Capitolo 7

Estrazione del parametro di mescolamento

Le formule 1.16 descritte nel primo capitolo ci danno la probabilità per un B^0 di oscillare o non oscillare in un $\bar{B}^0$ in funzione del tempo proprio. Per fare il fit della frazione degli eventi con lo stesso segno in funzione di pseudo$-c\tau$ è necessario capire come questa formula si trasforma per tener conto di molteplici effetti tra cui il fatto che i B^0 sono due ed entrambi posso mescolare; il campione selezionato non ha solo $B^0_{d(s)}$ ma anche B_u e barioni; che la frazione di sequenziali dipende da pseudo$-c\tau$ e che la risoluzione sperimentale è finita.

7.1 Modello teorico per la frazione degli eventi con lo stesso segno

Per un fascio puro di B^0_i $(i = d, s)$ a $t = 0$ la densità di mesoni che decadono ad un tempo t dopo essersi trasformati in $\bar{B}^0_i$ rispetto alla densità totale sarebbe, seguendo le formule 1.16, semplicemente $1/2\,(1 - \cos\Delta mt)$. Sperimentalmente però non è possibile selezionare un campione così fatto. Nell'analisi di cui stiamo discutendo non conosciamo il sapore del B né nello stato iniziale né in quello finale, cerchiamo quindi di sfruttare le correlazioni di carica tra i due muoni. Questo genera delle ambiguità che devono essere descritte dalla funzione usata nel fit. Le formule finora citate assumono di avere una risoluzione infinita, che chiaramente non riflette la situazione sperimentale.

7.1.1 Effetti dovuti alla risoluzione

Fissiamo come punto di partenza le funzioni di mescolamento normalizzate a 1:

$$
\begin{aligned}
f^i_M(t) &= \frac{1}{2\tau\chi_i} e^{-t/\tau}\left(1 - \cos\left(\Delta mt\right)\right) \\
f^i_{NM}(t) &= \frac{1}{2\tau\left(1 - \chi_i\right)} e^{-t/\tau}\left(1 + \cos\left(\Delta mt\right)\right)
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

La funzione di risoluzione, come visto nella sezione 5.5 può essere scomposta in due termini: uno dovuto alla lunghezza di decadimento proiettata e l'altro al fattore cinematico. Indichiamo con P_d la ditribuzione del primo e con P_F la distribuzione del secondo. La distribuzione di $\Delta\lambda$, dove con λ ricordiamo si è indicata la pseudo$-c\tau$, quindi si può scrivere, ricordando la 5.6:

$$\frac{dP}{d\Delta\lambda}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, P_d(x)\, P_F(y)\, \delta\left(\bar{F}x + \lambda y - \Delta\lambda\right) \tag{7.2}$$

$\bar{F}$ è il valore medio della distribuzione $F = \frac{1}{\beta\gamma} \cdot F_{corr}$ ed è stato determinato nella sezione 5.5.

Poichè le distribuzioni di P_d e P_F sono approssimabili con somme di Gaussiane si può scrivere:

$$\begin{cases} P_d(x) = \sum \alpha_i G\left(\frac{x-\mu_{di}}{\sigma_{di}}\right), & \sum \alpha_i = 1 \\ P_F(y) = \sum \beta_j G\left(\frac{y-\mu_{Fj}}{\sigma_{Fj}}\right), & \sum \beta_j = 1 \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $G(\frac{x-\mu}{\sigma})$ la distribuzione Gaussiana di media μ e sigma σ. Sostituendo nell'equazione 7.2 e integrando rispetto ad x si ottiene

$$\frac{dP}{d\Delta\lambda}(\lambda) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\bar{F}}\, G\left(\frac{\lambda \cdot y - \Delta\lambda - \bar{F}\mu_{di}}{\bar{F}\sigma_{di}}\right) \cdot G\left(\frac{y-\mu_{Fj}}{\sigma_{Fj}}\right) \tag{7.3}$$

L' integrale che rimane è la convoluzione di due Gaussiane che dà come risultato una Gaussiana. Quindi la distribuzione di $\Delta\lambda$ è

$$\frac{dP}{d\Delta\lambda}(\lambda) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j G\left(\frac{\Delta\lambda - \mu_{ij}}{\sigma_{ij}}\right) \tag{7.4}$$

in cui le medie e le larghezze sono date

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \bar{F}\mu_{di} + c\tau\mu_{Fj} \\ \sigma_{ij}^2 = \bar{F}^2\sigma_{di}^2 + (\lambda)^2\sigma_{Fj}^2 \end{cases} \qquad \forall i,j \tag{7.5}$$

e i cui valori sono stati misurati sul Montecarlo e sono riportati nella sezione 5.5.

Per includere gli effetti della risoluzione nelle funzioni 7.1 bisogna fare la convoluzione di quest'ultime con una distribuzione Gaussiana. Il modo in cui questa convoluzione è stata fatta è stato ampiamente descritto in [69] e in [70] riportiamo qui solo i risultati:

$$\begin{aligned} f_M^i(t,\sigma) &= \frac{1}{2\chi_i}\left[E(t,\sigma) - \frac{C(t,\sigma)}{1+x_i^2}\right] \\ f_{NM}^i(t,\sigma) &= \frac{1}{2(1-\chi_i)}\left[E(t,\sigma) + \frac{C(t,\sigma)}{1+x_i^2}\right] \end{aligned} \tag{7.6}$$

in cui

$$E(t,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\tau}} \cdot e^{-\frac{(t-z)^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{2\tau} e^{\frac{\sigma^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right)\right]$$

è la convoluzione di un esponenziale negativo con una Gaussiana con la definizione di

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$$

e

$$C(t,\sigma) = \frac{1+x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau} \int_0^\infty e^{\frac{-z}{\tau}} \cdot e^{-\frac{(t-z)^2}{2\sigma^2}} \cos(\Delta m z)\, dz$$

