, che viene chiamato *gruppo di Lorentz proprio*. Il simbolo "S" in generale si riferisce al fatto che il determinante delle matrici vale $+1$ e il pedice "c" segnala che il gruppo di Lorentz proprio risulta *connesso* con continuità alla matrice identità, al contrario di $O(1,3)$. Nel paragrafo 1.4.3 vedremo che ciascun sottoinsieme Σ_i $(i = 1,2,3)$ può essere ottenuto moltiplicando tutti gli elementi di $SO(1,3)_c$ per una matrice fissata $\Lambda_i \in \Sigma_i$. Di seguito ci limiteremo dunque ad anlizzare il gruppo di Lorentz proprio.

Conosciamo già due classi importanti di elementi di $SO(1,3)_c$. La prima è costituita dalle *rotazioni spaziali*, corrispondenti alle matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$ con elementi

$$\Lambda^0{}_0 = 1, \quad \Lambda^i{}_j = \mathbf{R}^i{}_j, \quad \Lambda^0{}_i = 0 = \Lambda^i{}_0, \quad \text{dove} \quad \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}, \quad det\mathbf{R} = 1,$$

ovvero $\mathbf{R} \in SO(3)$. Si verifica infatti immediatamente che le matrici Λ così definite soddisfano la (1.9). Ricordiamo che una generica rotazione spaziale dipende da tre parametri indipendenti, che possono essere identificati, ad esempio, con i tre angoli di Eulero. Una seconda classe importante di elementi di $SO(1,3)_c$ è costituita dalle *trasformazioni di Lorentz speciali*, corrispondenti al moto rettilineo uniforme di un sistema di riferimento rispetto a un altro. Se il moto relativo avviene lungo l'asse x con velocità v le coordinate dei due sistemi di riferimento sono infatti legate dalle note trasformazioni

$$t' = \gamma(t - vx), \qquad x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.41}$$

corrispondenti alla matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Di nuovo si verifica facilmente che vale $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$. In generale possiamo eseguire una trasformazione di Lorentz speciale con velocità $\vec{v}$ arbitraria e la matrice Λ corrispondente dipende allora da tre parametri indipendenti, vale a dire dalle tre componenti della velocità. Le operazioni descritte – rotazioni spaziali e trasformazioni di Lorentz speciali – coinvolgono quindi complessivamente 6 parametri e ci aspettiamo pertanto che i 16 elementi di una generica matrice $\Lambda \in SO(1,3)_c$ possano esprimersi in termini di 6 parametri indipendenti. In altre parole, il *gruppo di Lie* $SO(1,3)_c$ dovrebbe avere dimensione 6. Per verificare la correttezza di questa previsione riscriviamo la (1.9) nella forma

$$H \equiv \Lambda^T\eta\Lambda - \eta = 0, \tag{1.43}$$

che equivale a un sistema di 16 equazioni nelle 16 incognite $\Lambda^\mu{}_\nu$. Tuttavia per costruzione H è una matrice 4×4 *simmetrica* e di conseguenza solo 10 di queste equazioni sono linearmente indipendenti. La generica soluzione Λ del sistema (1.43) si esprime pertanto in termini di $16 - 10 = 6$ parametri indipendenti.

1.4.2 Trasformazioni di Lorentz proprie infinitesime e finite

Per individuare una possibile scelta di questi 6 parametri consideriamo una generica trasformazione di Lorentz prossima all'identità

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\nu, \qquad |\Omega^\mu{}_\nu| \ll 1, \quad \forall\, \mu, \forall\, \nu.$$

Imponendo la (1.43) e considerando solo i termini lineari in $\Omega^\mu{}_\nu$ otteniamo

$$(\delta^\alpha{}_\mu + \Omega^\alpha{}_\mu)\, \eta_{\alpha\beta}\, (\delta^\beta{}_\nu + \Omega^\beta{}_\nu) - \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\nu\alpha}\Omega^\alpha{}_\mu + \eta_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu = 0. \tag{1.44}$$

Definendo

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\beta}\Omega^\beta{}_\nu \qquad \leftrightarrow \qquad \Omega^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}, \tag{1.45}$$

il vincolo (1.44) si muta in

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{1.46}$$

La matrice $\omega_{\mu\nu}$ deve dunque essere antisimmetrica e come tale ha sei elementi indipendenti. Concludiamo che la generica trasformazione di Lorentz infinitesima dipende da sei parametri liberi, potendo essere scritta come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}. \tag{1.47}$$

