Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 22 Febbraio 2012

Problema 1

Si consideri un oscillatore armonico con hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \ .$$

Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda è

$$\psi(x) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2 + i\beta x} \ ,$$

dove $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ e β è una costante reale. Determinare

1. la funzione d'onda normalizzata;
2. la funzione d'onda a $t \geq 0$;
3. i valori medi, a $t \geq 0$, della posizione, dell'energia e della parità.
4. Si supponga ora che una misura ideale di prima specie, eseguita a $t = 0^+$, abbia rilevato che lo stato ha parità $+1$. Determinare, a $t > 0$, la funzione d'onda normalizzata e il valor medio della posizione.

N.B. Non è richiesto il calcolo esplicito degli integrali che coinvolgono funzioni oscillanti.

Problema 2

Si consideri un sistema composto da due particelle distinte di spin 1/2. La dinamica del sistema è descritta dall'hamiltoniana

$$H = H_0 + A\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \ ,$$

dove H_0 descrive il moto relativo delle due particelle ed è indipendente sia dal tempo che dallo spin e A è una costante.
La funzione d'onda al tempo $t = 0$ è fattorizzata

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |1/2, -1/2\rangle \ ,$$

dove

$$H_0|\phi\rangle = E_0|\phi\rangle \ ,$$

mentre il ket $|1/2, -1/2\rangle$ descrive la parte di spin delle due particelle, ed è determinata dai numeri quantici corrispondenti alle componenti dello spin lungo l'asse z di ciascuna particella.

1. Sia $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ lo spin totale e m_S la sua componente lungo l'asse z. Si esprima lo stato iniziale nella rappresentazione $|S, m_S\rangle$.

2. Si determini la funzione d'onda a $t \geq 0$.

3. **Facoltativo.** Si supponga che una misura ideale di prima specie, eseguita a $t = 0^+$, abbia rilevato che $S_x = \hbar$. Determinare la probabilità che una misura, eseguita a $t > 0$, rilevi che le particelle si trovano in uno stato in cui $s_{1z} = s_{2z} = \hbar/2$.

1. Poiché
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \ ,$$
che vale per $a > 0$ e $b \in \mathbb{C}$, si ha
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \ ,$$
da cui segue che la funzione d'onda normalizzata è
$$\psi(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2+i\beta x} \ .$$

2.
$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}\psi_k(x) \ ,$$
$$c_k = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2+i\beta x}\psi_k(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x}\psi_0(x)\psi_k(x)dx \ .$$

3.
$$\langle x\rangle_t = \sum_{j,k=0}^{\infty} \bar{c}_j c_k e^{i(j-k)\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_j(x)\psi_k(x)dx \ .$$
Poiché
$$\langle j|x|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle j|a+a^+|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{j}\delta_{j,k+1} + \sqrt{j+1}\delta_{j,k-1}) \ ,$$
si ha
$$\langle x\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\Re\Big(\bar{c}_k c_{k-1} e^{i\omega t}\Big) \ .$$
Il valor medio dell'energia è
$$\langle H\rangle_t = \langle H\rangle_0 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 E_k \ .$$
Sia $\mathcal{P}$ l'operatore parità. Poiché $[\mathcal{P}, H] = 0$, si ha
$$\langle \mathcal{P}\rangle_t = \langle \mathcal{P}\rangle_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2-2i\beta x}dx = e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}} \ .$$

4. A $t = 0^+$ la funzione d'onda normalizzata è
$$\psi(x,0^+) = Ae^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}\cos(\beta x) \ , \qquad A^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}\cos^2(\beta x)dx \ .$$
Inoltre
$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k}t}\psi_{2k}(x) \ ,$$
$$d_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}\cos(\beta x)\psi_{2k}(x)dx \ .$$
$\langle x\rangle_t = 0$ in quanto integrale di funzione dispari su intervallo simmetrico.

1. $m_S = m_{s_1} + m_{s_2}$ implica $|1,1\rangle_S = |1/2,1/2\rangle$, $|1,-1\rangle_S = |-1/2,-1/2\rangle$.

   $S_-|1,1\rangle_S = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle = (s_{1-}+s_{2-})|1/2,1/2\rangle = \hbar|-1/2,1/2\rangle+\hbar|1/2,-1/2\rangle$

   per cui
$$|1,0\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2,-1/2\rangle + |-1/2,1/2\rangle) \ .$$

   $m_S = m_{s_1} + m_{s_2}$ implica $|0,0\rangle_S = a|1/2,-1/2\rangle + b|-1/2,1/2\rangle$ dove i coefficienti di Clebsh-Gordan, a e b, devono soddisfare tre condizioni

   - Sono convenzionalmente scelti reali.