è la convoluzione di un'esponenziale negativo con una Gaussiana con un coseno. Per i mesoni B_d^0 l'andamento delle funzioni f_M e f_{NM} è mostrato nelle figure 7.1 e 7.2 rispettivamente. Si nota chiaramente come al degradarsi della risoluzione i massimi e i minimi tendono ad appiattirsi fino quasi a scomparire per σ molto grandi. Nell'analisi che è stata effettuata non è possibile distinguere tra mesoni B_d^0 e B_s^0 e quindi le funzioni di mescolamento e di non-mescolamento devono essere mediate sulle due specie di B. Ridefiniamo quindi f_M e f_{NM} come segue

$$\begin{aligned} f_M(t,\sigma) &= [F_d \chi_d f_M^{(d)}(t,\sigma) + F_s \chi_s f_M^{(s)}(t,\sigma)]/\bar{\chi} \\ f_{NM}(t,\sigma) &= [(1-F_d-F_s)E(t,\sigma) + F_d(1-\chi_d) f_{NM}^{(d)}(t,\sigma) + \\ & \quad F_s(1-\chi_s) f_{NM}^{(s)}(t,\sigma)]/(1-\bar{\chi}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

in cui F_d è la frazione di B_d^0 e F_s quella di B_s^0.

7.1.2 Composizione del campione di B

Supponiamo di avere un campione di soli B, intendendo con ciò che vi sono $B^\pm$, $B_{d(s)}^0$ e barioni. Trascuriamo per il momento gli effetti dovuti al fondo che comunque è in piccola percentuale come visto nel capitolo 6. Assumiamo inoltre che ognuno dei due muoni dell'evento sia associato con un solo B, assunzione che risulta vera per come è stata fatta la ricostruzione della lunghezza di decadimento. Il problema è determinare la distribuzione in pseudo$-c\tau$ degli eventi in cui entrambi i muoni hanno lo stesso segno, che indichiamo con LS, e di quelli in cui i μ hanno segno opposto, OS. Indichiamo inoltre con "B ricostruito" il lato in cui il muone risulta associato con un vertice secondario e con "B identificato" il lato invece in cui il vertice non c'è. Il muone da entrambi i lati può provenire da B^0 che hanno subito mescolamento (M) o che non lo hanno subito (NM) ed entrambi posso essere μ primari (P) o secondari (S), cioè provenienti da un decadimento sequenziale. Ricordiamo che in quest'ultimo caso ($b \to c \to \mu$) il segno della carica del muone è opposto a quello che avrebbe se provenisse dal b. Per ciascun μ abbiamo 4 diverse possibilità; nella tabella 7.1.2 sono descritte le 4×4 possibilità totali che ci dicono per ogni configurazione di carica dei due muoni che tipo di distribuzione in pseudo$-c\tau$ deve essere usata.

Dobbiamo adesso determinare la frazione di ciascuna componente da uno dei due lati; assumendo di avere f_s sequenziali si avrà per esempio che la frazione di primari che hanno subito mescolamento sono $(1-f_s)\,\bar{\chi}$. Le frazioni per ciascuna componente sono riassumibili come segue

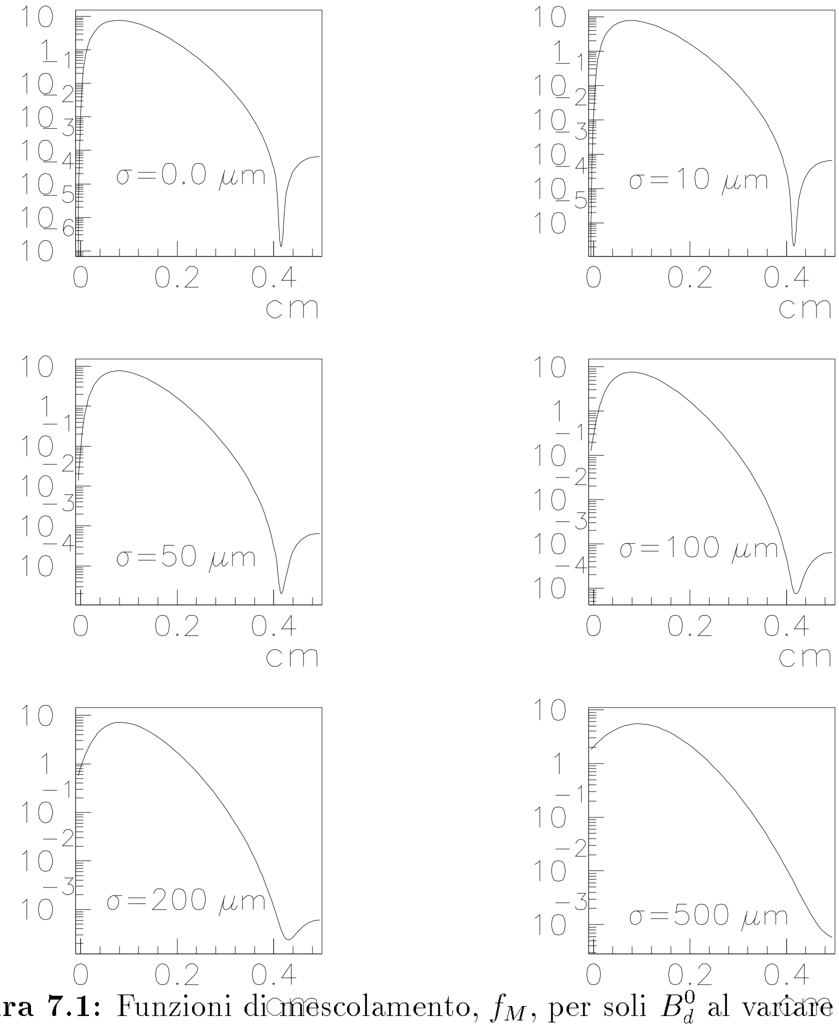

Figura 7.1: Funzioni di mescolamento, f_M, per soli B_d^0 al variare della σ.

