

**Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 28 Giugno 2012**

Lo stato di un oscillatore armonico quantistico unidimensionale, di massa m e pulsazione ω , è descritto, al tempo $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) ,$$

con $\psi_k(x)$ le autofunzioni normalizzate dell'operatore hamiltoniano.

1. Determinare, al tempo $t \geq 0$, il valor medio della posizione e del momento.
2. Determinare la probabilità che una misura ideale di prima specie, eseguita al tempo $t_0 \geq 0$, dia come risultato lo stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, t_0) = (\psi_0(x) + \psi_1(x))^2 .$$

3. Supponendo che lo stato osservato durante la precedente misura sia effettivamente descritto dalla funzione d'onda $\psi(x, t_0)$, determinare, al tempo $t \geq t_0$, il valor medio della parità.

Si ricorda che

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^+ + a) , \quad p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^+ - a) ,$$

e

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) ,$$

dove $H_n(x)$ sono i polinomi d'Hermite. In particolare,

$$H_0(x) = 1 , \quad H_1(x) = 2x , \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 .$$

Problema n.2

Sia $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ con $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$ gli operatori di momento angolare e di spin rispettivamente. Sia

$$H = c \mathbf{J}^2 ,$$

con c una costante, l'operatore hamiltoniano relativo ad una particella di spin $1/2$. Si supponga che al tempo $t = 0$ la particella abbia la parte spaziale della funzione d'onda

$$\phi = y f(r) ,$$

dove f è una funzione non specificata del modulo r del raggio vettore.

1. Si determinino i possibili risultati, con le relative probabilità, di un'eventuale misura, effettuata al tempo $t = 0$, delle osservabili relative agli operatori $\mathbf{L}^2$ e L_z .

Al tempo $t_0 \geq 0$ viene effettuata una misura ideale di prima specie che rivela che la particella si trova nello stato

$$|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle ,$$

si calcoli, al tempo $t_1 \geq t_0$,

2. il valor medio di J_z ;
3. il valor medio di J_x .

Si osservi che

$$|3/2, 3/2\rangle_J = |1, 1/2\rangle ,$$

$$|3/2, 1/2\rangle_J = (1/3)^{1/2} |1, -1/2\rangle + (2/3)^{1/2} |0, 1/2\rangle ,$$

$$|1/2, 1/2\rangle_J = (2/3)^{1/2} |1, -1/2\rangle - (1/3)^{1/2} |0, 1/2\rangle ,$$

dove gli stati $|\cdot, \cdot\rangle_J$ sono caratterizzati dai numeri quantici j e j_z , (per esempio $|3/2, 1/2\rangle_J \equiv |j = 3/2, j_z = 1/2\rangle_J$), mentre gli stati $|\cdot, \cdot\rangle$ sono caratterizzati dai numeri quantici m_l ed m_s (per esempio $|1, 1/2\rangle \equiv |m_l = 1, m_s = 1/2\rangle$). Si sottolinea che la soluzione del problema non richiede necessariamente l'utilizzo delle precedenti relazioni.

Problema n.3 (Facoltativo)

Si mostri che lo stato $e^{-i\pi L_z/2\hbar} |l = 1, l_y = 1\rangle$ è autostato di L_x .

Problema 1

1. Si ricordi che $[a, a^+] = 1$. Inoltre

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_t &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle 0| + e^{i\omega t} \langle 1| + e^{2i\omega t} \langle 2| \right) (a^+ + a) \left(|0\rangle + e^{-i\omega t} |1\rangle + e^{-2i\omega t} |2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\omega t} \langle 0|a|1\rangle + e^{-i\omega t} \langle 1|a|2\rangle + e^{i\omega t} \langle 1|a^+|0\rangle + e^{i\omega t} \langle 2|a^+|1\rangle \right) \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_t &= \frac{i}{3} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(\langle 0| + e^{i\omega t} \langle 1| + e^{2i\omega t} \langle 2| \right) (a^+ - a) \left(|0\rangle + e^{-i\omega t} |1\rangle + e^{-2i\omega t} |2\rangle \right) \\ &= \frac{i}{3} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(-e^{-i\omega t} \langle 0|a|1\rangle - e^{-i\omega t} \langle 1|a|2\rangle + e^{i\omega t} \langle 1|a^+|0\rangle + e^{i\omega t} \langle 2|a^+|1\rangle \right) \\ &= -\frac{2(1+\sqrt{2})}{3} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

2. Per determinare la normalizzazione di $\psi(x, t_0)$ si può eseguire il calcolo diretto dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t_0)|^2 dx$, oppure osservare che

$$\psi(x, t_0) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})\psi_0(\sqrt{2}x) + 2\psi_1(\sqrt{2}x) + \psi_2(\sqrt{2}x)],$$

$a = m\omega/\hbar$, e quindi notare che poiché

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_i(\sqrt{2}x)\psi_j(\sqrt{2}x)dx = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2}},$$

si ha che la versione normalizzata di $\psi(x, t_0)$ è

$$\psi_N(x, t_0) = \frac{1}{2^{1/4}\sqrt{4+\sqrt{2}}} [(1 + \sqrt{2})\psi_0(\sqrt{2}x) + 2\psi_1(\sqrt{2}x) + \psi_2(\sqrt{2}x)].$$

La probabilità richiesta è

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_N(x, t) \psi(x) dx \right|^2.$$