A questo punto siamo anche in grado di dare l'espressione di un generico elemento Λ *finito* di $SO(1,3)_c$. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema: In notazione matriciale un generico elemento Λ di $SO(1,3)_c$ può essere scritto come

$$\Lambda = e^{\,\Omega}, \tag{1.48}$$

dove la matrice Ω soddisfa la (1.44), ovvero la matrice $\omega \equiv \eta\, \Omega$ è antisimmetrica. □

Per dimostrare che le matrici (1.48) appartengono al gruppo di Lorentz proprio occorre innanzitutto dimostrare che soddisfano il vincolo (1.9). Per fare questo conviene riscrivere la (1.44) in notazione matriciale

$$\eta\Omega = -\Omega^T\eta \quad \leftrightarrow \quad \Omega^T = -\eta\Omega\eta$$

e sfruttare l'identità (si ricordi che $\eta^2 = 1$)

$$e^{-\eta\,\Omega\,\eta} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-)^N}{N!}\,(\eta\,\Omega\,\eta)^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-)^N}{N!}\,\eta\,\Omega^N\eta = \eta\left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-)^N}{N!}\,\Omega^N\right)\eta = \eta\, e^{-\,\Omega}\,\eta.$$

Si ha allora

$$\Lambda^T\eta\,\Lambda = e^{\,\Omega^T}\eta\, e^{\,\Omega} = e^{-\eta\,\Omega\,\eta}\,\eta\, e^{\,\Omega} = \eta\, e^{-\,\Omega}\,\eta\,\eta\, e^{\,\Omega} = \eta, \quad c.v.d.$$

Le matrici Λ in (1.48), pur dipendendo da sei parametri indipendenti, parametrizzano solo $SO(1,3)_c$ e non il gruppo di Lorentz completo. Infatti, visto che l'esponenziale di una matrice è una funzione continua dei suoi elementi, l'insieme delle matrici $\Lambda = e^{\,\Omega}$ è connesso con continuità alla matrice identità e pertanto per queste matrici vale $det\Lambda = 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

Per concludere analizziamo il significato dei sei parametri $\omega_{\mu\nu}$. A ciascuno di questi parametri dovrebbe, infatti, corrispondere una delle sei operazioni fisiche, richiamate nel paragrafo precedente, che collegano un sistema di riferimento inerziale a un altro. Per fare questa analisi consideriamo di nuovo una generica trasformazione di Lorentz infinitesima da K a K'. Grazie alla (1.46) in notazione tridimensionale possiamo porre in tutta generalità

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= 0, && (1.49) \\ \omega_{i0} &= V^i = -\omega_{0i}, && (1.50) \\ \omega_{ij} &= \varphi\,\varepsilon^{ijk}u^k, \quad |\vec{u}| = 1. && (1.51) \end{aligned}$$

Come ora vedremo il vettore $\vec{V}$ rappresenta la velocità infinitesima di K' rispetto a K e gli assi di K' risultano ruotati rispetto a quelli di K di un angolo φ attorno al versore $\vec{u}$. Per verificare che queste siano le corrette interpretazioni di $\vec{V}$, $\vec{u}$ e φ, esplicitiamo le trasformazioni infinitesime (1.47)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \eta^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}x^\nu.$$

In notazione tridimensionale otteniamo

$$\begin{aligned} t' &= t + \eta^{00}\omega_{0i}\,x^i = t - \vec{V}\cdot\vec{x}, && (1.52) \\ x'^i &= x^i + \eta^{ij}(\omega_{j\,0}t + \omega_{j\,k}x^k) = x^i - V^i t + \varphi\,(\vec{u}\times\vec{x})^i. && (1.53) \end{aligned}$$

Per $\vec{V} = 0$ queste trasformazioni corrispondono in effetti a una rotazione spaziale infinitesima di un angolo φ attorno a $\vec{u}$, mentre per $\varphi = 0$ si ottiene una trasformazione di Lorentz speciale infinitesima con velocità relativa $\vec{V}$, si vedano le (1.41). Nelle equazioni (1.52) e (1.53) i fattori $1/\sqrt{1-V^2}$ sono assenti poiché tali equazioni sono valide solo al primo ordine in $\omega_{\mu\nu}$, e quindi in $\vec{V}$.