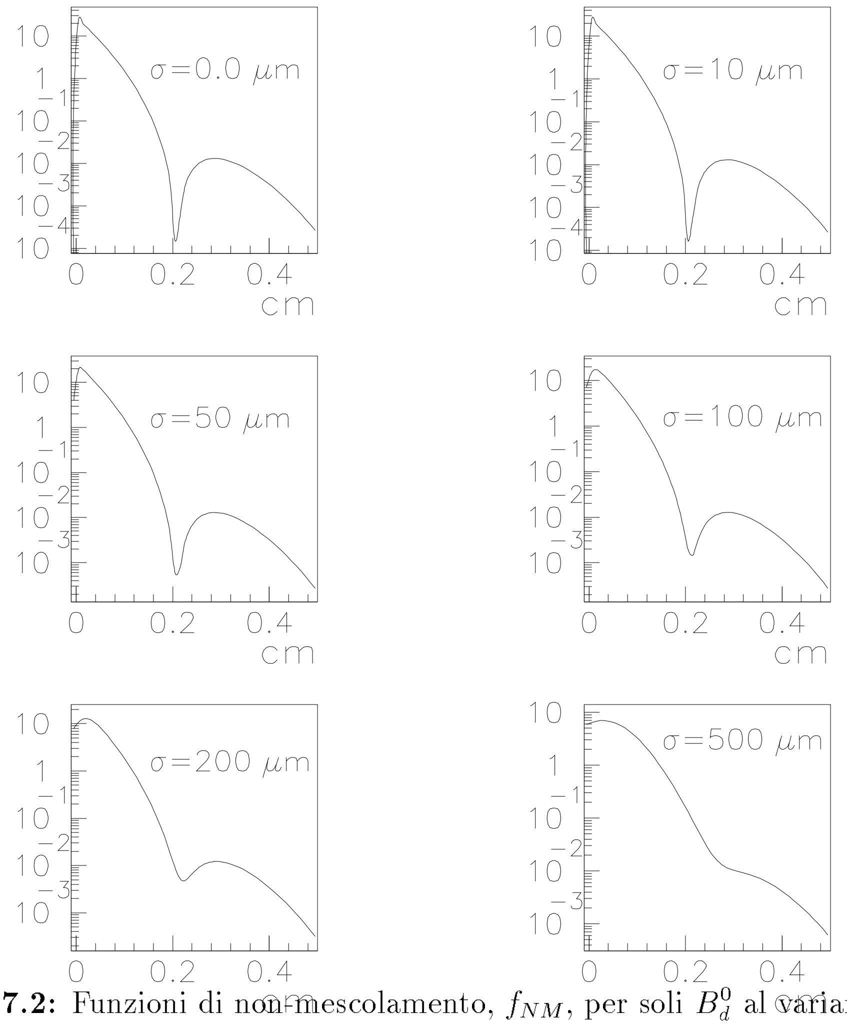

Figura 7.2: Funzioni di non-mescolamento, f_{NM}, per soli B_d^0 al variare della σ.

B identificato	B ricostruito MP	NMP	MS	NMS
MP	OS f_M	LS f_{NM}	LS f_M	OS f_{NM}
NMP	LS f_M	OS f_{NM}	OS f_M	LS f_{NM}
MS	LS f_M	OS f_{NM}	OS f_M	LS f_{NM}
NMS	OS f_M	LS f_{NM}	LS f_M	OS f_{NM}

Tabella 7.1: Combinazione delle 4×4 possibilità per la carica dei due muoni con la relativa distribuzione in λ

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{MP} & = & (1-f_s)\bar{\chi} \\ \mathrm{NMP} & = & (1-f_s)(1-\bar{\chi}) \\ \mathrm{MS} & = & f_s\bar{\chi} \\ \mathrm{NMS} & = & f_s(1-\bar{\chi}) \end{array}$$

Con l'aiuto della tabella 7.1.2 e utilizzando le frazioni appena determinate si possono esprime le frazioni di muoni con lo stesso segno e di segno opposto in funzione dei vari parametri:

$$\begin{array}{rcl} F^{LS}(t,\sigma) & = & \bar{\chi}((1-\bar{\chi})-a_s(1-2\bar{\chi}))f_M(t,\sigma)+(1-\bar{\chi})(\bar{\chi}+a_s(1-2\bar{\chi}))f_{NM}(t,\sigma) \\ F^{OS}(t,\sigma) & = & \bar{\chi}(\bar{\chi}+a_s(1-2\bar{\chi}))f_M(t,\sigma)+(1-\bar{\chi})((1-\bar{\chi})-a_s(1-2\bar{\chi}))f_{NM}(t,\sigma) \end{array} \quad (7.8)$$

in cui a_s è la frazione di sequenziali definita nella sezione 5.4. Con la normalizzazione che abbiamo scelto risulta :

$$F^{OS}(t,\sigma)+F^{LS}(t,\sigma)=E(t,\sigma)$$

La distribuzione

$$Q(t)=\frac{F^{LS}(t,\sigma)}{E(t,\sigma)} \quad (7.9)$$

è mostrata in figura 7.3 per risoluzioni costanti, $\sigma = 0.0,\ 100.,\ 200.$ e $500\ \mu m$; le frazioni di B_d^0 e B_s^0 sono state poste $F_d = 0.375$, $F_s = 0.15$ mentre la frazione di decadimenti sequenziali a_s è stata messa ugaule a zero. In questo caso $x_d = 0.67$ e $x_s = 5$. Si può notare come l'oscillazione del B_s^0 viene lentamente cancellata dal'aumento della σ e per grandi valori viene introdotto un cambiamento di fase che muove anche il primo massimo dell'oscillazione del B_d^0. L'effetto su $Q(t)$ di aggiungere alla risoluzione un termine proporzionale a λ è mostrato in figura 7.4. La risoluzione è stata parametrizzata $\sigma = \sigma_0 + 15\% \cdot \lambda$ e σ_0 è stata variata da 0 a 500 μm. L'oscillazione del B_s^0 è ancora identificabile per $\sigma_0 = 0.$ e $\sigma_0 = 100.$ a λ molto piccole ma scompare del tutto quando si passa a σ_0 maggiori. In figura 7.5 il termine proporzionale a pseudo$-c\tau$ è stato posto pari al 30%. L'effetto del mescolamento del B_s^0 è, in questo caso, marginale. Il picco stesso dell'oscillazione del B_d^0 viene appiattito fino a non distingursi più dal minimo successivo previsto a circa 0.4 cm.