Si ha

$$\psi_N(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k (t-t_0)} \psi_k(x),$$

con $E_k = (k + 1/2)\hbar\omega$ e

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} \psi_N(x, t_0) \bar{\psi}_k(x) dx ,$$

generalmente tutti non nulli (dovuto al coefficiente nell'esponenziale gaussiano). Comunque $\psi(x)$ contiene solamente i primi tre autostati dell'operatore hamiltoniano, quindi

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} |c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t}|^2 .$$

Riportiamo, per completezza, il calcolo esplicito dei coefficienti c_0 , c_1 e c_2 . In proposito, si ricordi che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ,$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{d^n}{d\alpha^n} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n} ,$$

dove $(2n-1)!!$ indica il prodotto dei numeri dispari da 1 a $2n-1$. In particolare,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} ,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} .$$

Possiamo quindi calcolare gli integrali

$$(\psi_i(\sqrt{2}x), \psi_j(x)) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_i(\sqrt{2}x) \psi_j(x) dx ,$$

$i, j = 0, 1, 2$. In proposito si osservi che $(\psi_i(\sqrt{2}x), \psi_j(x)) = 0$ se $i + j$ è dispari. Riportiamo il valore dei $(\psi_i(\sqrt{2}x), \psi_j(x))$, $i, j = 0, 1, 2$, non nulli

$$(\psi_0(\sqrt{2}x), \psi_0(x)) = \sqrt{\frac{2}{3}} , \quad (\psi_0(\sqrt{2}x), \psi_2(x)) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} ,$$

$$(\psi_1(\sqrt{2}x), \psi_1(x)) = \frac{4}{3^{\frac{3}{2}}} , \quad (\psi_2(\sqrt{2}x), \psi_0(x)) = \frac{1}{12\sqrt{3}} ,$$

$$(\psi_2(\sqrt{2}x), \psi_2(x)) = \frac{1}{3\sqrt{6}} (11 - 6\sqrt{2}) .$$

Si ha quindi

$$c_0 = \frac{12\sqrt{2} + 25}{12 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{3} \sqrt{4 + \sqrt{2}}} ,$$

$$c_1 = \frac{8}{2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \sqrt{2}}} ,$$

$$c_2 = \frac{9 - 7\sqrt{2}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{6} \sqrt{4 + \sqrt{2}}} .$$

3. Poiché l'operatore parità commuta con l'operatore hamiltoniano, il suo valor medio è indipendente dal tempo. Utilizzando sia

$$\psi_N(-x, t_0) = \psi_N(x, t_0) - \frac{4}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{4+\sqrt{2}}}\psi_1(\sqrt{2}x) ,$$

che $(\psi_N(x, t_0), \psi_N(x, t_0)) = 1$ e $(\psi_i(\sqrt{2}x), \psi_j(\sqrt{2}x)) = \delta_{ij}/\sqrt{2}$, si ha

$$\langle P \rangle_t = (\psi_N(x, t_0), \psi_N(-x, t_0)) = 1 - \frac{8}{2^{\frac{1}{2}}(4+\sqrt{2})}(\psi_1(\sqrt{2}x), \psi_1(\sqrt{2}x)) = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} .$$

Problema 2

La parte angolare della funzione d'onda è $Y_{1,1} + Y_{1,-1}$, quindi $\mathcal{P}(l=1) = 1$, $\mathcal{P}(m=-1) = 1/2 = \mathcal{P}(m=1)$.

È possibile rispondere ai punti 3 e 4 esprimendo prima lo stato con $m_l = 1$, $m_s = -1/2$ in termini degli stati indicizzati dai numeri quantici J e J_z . Inoltre, essendo $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$, $i = x, y, z$, segue che l'hamiltoniana stessa commuta con J_i . Ciò implica che è possibile calcolare il valor medio richiesto al tempo t_0 . Comunque, poiché $J_z = L_z + S_z$, segue che lo stato $|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ è uno stato con J_z determinato. In altre parole $J_z|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle = \frac{\hbar}{2}|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$, proprietà che continua a valere anche sotto evoluzione temporale

$$J_z e^{-iHt/\hbar}|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle = \frac{\hbar}{2} e^{-iHt/\hbar}|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle .$$

Non è quindi necessario esprimere $e^{-iHt/\hbar}|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ in autostati di $\mathbf{J}^2$ e J_z per stabilire che

$$\langle J_z \rangle_{t_1} = \frac{\hbar}{2} .$$

Analogo ragionamento vale per il valor medio di J_x . Infatti, si ha

$$J_x = \frac{1}{2}(L_+ + S_+ + L_- + S_-) ,$$

quindi $J_x|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ è ortogonale a $|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$, da cui

$$\langle J_x \rangle_{t_1} = 0 .$$

Problema 3

Il problema facoltativo è di immediata soluzione se si osserva che $e^{-i\pi L_z/2\hbar}$ è l'operatore di rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse z . Per verificare con il calcolo diretto conviene esprimere $|l=1, l_y=1\rangle$ in autostati dell'operatore L_z . Si ha

$$|l=1, l_y=1\rangle = \frac{i}{2}|1, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{i}{2}|1, 1\rangle ,$$

da cui, utilizzando la relazione $L_x = (L_+ + L_-)/2$, si verifica immediatamente che

$$L_x e^{-i\pi L_z/2\hbar}|l=1, l_y=1\rangle = -\hbar e^{-i\pi L_z/2\hbar}|l=1, l_y=1\rangle .$$