

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 9 Gennaio 2006

Problema n.1

Una particella di massa m è confinata nel segmento di coordinate $[-L, L]$ dell'asse x .

1. Si calcolino gli elementi di matrice

$$X_{mn} := \langle m | X | n \rangle ,$$

dove X è l'operatore di posizione e $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, denota l'ennesimo autostato dell'operatore hamiltoniano.

2. Si determini il valor medio

$$\langle \psi(t) | X | \psi(t) \rangle ,$$

sapendo che al tempo $t = 0$ lo stato è

$$|\psi(0)\rangle = 3|0\rangle + 4|1\rangle .$$

3. Si calcoli la probabilità che al tempo $t \geq 0$ la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\phi(x) = x , \text{ per } |x| \leq L , \qquad \phi(x) = 0 , \text{ per } |x| > L .$$

4. Supponendo che un'opportuna misura, effettuata al tempo $t_0 \geq 0$, abbia rilevato che la particella si trovi effettivamente in tale stato, si determini lo stato del sistema al tempo $t_1 \geq t_0$.
5. Si determinino i possibili valori, con le rispettive probabilità, che possono risultare da una misura di parità eseguita al tempo t_1 .

Problema n.2

Una particella si trova in uno stato con momento angolare $l = 1$. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = AL_x ,$$

dove $\mathbf{L} := (L_x, L_y, L_z)$ è l'operatore momento angolare e A una costante.

1. Si determinino gli elementi di matrice

$$\langle 1, m | L_i | 1, m' \rangle ,$$

$i = x, y, z$, dove $|l, m\rangle$, $l = 1$, è autostato degli operatori \mathbf{L}^2 e L_z con autovalori $2\hbar^2$ e $m\hbar$ rispettivamente.

2. È noto che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema corrisponde a $|\psi(0)\rangle = |1, 1\rangle$, si determini $|\psi(t)\rangle$ per $t \geq 0$.

Si determini la probabilità che al tempo $t \geq 0$ il sistema si trovi

3. nello stato $|1, -1\rangle$;
4. nello stato corrispondente alla parte angolare di $\phi(x, y, z) = x + iy - z$.
5. Supponendo che a seguito di un'opportuna misura, eseguita al tempo $t_0 \geq 0$, il sistema sia descritto dalla parte angolare di ϕ , si determinino i possibili risultati di una misura di parità eseguita al tempo $t_1 > t_0$.

Si ricorda che per $l = 1$ le armoniche sferiche sono

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} , \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta , \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} .$$