Trasformazioni di Lorentz finite. Per concludere mostriamo in che modo la trasformazione di Lorentz propria *finita* (1.42) può essere ottenuta dalla formula generale (1.48). Visto che la (1.42) è una trasformazione speciale lungo l'asse x, nella parametrizzazione generale (1.49)–(1.51) dobbiamo scegliere $\varphi = 0$ e $V^i = (V(v), 0, 0)$, dove $\vec{v} = (v, 0, 0)$ è la velocità *finita* di K' rispetto a K. Evidentemente dovrà essere

$$V(v) = v + o(v^2).$$

Le componenti non nulle di $\omega_{\mu\nu}$ sono allora

$$\omega_{10} = V(v) = -\omega_{01},$$

sicché dalla (1.45) si ottengono gli elementi non nulli di Ω

$$\Omega^0{}_1 = -V(v) = \Omega^1{}_0. \tag{1.54}$$

Il calcolo di $e^{\,\Omega}$ può essere eseguito agevolmente sviluppando l'esponenziale in serie di Taylor, si veda il problema 1.7, e si ottiene

$$e^{\,\Omega} = \begin{pmatrix} \cosh V(v) & -\mathrm{senh}\,V(v) & 0 & 0 \\ -\mathrm{senh}\,V(v) & \cosh V(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.55}$$

Questa matrice uguaglia la matrice (1.42) se si pone $\operatorname{tgh} V(v) = v/c$, ovvero

$$V(v) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{c}\right),$$

dove abbiamo ripristinato la velocità della luce. Vista la forma della matrice (1.55) una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse x con velocità v può essere interpretata come una rotazione *iperbolica* nel piano (t, x), di un "angolo" $\operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{c}\right)$.

1.4.3 Parità, inversione temporale e pseudotensori

Ci restano da analizzare i tre sottoinsiemi Σ_i del gruppo di Lorentz, introdotti nelle (1.37)–(1.40). Come abbiamo anticipato, questi sottoinsiemi si possono ottenere moltiplicando tutti gli elementi di $SO(1,3)_c$ per una matrice $\Lambda_i \in \Sigma_i$ fissata. Una scelta conveniente è, si veda il problem 1.10,

$$\Lambda_1 = \mathcal{P}, \qquad \Lambda_2 = \mathcal{T}, \qquad \Lambda_3 = \mathcal{P}\mathcal{T} = -\mathbf{1}, \tag{1.56}$$

dove $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ è la matrice associata all'operazione di *parità*, con elementi

$$\mathcal{P}^0{}_0 = 1, \quad \mathcal{P}^i{}_j = -\delta^i{}_j, \quad \mathcal{P}^0{}_i = 0 = \mathcal{P}^i{}_0, \tag{1.57}$$

e $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ quella associata all'operazione di *inversione temporale*, con elementi

$$\mathcal{T}^0{}_0 = -1, \quad \mathcal{T}^i{}_j = \delta^i{}_j, \quad \mathcal{T}^0{}_i = 0 = \mathcal{T}^i{}_0. \tag{1.58}$$

Visto che $\Lambda_3 = \Lambda_1\Lambda_2$ gli elementi di Σ_3 si possono ottenere moltiplicando quelli di Σ_1 per Λ_2. È quindi sufficiente analizzare il significato delle trasformazioni di parità e di inversione temporale. A volte ci si riferisce a queste particolari trasformazioni del gruppo di Lorentz come "simmetrie discrete".

Parità. La trasformazione di parità $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu$ riflette tutti e tre gli assi cartesiani e lascia il tempo invariato: $t' = t$, $x'^i = -x^i$[1]. Sotto parità la metrica di Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ resta ovviamente invariata, semplicemente perché $\mathcal{P} \in O(1,3)$. Al contrario, in virtù della (1.29) e visto che $det\mathcal{P} = -1$, sotto parità il tensore di Levi-Civita cambia di segno:

$$\mathcal{P}^\alpha{}_\mu \mathcal{P}^\beta{}_\nu \mathcal{P}^\gamma{}_\rho \mathcal{P}^\delta{}_\sigma\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.59}$$

Corrispondentemente il "tensore" di Levi-Civita costituisce uno *pseudotensore*. In generale si chiama *pseudotensore* (sotto parità) un tensore che sotto $SO(1,3)_c$ si trasforma come nella (1.22), mentre sotto parità si trasforma come nella (1.22) con un segno "$-$" aggiuntivo:

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(\mathcal{P}x) = -\mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_m}{}_{\alpha_m}\,\widetilde{\mathcal{P}}_{\nu_1}{}^{\beta_1}\cdots\widetilde{\mathcal{P}}_{\nu_n}{}^{\beta_n}\,T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x). \tag{1.60}$$

Abbiamo posto $\widetilde{\mathcal{P}} = \eta\mathcal{P}\eta$, si veda la (1.3). Si noti che il prodotto tra due pseudotensori è di nuovo un tensore. A partire dallo pseudotensore (invariante) di Levi-Civita si possono

[1] Una trasformazione che riflette *due* assi, diciamo gli assi x e y, corrisponde a una rotazione di 180^o attorno all'asse z e appartiene dunque a $SO(1,3)_c$. La riflessione di un solo asse è invece un'operazione che appartiene a Σ_1 e può essere pensata come composta da $\mathcal{P}$ e da una rotazione di 180^o attorno allo stesso asse, operazione che appartiene a $SO(1,3)_c$.