   - Poiché lo stato $|0,0\rangle_S$ deve essere ortogonale a tutti gli altri stati che differiscono anche per un solo numero quantico ${}_S\langle S,m_S|S',m_{S'}\rangle_S = \delta_{SS'}\delta_{m_S m_{S'}}$, segue, in particolare, che $|0,0\rangle_S$ è ortogonale a $|1,0\rangle_S$.

   - ${}_S\langle 0,0|0,0\rangle_S = 1$ implica $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

   Queste condizioni determinano $|0,0\rangle_S$ a meno di un segno a fattore $|0,0\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2,-1/2\rangle - |-1/2,1/2\rangle)$, quindi
$$|1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle_S + |0,0\rangle_S) \ .$$

2. Utilizzando la relazione $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)$, che nel caso in questione si riduce a $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2$, si ha
$$|\psi\rangle_t = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+\frac{A}{4}\hbar^2)t}}{\sqrt{2}}|\phi\rangle \otimes (|1,0\rangle_S + e^{iA\hbar t}|0,0\rangle_S) \ .$$

   Si noti che l'ambiguità di segno $|0,0\rangle_S \to -|0,0\rangle_S$, non ha alcun effetto fisico. Infatti, si verifica immediatamente che in rappresentazione $|m_{s_1},m_{s_2}\rangle$ l'evoluzione temporale è la stessa per ambedue le scelte di segno
$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-\frac{A}{4}\hbar^2)t}|\phi\rangle\otimes\Big(\cos\frac{A\hbar^2 t}{2}|1/2,-1/2\rangle - i\sin\frac{A\hbar^2 t}{2}|-1/2,1/2\rangle\Big) \ .$$

3. A $t = 0^+$ lo stato è $|\psi\rangle_{0^+} = {}_S\langle 1,1_x|\psi\rangle|1,1_x\rangle_S = {}_S\langle 1,1_x|1,0\rangle_S|\phi\rangle\otimes|1,1_x\rangle_S$, dove il suffisso x indica che il corrispettivo numero quantico è relativo alla componente x dello spin totale. Si può facilmente verificare che ${}_S\langle 1,1_x|\psi\rangle \neq 0$ (peraltro se tale coefficiente fosse nullo, allora l'affermazione concernente il risultato della misura sarebbe erronea). Quindi, per $t > 0$, lo stato, con la parte di spin normalizzata, è
$$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\phi\rangle \otimes |1,1_x\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A\hbar^2)t}|\phi\rangle \otimes |1,1_x\rangle_S \ .$$

   Poiché l'evoluzione temporale dello stato è banale, segue che la probabilità richiesta è indipendente dal tempo. D'altronde, si ha $|1,1_x\rangle_S = |1/2_x,1/2_x\rangle$, per cui la probabilità richiesta è $|\langle 1/2_x,1/2_x|1/2,1/2\rangle|^2$. Infine, ricordando che $|1/2_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2\rangle + |-1/2\rangle)$, si ha
$$|1/2_x,1/2_x\rangle = \frac{1}{2}(|1/2\rangle + |-1/2\rangle) \otimes (|1/2\rangle + |-1/2\rangle) \ ,$$

da cui

$$|\langle 1/2_x, 1/2_x|1/2, 1/2\rangle|^2 = \frac{1}{4} \ .$$

È istruttivo considerare un modo equivalente di derivare il precedente risultato. Poiché $S_+ + S_- = 2S_x$ si ha

$$(S_+ + S_-)|1, 1_x\rangle_S = 2\hbar|1, 1_x\rangle_S \ .$$

Quindi

$$(S_+ + S_-)(A|1,-1\rangle_S + B|1,0\rangle_S + C|1,-1\rangle_S) = 2\hbar(A|1,-1\rangle_S + B|1,0\rangle_S + C|1,-1\rangle_S) \ .$$

Osservando che

$$S_+|1,-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle \ , \qquad S_+|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,1\rangle \ , \qquad S_+|1,1\rangle = 0 \ ,$$

$$S_-|1,-1\rangle = 0 \ , \qquad S_-|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,-1\rangle \ , \qquad S_-|1,1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle \ ,$$

e tenendo conto della normalizzazione, si ha

$$|1, 1_x\rangle_S = \frac{1}{2}(|1,-1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,1\rangle) \ .$$

D'altronde, poiché $|1/2, 1/2\rangle = |1,1\rangle_S$, la probabilità richiesta è

$$|_S\langle 1, 1_x|1,1\rangle_S|^2 = 1/4 \ .$$