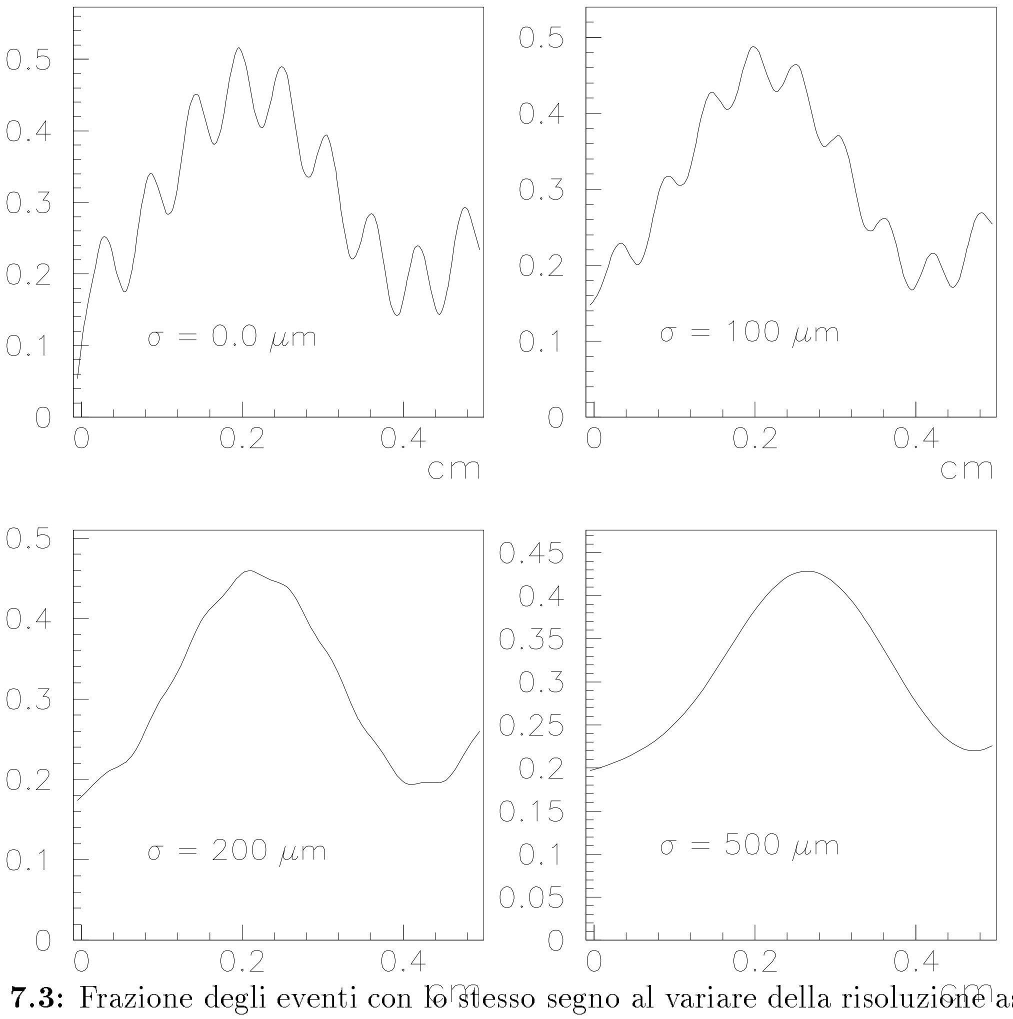

Figura 7.3: Frazione degli eventi con lo stesso segno al variare della risoluzione assumendo $\sigma = costante$.