costruire altri pseudotensori. Ad esempio, se $F^{\alpha\beta}$ è un tensore $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$ è uno pseudotensore ed $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$ è uno pseudoscalare. Dato che sotto parità $F^{\mu\nu}$ si trasforma secondo $F'^{\alpha\beta} = \mathcal{P}^\alpha{}_\mu \mathcal{P}^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}$ valgono infatti le leggi di trasformazione

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta})' &\equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F'_{\gamma\delta} = -\mathcal{P}^\alpha{}_\rho \mathcal{P}^\beta{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \\ (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta})' &\equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F'_{\alpha\beta}F'_{\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}, \end{aligned} \tag{1.61}$$

dove abbiamo omesso gli argomenti spazio-temporali.

È evidente che sono invarianti sotto il gruppo di Lorentz completo $O(1,3)$ non solo le leggi fisiche che uguagliano tensori a tensori ma anche le leggi che eguagliano pseudotensori a pseudotensori, mentre leggi che uguagliano un tensore a uno pseudotensore violano la parità e sono invarianti solo sotto il gruppo di Lorentz proprio $SO(1,3)_c$. Sorge allora la domanda se le leggi della fisica debbano essere invarianti sotto il gruppo di Lorentz completo o solo sotto il gruppo di Lorentz proprio. Ebbene, mentre le interazioni elettromagnetiche, gravitazionali e forti rispettano effettivamente il gruppo di Lorentz completo, *le interazioni deboli violano l'invarianza sotto parità*, come è stato scoperto dalla fisica sperimentale Chien-Shiung Wu nel 1957 analizzando le caratteristiche del *decadimento beta*.

Inversione temporale. La trasformazione di inversione temporale $x'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu x^\nu$ riflette l'asse del tempo e lascia le coordinate spaziali invariate: $t' = -t$, $x'^i = x^i$. Per questa operazione valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per la parità. In particolare, visto che anche $det\mathcal{T} = -1$, sotto inversione temporale il tensore di Levi-Civita cambia di segno

$$\mathcal{T}^\alpha{}_\mu \mathcal{T}^\beta{}_\nu \mathcal{T}^\gamma{}_\rho \mathcal{T}^\delta{}_\sigma \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Come nel caso della parità si introducono gli pseudotensori sotto inversione temporale, che si trasformano in modo analogo alla (1.60). Leggi della fisica che uguagliano un tensore a uno pseudotensore violerebbero quindi l'invarianza per inversione temporale. Dagli esperimenti condotti nel 1964 da Cronin e Fitch sui decadimenti dei mesoni K neutri sappiamo, in effetti, che anche questa simmetria discreta viene violata dalle interazioni deboli, mentre viene preservata dalle altre interazioni fondamentali. Senza entrare nei dettagli di questi esperimenti osserviamo che la violazione in natura dell'invarianza per inversione temporale ha importanti risvolti fisici – il più eclatante forse essendo che questa violazione risulta indispensabile per spiegare l'*asimmetria* tra materia e antimateria del nostro universo.

Per prevenire una possibile confusione anticipiamo che la violazione *spontanea* dell'invarianza per inversione temporale in Elettrodinamica che riscontreremo nel paragrafo 6.2.3 non riguarda affatto le *equazioni* fondamentali dell'Elettrodinamica – che sono invarianti – ma le loro *soluzioni*.

1.5 Problemi

1.1 Usando le tecniche della sezione 1.4 si esprima una generica matrice $\mathbf{R}$ appartenente al gruppo

$$O(3) \equiv \{\mathbf{R},\ \text{matrici reali } 3\times 3\, /\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}\}$$

in termini di tre parametri indipendenti.

1.2 Si dimostri che il tensore V^μ in (1.26) costituisce un *vettore* controvariante.

1.3 Si verifichino le identità (1.30), (1.31). [Sugg.: si incominci dall'ultima identità in (1.31).]

1.4 Si dimostrino le relazioni (1.33).

1.5 Si dimostri che la matrice Λ in (1.42) soddisfa il vincolo (1.9).

1.6 Dato un generico tensore $T^{\mu\nu\rho}$ di rango $(3,0)$ si dimostri che vale

$$T^{[\mu\nu\rho]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\mu\nu\rho} = 0.$$

1.7 Si consideri la matrice $\Omega^\mu{}_\nu$ corrispondente alle (1.54)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -V(v) & 0 & 0 \\ -V(v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che l'esponenziale e^{Ω} equivale alla (1.55). [Sugg.: si sviluppi l'esponenziale in serie di Taylor e si noti che la matrice