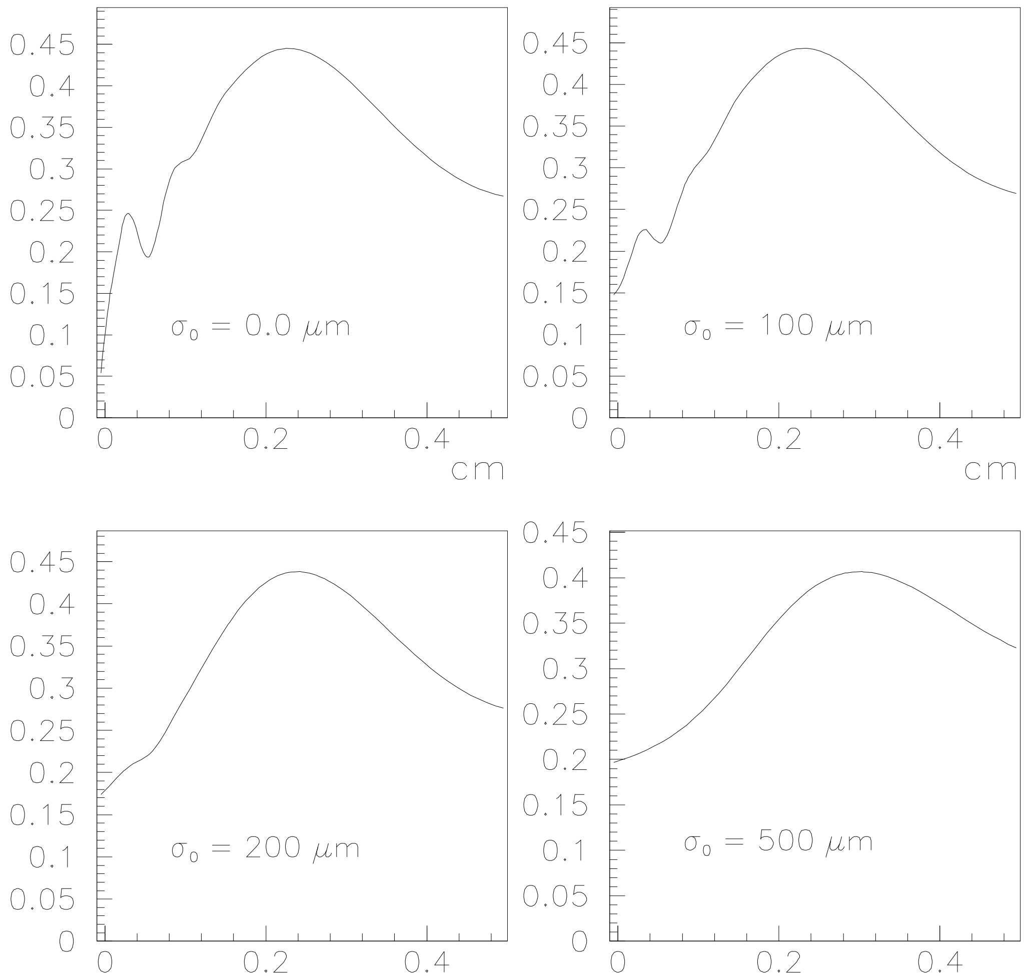

Figura 7.4: Frazione degli eventi con lo stesso segno, $Q(t)$, al variare della risoluzione assumendo $\sigma = \sigma_0 + 15\% \cdot \lambda$.

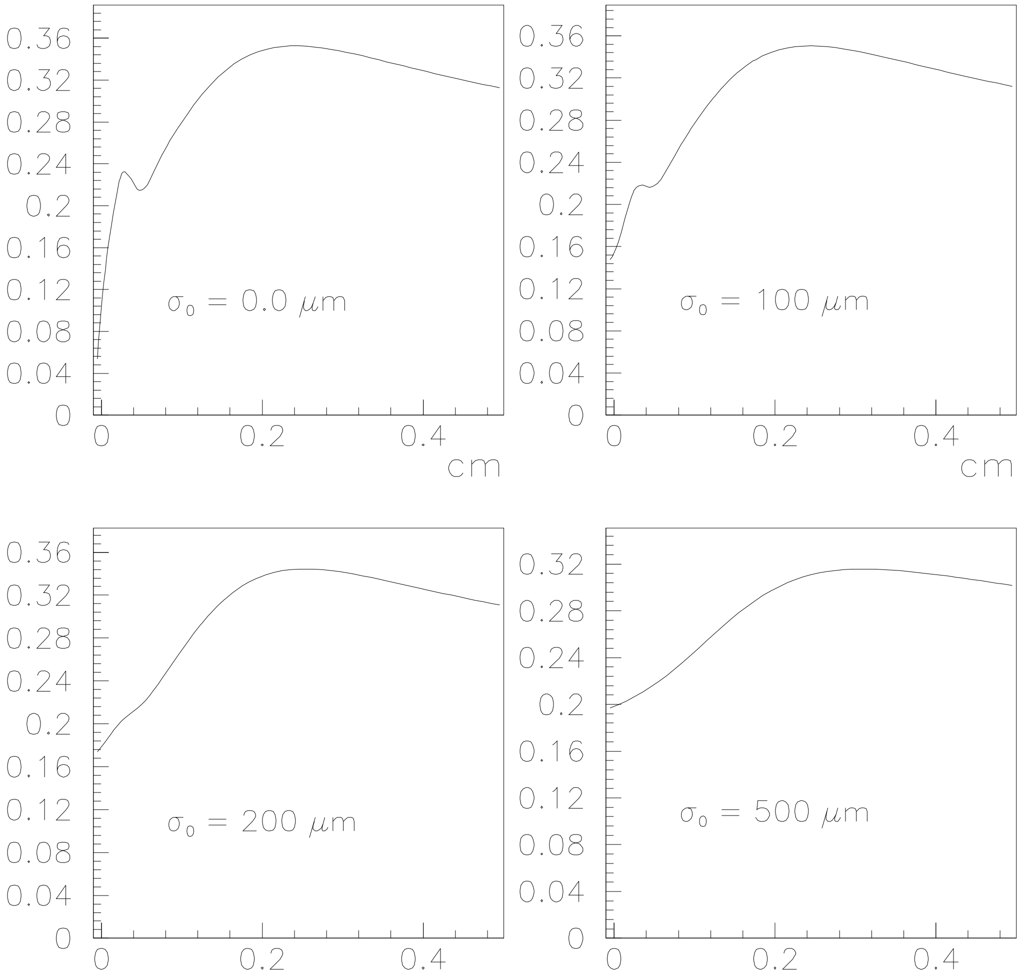

Figura 7.5: Frazione degli eventi con lo stesso segno,$Q(t)$, al variare della risoluzione assumendo $\sigma = \sigma_0 + 30\% \cdot \lambda$.