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa per ogni intero n le identità algebriche

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{2n+1} = M.]$$

1.8 a) Si dimostri che sotto una rotazione il tensore d'inerzia (1.18) si trasforma come indicato in (1.19). [Sugg.: la relazione $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}$ è equivalente a $\mathbf{R}^i{}_m \mathbf{R}^j{}_m = \delta^{ij}$.]
b) Si dimostri che sotto una rotazione il momento angolare (1.17) di un corpo rigido si trasforma come $\mathcal{L}'^i = \mathbf{R}^i{}_j\, \mathcal{L}^j$.
c) Si dimostri che sotto una rotazione il momento angolare di una particella $L^i = m\,\varepsilon^{ijk} r^j\, v^k$ si trasforma secondo $L'^i = \mathbf{R}^i{}_j\, L^j$. [Sugg.: si sfrutti l'identità del determinante

$$\varepsilon^{jnl}\, \mathbf{R}^i{}_j\, \mathbf{R}^m{}_n\, \mathbf{R}^k{}_l = (det\mathbf{R}) \cdot \varepsilon^{imk},$$

valida per una matrice $\mathbf{R}$ arbitraria.]
d) Si verifichi che il teorema del momento angolare (1.15) sotto una rotazione si muta nella prima equazione di (1.20).

1.9 Si verifichi che l'insieme di matrici $O(1,3)$ definito in (1.11) costituisce un gruppo dimostrando in particolare che
a) se $\Lambda \in O(1,3)$, anche $\Lambda^{-1} \in O(1,3)$,
b) se $\Lambda_1 \in O(1,3)$ e $\Lambda_2 \in O(1,3)$, anche $\Lambda_1\Lambda_2 \in O(1,3)$.

1.10 Si dimostri che un generico elemento Λ del sottoinsieme Σ_i $(i = 1,2,3)$ del gruppo di Lorentz – si vedano le (1.38)–(1.40) – può essere scritto come $\Lambda = \Lambda_i\Lambda_0$, dove le matrici Λ_i

sono date in (1.56) e Λ_0 è un opportuno elemento di $SO(1,3)_c$, procedendo come segue.
a) Si osservi che, prese due matrici B_1 e B_2 soddisfacenti $det B_r = 1$ $(r = 1,2)$, si ha $det(B_1 B_2) = 1$. Proprietà analoghe valgono se $det B_r = \pm 1$.
b) Si dimostri che, prese due matrici B_1 e B_2 appartenenti a $O(1,3)$ e soddisfacenti la disuguaglianza $(B_r)^0{}_0 \geq 1$ $(r = 1,2)$, la matrice prodotto $C = B_1 B_2$ soddisfa ancora la disuguaglianza $C^0{}_0 \geq 1$. Proprietà analoghe valgono se una delle due matrici, o tutte e due, soddisfano invece la disuguaglianza $(B_r)^0{}_0 \leq -1$. [Sugg.: si sfrutti la relazione generale (1.35).]
c) Per dimostrare l'asserto principale è sufficiente dimostrare che, preso un qualunque elemento $\Lambda \in \Sigma_i$, la matrice $\Lambda_i^{-1}\Lambda = \Lambda_i \Lambda$ appartiene a $SO(1,3)_c$.

2 Le equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica

In questo capitolo presentiamo le equazioni fondamentali che governano la dinamica di un sistema di particelle cariche in interazione con il campo elettromagnetico, ovvero le equazioni di Maxwell e di Lorentz, illustrandone il ruolo e analizzandone le caratteristiche generali. Per quanto detto nel capitolo precedente scriveremo queste equazioni in forma covariante a vista. Illustreremo la loro natura distribuzionale e deriveremo le leggi di conservazione da esse implicate. Una parte sostanziale del testo sarà poi dedicata a un'analisi approfondita delle soluzioni e delle conseguenze fisiche di queste equazioni. Cominciamo il capitolo con la descrizione della cinematica di una particella relativistica.

2.1 Cinematica di una particella relativistica

Linee di universo causali. In Meccanica Newtoniana la legge oraria di una particella corrisponde alla curva tridimensionale $\vec{y}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$[2]. In ambito relativistico per motivi di covarianza si introduce invece la traiettoria quadridimensionale γ della particella – detta anche *linea di universo* – che è descritta dalle quattro funzioni di un generico parametro reale λ

$$y^\mu(\lambda) = (y^0(\lambda), \vec{y}(\lambda)).$$

Supporremo che queste quattro funzioni siano di classe C^2. Perché una linea di universo sia fisicamente accettabile è necessario che essa sia *causale e diretta nel futuro.* Si dice che una linea di universo è causale e diretta nel futuro quando, definito il vettore tangente

$$V^\mu = \frac{dy^\mu}{d\lambda},$$

risultano soddisfatte le condizioni,
I) $V^2 \geq 0, \quad \forall\,\lambda$,
II) $V^0 > 0, \quad \forall\,\lambda$.
Se la condizione II) viene sostituita con la richiesta $V^0 < 0$, $\forall\lambda$, la linea di universo si dice invece *causale e diretta nel passato.* La condizione I) segue dal fatto che in una teoria relativistica una particella non può superare la velocità della luce, si veda la (2.1), mentre la condizione II) assicura che y^0 – il tempo – è una funzione monotona *crescente* di λ, proprietà il cui significato verrà chiarito tra breve. Da un punto di vista geometrico la condizione I) seleziona l'interno del *cono luce*, mentre l'aggiunta della condizione II) ne delimita la metà "in avanti", ovvero il *cono luce futuro.* D'ora in poi supporremo che la linea di universo percorsa da una qualsiasi particella sia causale e diretta nel futuro, ovvero che il vettore tangente V^μ appartenga per ogni λ all'interno del cono luce futuro. Dato che $y^0(\lambda)$ è una funzione monotona crescente di λ, questa funzione può essere invertita per determinare λ in funzione del tempo

$$y^0(\lambda) = t \quad \Rightarrow \quad \lambda(t).$$

La *legge oraria* tridimensionale si ottiene invece eliminando dalla traiettoria spaziale $\vec{y}(\lambda)$ il parametro λ in favore del tempo e per semplicità scriveremo

$$\vec{y}(\lambda(t)) \equiv \vec{y}(t).$$

[2] Di solito la legge oraria di una particella viene indicata con $\vec{x}(t)$. Noi preferiamo la notazione $\vec{y}(t)$ al posto di $\vec{x}(t)$ per evitare la confusione con il generico punto $x^\mu = (t, \vec{x})$ in cui si valuta il campo elettromagnetico.

In seguito denoteremo velocità e accelerazione tridimensionali come al solito con

$$\vec{v} = \frac{d\vec{y}}{dt}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Esplicitando la richiesta di causalità I) si ottiene allora la condizione

$$V^2 = \frac{dy^\mu}{d\lambda}\frac{dy_\mu}{d\lambda} = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \frac{dy^\mu}{dt}\frac{dy_\mu}{dt} = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 (1 - v^2) \geq 0, \tag{2.1}$$

ovvero la velocità massima permessa è la velocità della luce.

Invarianza per riparametrizzazione. Rispetto alla Meccanica Newtoniana sembrerebbe che la linea di universo relativistica introduca un quarto grado di libertà nella dinamica della particella – la funzione $y^0(\lambda)$. Questo grado di libertà risulta tuttavia *spurio*, ovvero inosservabile, in quanto riflette solo l'arbitrarietà della scelta del parametro. Due linee di universo $y_1^\mu(\lambda)$ e $y_2^\mu(\lambda)$ risultano infatti fisicamente equivalenti se sono collegabili attraverso una ridefinizione del parametro, vale a dire se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, invertibile e di classe C^2 insieme alla sua inversa, tale che

$$y_1^\mu(f(\lambda)) = y_2^\mu(\lambda).$$

Si dice che le due linee di universo sono collegate da una *riparametrizzazione*. È evidente che le leggi orarie associate a due linee di universo collegate da una riparametrizzazione sono identiche:

$$\vec{y}_1(t) = \vec{y}_2(t).$$

Per descrivere il moto di una particella saremo quindi autorizzati a usare le linee di universo al posto delle leggi orarie, purché le equazioni del moto risultino *invarianti per riparametrizzazione*. Si noti che la stessa legge oraria $\vec{y}(t)$ – una grandezza osservabile – è invariante per riparametrizzazione mentre le funzioni $\vec{y}(\lambda)$ e $y^0(\lambda)$ non lo sono.

Se tutte le leggi fisiche che scriveremo risulteranno invarianti per riparametrizzazione è lecito scegliere un parametro arbitrario. Una scelta che adotteremo di frequente è la componente $\mu = 0$ della traiettoria stessa, ovvero il tempo $\lambda = y^0 \equiv t$. In questo caso la linea di universo è parametrizzata da

$$y^\mu(t) = (t, \vec{y}(t)).$$

Un'altra scelta di estrema utilità è il cosiddetto *tempo proprio* s, che ha il pregio di essere simultaneamente invariante per trasformazioni di Lorentz e per riparametrizzazione. Formalmente esso è dato da