7.2 Fit della oscillazione del B_d^0

Come primo passo abbiamo cercato di fare il fit della frazione $Q(t)$ sul Montecarlo dove non vi è alcun tipo di fondo. Facciamo un fit di tipo mimimo χ^2 *binned*. La funzione teorica è quella riportata in 7.9 in cui nella formula di a_s f_s viene sostituito con l'espressione dipendente da λ determinata tramite il Montecarlo nella sezione 5.4. La funzione da minimizzare è definita:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(Q_i - Y_i)^2}{E_i^2} \tag{7.10}$$

in cui l'indice i rappresenta i vari *bin* in λ che sono stati usati, Q_i è il valore della funzione teorica in quel particolare *bin*, Y_i è il valore dell'istogramma e E_i è l'errore statistico per ogni punto assunto Gaussiano. I parametri liberi del fit sono: le frazioni di B_d^0 e B_s^0, le loro vite medie e infine Δm_d e Δm_s Lasciamo come unico parametro libero del fit Δm_d; utilizzando il Montecarlo stesso fissiamo gli altri parametri come segue:

Parametro	Vincolo
$c\tau_{B_d} = c\tau_{B_s}$	$0.0432 \pm 0.0007\ cm$
F_d	0.408 ± 0.008
F_s	0.207 ± 0.007

lasciandoli variare entro il loro errore. Questo viene fatto riscrivendo 7.10 come

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(Q_i - Y_i)^2}{E_i^2} + \frac{(c\tau - c\tau_{B_d in})^2}{\sigma^2_{c\tau_{B_d in}}} + \frac{(F_d - F_{din})^2}{\sigma^2_{F_d in}} + \frac{(F_s - F_{sin})^2}{\sigma^2_{F_s in}} \tag{7.11}$$

in cui $c\tau_{B_d in}$, F_{din}, F_{sin} sono i valori fissati e le sigma il loro errore. Si assume $\chi_s = 0.5$ cioè che sia massimo il mescolamento nel B_s^0; le frazioni F_d e F_s, misurate sul Montecarlo stesso, risultano un po' più alte dei valori inseriti a livello di generazione perché mancano gli iperoni in quanto il simulatore li pone a vita media zero e quindi non sono tracciati. Il risultato del fit, mostrato in figura 7.6 (linea continua), è:

Parametro	Risultato del fit
Δmd	$0.566 \pm 0.078 (ps^{-1})$
$c\tau_{B_d}$	$0.0432 \pm 0.0007 (cm)$
F_d	0.408 ± 0.008
F_s	0.207 ± 0.007

Con un $\chi^2 = 7.094$ e 12 gradi di libertà. Questo implica che $x_d = 0.81 \pm 0.11$ che è leggermente più alto del valore iniziale $x_d = 0.67$. C'è da considerare a tal proposito, che inizialmente $x_s = 20. \Rightarrow \chi_s = 0.49875$ che inserito nel fit abbassa leggermente il valore di x_d.

Usiamo la stessa tecnica per fare il fit sui dati. Come visto nel capitolo 6 la percentuale di fondo che ci aspettiamo nel campione selezionato è piuttosto bassa, quindi assumiamo per il momento di avere solo B. Assumiamo massimo il mescolamento del B_s^0, quindi poniamo $\chi_s = 0.5$ e cerchiamo di ridurre il numero di parametri liberi imponendo dei vincoli fisici su alcune grandezze:

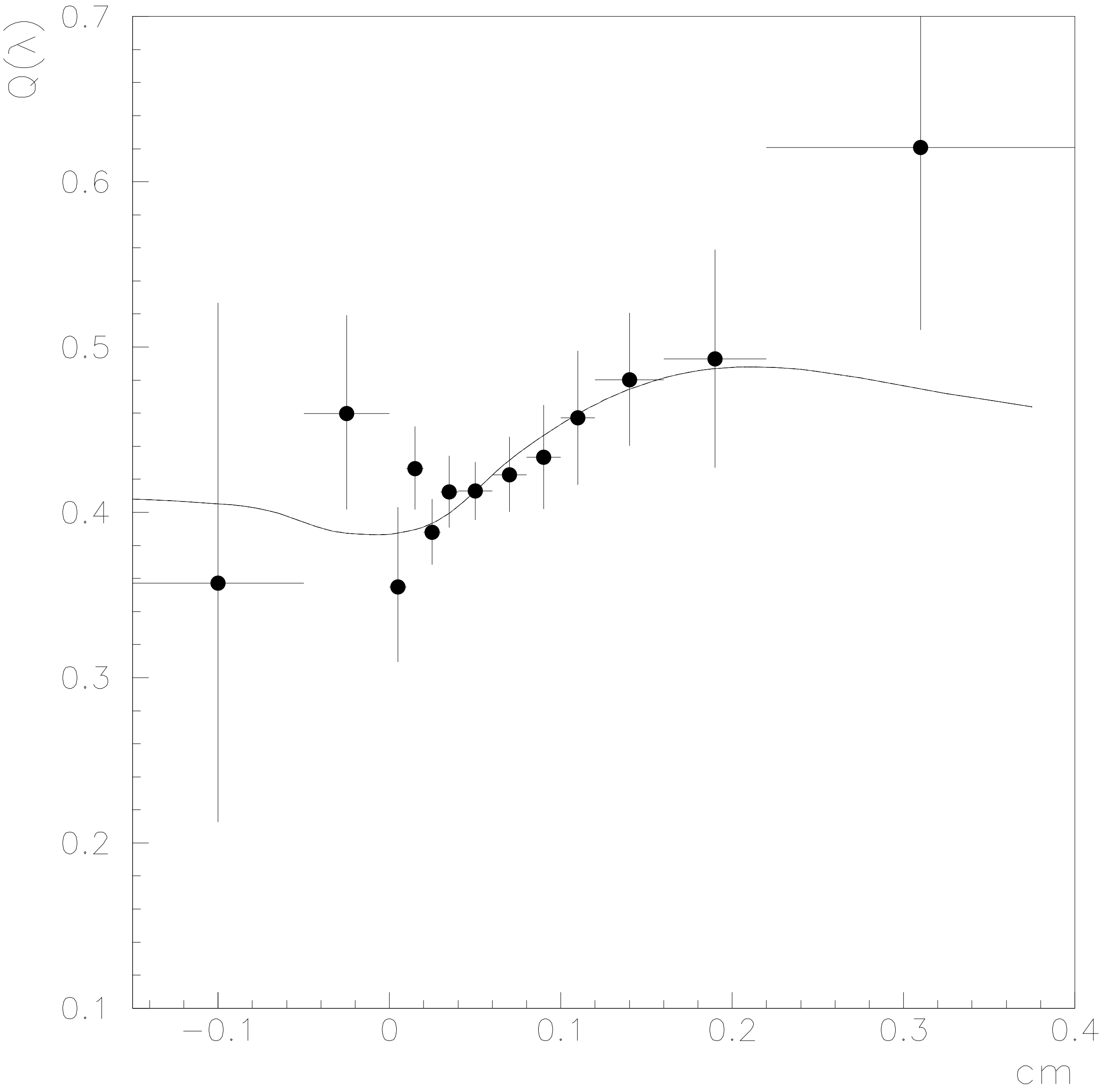

Figura 7.6: Frazione degli eventi con lo stesso segno, $Q(t)$, per il Montecarlo con il risultato del fit sovraimposto.