$$ds = \sqrt{dy^\mu\, dy_\mu}, \tag{2.2}$$

che costituisce una notazione abbreviata per l'espressione

$$s(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{dy^\mu}{d\lambda'}\frac{dy_\mu}{d\lambda'}}\, d\lambda' + s(0), \tag{2.3}$$

dove $s(0)$ è una costante arbitraria. Mentre l'invarianza di Lorentz di s è manifesta, la sua invarianza per riparametrizzazione è conseguenza del fatto che nella (2.3) i fattori $d\lambda'$ formalmente si cancellano. Si noti inoltre che grazie alla causalità della linea di universo –

condizione I) – il radicando in (2.3) è mai negativo. Il concetto di tempo proprio permette poi di definire la derivata invariante

$$\frac{d}{ds} \equiv \frac{1}{\sqrt{\frac{dy^\mu}{d\lambda}\frac{dy_\mu}{d\lambda}}}\frac{d}{d\lambda}. \tag{2.4}$$

Grazie all'invarianza per riparametrizzazione di s, nelle (2.2)–(2.4) possiamo usare come parametro il tempo ottenendo

$$ds = \sqrt{1-v^2}\,dt, \qquad s(t) = \int_0^t \sqrt{1-v^2(t')}\,dt' + s(0), \qquad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2(t)}}\frac{d}{dt}. \tag{2.5}$$

Quadrivelocità, quadriaccelerazione e quadrimomento sono definiti rispettivamente da

$$u^\mu = \frac{dy^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \qquad w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}, \qquad p^\mu = mu^\mu, \tag{2.6}$$

dove m è la massa della particella. Queste grandezze obbediscono alle identità

$$u^\mu u_\mu = 1, \qquad u^\mu w_\mu = 0, \qquad p^2 \equiv p^\mu p_\mu = m^2. \tag{2.7}$$

La prima è conseguenza diretta della (2.2) e la seconda si ottiene derivando la prima rispetto a s. Per l'energia ε e la quantità di moto $\vec{p}$ della particella si ottengono allora le note espressioni

$$\varepsilon \equiv p^0 = mu^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \vec{p} = m\vec{u} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \varepsilon = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}.$$

Osserviamo infine che per ogni fissato istante t_0 esiste sempre un sistema di riferimento inerziale K – chiamato *sistema a riposo istantaneo* – in cui la particella all'istante t_0 è a riposo. Si verifica facilmente che in K in questo istante si ha

$$u^\mu = (1,0,0,0), \qquad w^\mu = (0,\vec{a}).$$

2.2 Elettrodinamica di particelle puntiformi

Introduciamo ora il sistema fisico la cui dinamica è l'oggetto di studio primario di questo testo: *un sistema di N particelle cariche interagenti con il campo elettromagnetico.* Le variabili cinematiche indipendenti che lo descrivono sono le $4N$ funzioni $y_r^\mu(\lambda_r)$ che parametrizzano le N linee di universo γ_r percorse dalle particelle ($r = 1,\ldots,N$) e il *tensore di Maxwell* $F^{\mu\nu}(x)$ antisimmetrico,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu},$$

che descrive il campo elettromagnetico. Questo tensore è legato ai campi elettrico e magnetico $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dalle relazioni

$$F^{00} = 0, \tag{2.8}$$
$$F^{i0} = -F^{0i} = E^i, \tag{2.9}$$
$$F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k \quad \leftrightarrow \quad B^i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}F^{jk}. \tag{2.10}$$

Gli invarianti di Lorentz indipendenti che si possono formare con le componenti di $F^{\mu\nu}$ sono

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -8\,\vec{E}\cdot\vec{B}, \qquad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\,(B^2 - E^2), \tag{2.11}$$

la verifica essendo lasciata per esercizio. Per ciascuna particella possiamo poi definire le quantità cinematiche introdotte nella sezione precedente: il tempo proprio s_r, la quadrivelocità u_r^μ, la quadriaccelerazione w_r^μ e il quadrimomento $p_r^\mu = m_r u_r^\mu$, dove m_r è la massa della particella r-esima. Per il momento parametrizziamo ogni linea di universo γ_r con un parametro λ_r generico.

La quadricorrente. Se la particella r-esima possiede carica elettrica e_r la *quadricorrente* del sistema è definita da

$$j^\mu(x) = \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dy_r^\mu\, \delta^4(x - y_r) \equiv \sum_r e_r \int \frac{dy_r^\mu}{d\lambda_r}\, \delta^4(x - y_r(\lambda_r))\, d\lambda_r, \tag{2.12}$$

dove il simbolo $\delta^4(\,\cdot\,)$ indica la distribuzione-δ quadridimensionale, si veda il paragrafo 2.3.2. Le proprietà generali dell'espressione (2.12) verranno analizzate in dettaglio nel paragrafo 2.3.3. Qui anticipiamo che j^μ è un *quadrivettore*, che è *invariante per riparametrizzazione* e che è *conservato*, ovvero soddisfa l'*equazione di continuità*

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2.13}$$

Nel paragrafo 2.3.3 faremo inoltre vedere che le componenti spaziali e temporale del quadrivettore (2.12) possono essere scritte come

$$j^0(t,\vec{x}) = \sum_r e_r \delta^3(\vec{x} - \vec{y}_r(t)), \tag{2.14}$$

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_r e_r \vec{v}_r(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}_r(t)). \tag{2.15}$$

Date le note proprietà formali della distribuzione-δ tridimensionale, ovvero $\delta^3(\vec{x}) = 0$ per $\vec{x} \neq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{x})\, d^3x = 1$, si vede che $j^0 \equiv \rho$ rappresenta la densità di carica del sistema di particelle e che $\vec{j}$ rappresenta la consueta densità di corrente tridimensionale. Si noti che strettamente parlando la corrente (2.12) non può essere considerata come un *campo* vettoriale poiché le sue componenti, coinvolgendo la distribuzione-δ, non sono "funzioni" ma piuttosto elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, vale a dire *distribuzioni temperate*. j^μ rappresenta in realtà un *campo vettoriale a valori nelle distribuzioni*. Le conseguenze di questa circostanza verranno discusse in dettaglio in sezione 2.3, dove introdurremo gli elementi essenziali della teoria delle distribuzioni e analizzeremo a fondo la natura distribuzionale delle equazioni di Maxwell.

2.2.1 Le equazioni fondamentali

Presentiamo ora le equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica, in forma covariante a vista:

$$\frac{dp_r^\mu}{ds_r} = e_r F^{\mu\nu}(y_r) u_{r\nu}, \qquad r = (1, \cdots, N), \tag{2.16}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \tag{2.17}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.18}$$

Chiameremo queste equazioni rispettivamente *Equazione di Lorentz, Identità di Bianchi* ed *Equazione di Maxwell*. Lo scopo di queste equazioni è quello di determinare in modo univoco i campi $F^{\mu\nu}(x)$ e le linee di universo $y_r^\mu(\lambda_r)$, date certe condizioni iniziali, vale a dire di dare luogo a un ben definito *problema di Cauchy* in accordo con il determinismo newtoniano. Per le coordinate y_r^μ il problema di Cauchy verrà specificato nel prossimo paragrafo, mentre quello relativo al tensore di Maxwell verrà formulato nel paragrafo 5.1.3. Prima di procedere riscriviamo le equazioni fondamentali nella più consueta notazione tridimensionale:

$$\frac{d\vec{p}_r}{dt} = e_r\left(\vec{E} + \vec{v}_r \times \vec{B}\right), \qquad \frac{d\varepsilon_r}{dt} = e_r\,\vec{v}_r \cdot \vec{E}, \qquad (r = 1, \cdots, N), \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.20}$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \tag{2.21}$$

Di seguito verifichiamo che queste equazioni sono effettivamente equivalenti al sistema (2.16)–(2.18).

Equazione di Lorentz (2.16). Considerando una sola particella e ponendo nella (2.16) $\mu = i$ si ottiene

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dp^i}{dt} = eF^{i\nu}u_\nu = e\left(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j\right) = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}}\left(E^i + \varepsilon^{ijk}B^k v^j\right) \tag{2.22}$$

e segue la prima delle (2.19). Ponendo nella (2.16) $\mu = 0$ si ottiene invece

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d\varepsilon}{dt} = eF^{0\nu}u_\nu = eF^{0i}u_i = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}}\,E^i v^i \tag{2.23}$$

e segue la seconda delle (2.19).

Identità di Bianchi (2.17). Ponendo nella (2.17) $\mu = i$ si ottiene

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} &= \varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} = -\varepsilon^{ijk}\partial_0 F^{jk} + 2\,\varepsilon^{ijk}\partial_j F^{k0}\\ &= 2(\partial_0 B^i + \varepsilon^{ijk}\partial_j E^k) = 0,\end{aligned}$$

che è la prima delle (2.20). Ponendo nella (2.17) $\mu = 0$ si ottiene invece

$$\varepsilon^{0\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = \varepsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} = -2\partial_i B^i = 0,$$

che è la seconda delle (2.20).

Equazione di Maxwell (2.18). Ponendo nella (2.18) $\mu = i$ si ottiene

$$j^i = \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k,$$

che è la prima delle (2.21). Ponendo nella (2.18) invece $\mu = 0$ si ottiene

$$\rho = j^0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \partial_i E^i,$$

che è la seconda delle (2.21).