Parametro	Vincolo
$c\tau_{B^0}$	0.0438 ± 0.0025
F_d	0.373 ± 0.030
F_s	0.150 ± 0.044

Le vite medie dei B_d^0 e B_s^0 sono state poste uguali, in prima approsimazione, ed è stato utilizzato il valore misurato a CDF [71]. I valori delle frazioni F_d e F_s non sono ancora stati misurati a CDF e quindi si usano i risultati delle misure di LEP [33], che comunque non dovrebbero essere molto diversi da quelli ai *collider* $p\bar{p}$. I risultati del fit si riassumono come segue:

Parametro	Risultato del fit
Δmd	0.438 ± 0.090 (ps^{-1})
$c\tau_{B^0}$	0.0438 ± 0.0025 (cm)
F_d	0.373 ± 0.030
F_s	0.150 ± 0.032

con $\chi^2 = 8.78$ e 11 gradi di libertà che corrisponde ad un livello di confidenza del 67.7%. Questi valori danno $x_d = 0.64 \pm 0.14$; l'errore non è solo statistico ma contiene anche le incertezze sistematiche su τ_B. Il risultato del fit è mostrato in figura 7.7 come curva solida sovrapposta ai punti che invece rappresentano i dati. Il nostro risultato è in ottimo accordo con i valori pubblicati da CLEO e ARGUS ed è consistente con le misure del mescolamento dipendente dal tempo effettuate a LEP (vedi secondo capitolo).

Come controllo della robustezza del nostro segnale di mescolamento abbiamo ripetuto il fit imponendo $\Delta md = 0.$; il risultato è mostrato in figura 7.7 come linea tratteggiata. I dati sono chiaramente incosistenti con questa assunzione dal momento che sono sistematicamente sopra la curva del fit. Inoltre in questo caso la frazione di B_s viene spinta fino al 23.8%, due sigma più alta del valore nominale. Il livello di confidenza in questo caso è 4.9% ottenuto con $\chi^2 = 21.13$ e 11 gradi di libertà.

La curva punteggiata in figura 7.7 rappresenta la predizione teorica di ciò che avremmo in assenza di mescolamento cioè con $x_d = 0$ e $x_s = 0$. In questo caso la dipendenza temporale è dovuta alla variazione con $c\tau$ della frazione di decadimenti sequenziali.

Una delle grandezze in cui si manifesta il mescolamento è la differenza tra il numero di muoni di segno opposto e quello di muoni con lo stesso segno,

$$C(t) = \frac{F^{OS}(t) - F^{LS}}{E(t)}$$

La distribuzione di $C(t)$ è mostrata in figura 7.8. Con il tratto continuo è stata disegnata la curva teorica in cui i parametri sono stati posti uguali al risultato del fit di $Q(t)$. La curva tratteggiata è la previsione teorica in caso di assenza di mescolamento

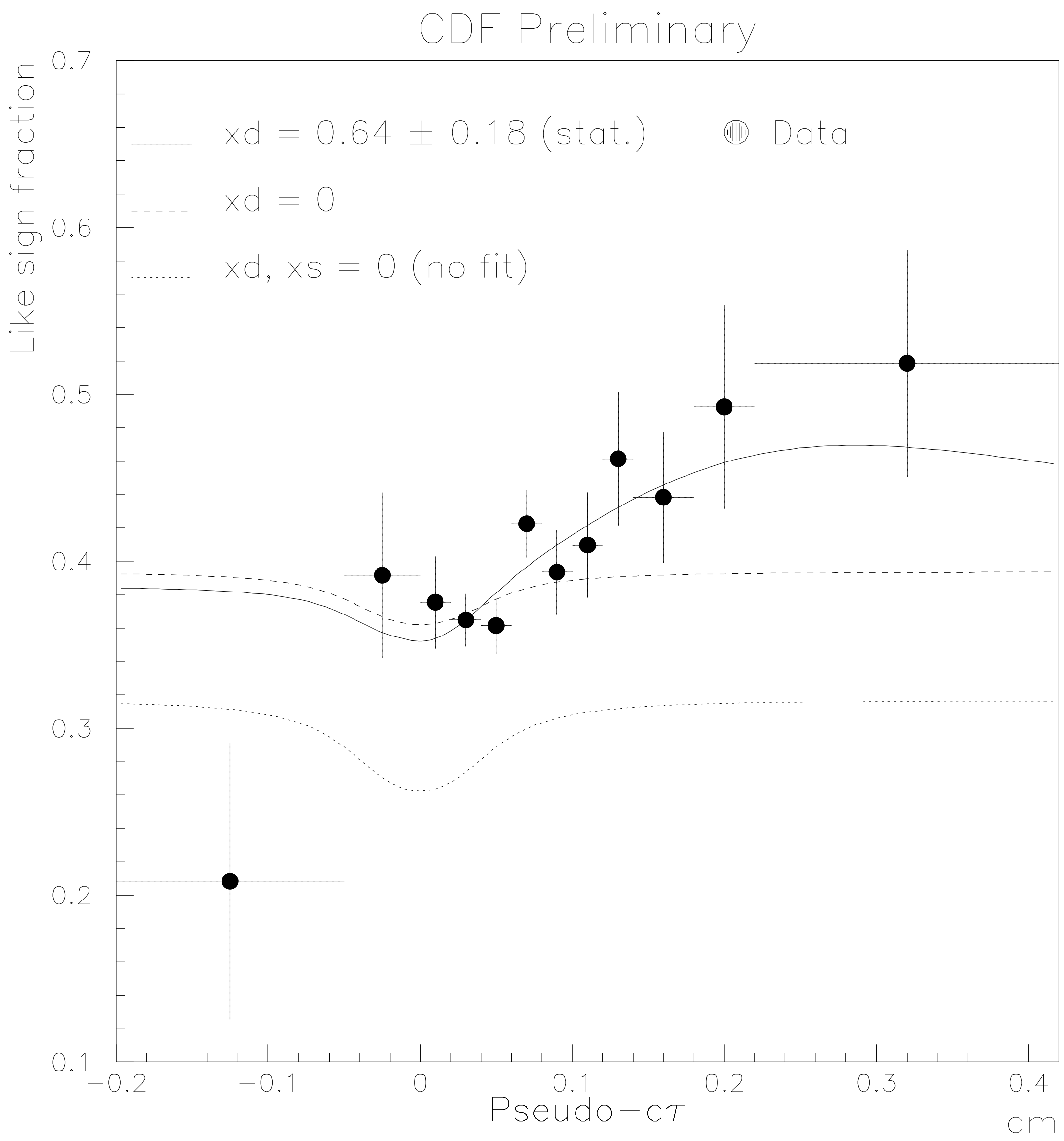

Figura 7.7: Frazione degli eventi con lo stesso segno,$Q(t)$, per i dati con i risultati del fit sovraimposti.

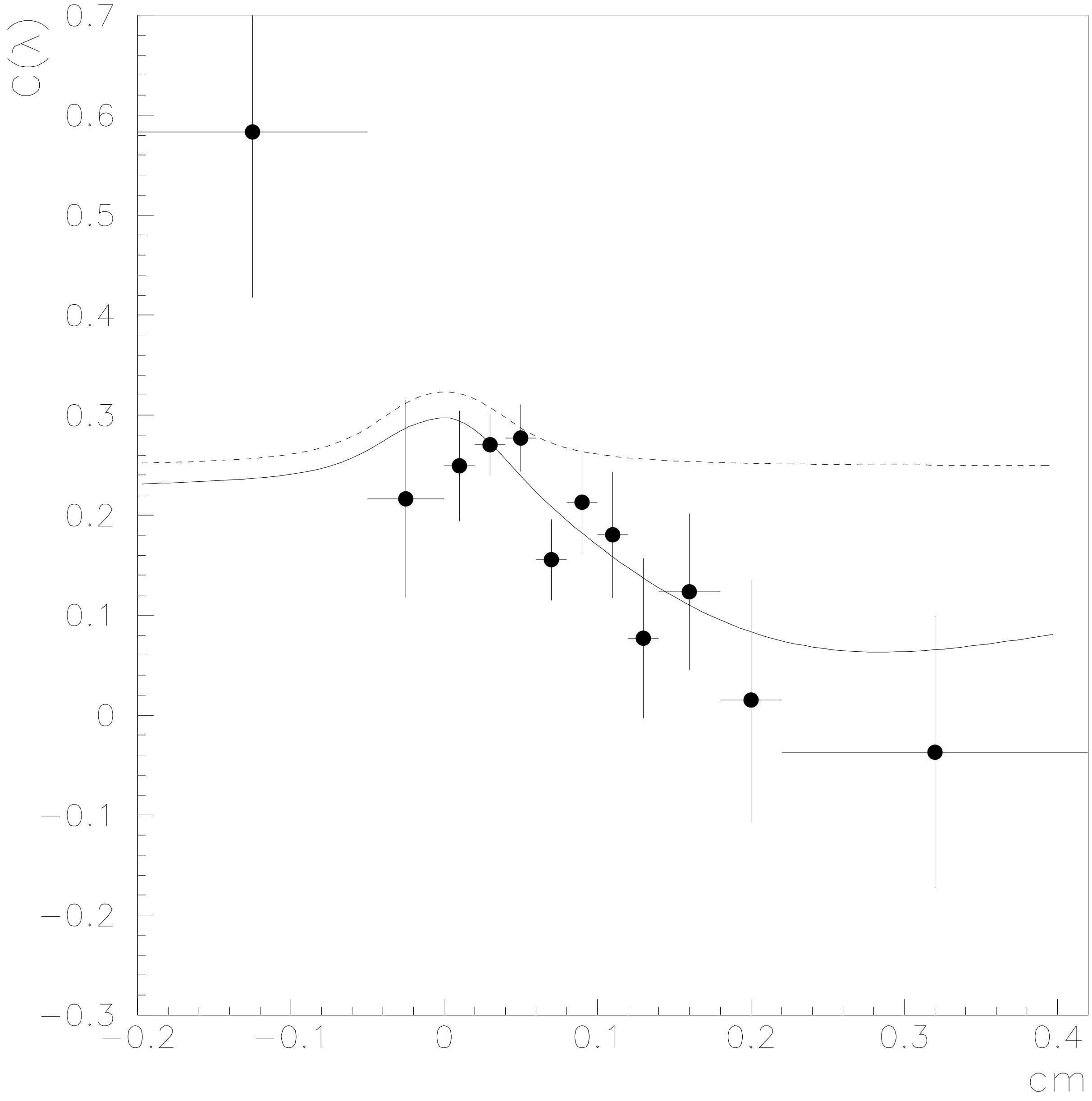

Figura 7.8: $C(\lambda)$ per i dati. Curva continua è data dall'espressione teorica con i valori dei parametri ottenuti dal fit di $Q(\lambda)$, quella tratteggiata è la previsione in assenza di mescolamento