

Prova scritta di Fisica Teorica
Padova - Dipartimento di Fisica - 30 Marzo 2007

Problema 1

Si considerino due particelle di spin $1/2$.

1. Si mostri che

$$(|11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle) = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 ,$$

dove $|\psi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ e $|\phi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$, con \mathcal{H}_i gli spazi di Hilbert ad una particella.

Supponendo che da una misura simultanea di $S_z^{(1)}$ e $S_z^{(2)}$ risulti $m_s^{(1)} = \hbar/2$, si determinino i possibili valori, con le rispettive probabilità, di $m_s^{(2)}$, nel caso in cui il sistema sia nello stato

2. $|10\rangle$;
3. $|11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle$.
4. Si esprimano gli stati a due particelle

$$\begin{aligned} |0\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + i|1-1\rangle) , \\ |1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1-1\rangle + i|11\rangle) , \\ |2\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|10\rangle - e^{i\pi/4}|00\rangle) , \\ |3\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|10\rangle + e^{i\pi/4}|00\rangle) , \end{aligned}$$

in rappresentazione $|m_s^{(1)}\rangle \otimes |m_s^{(2)}\rangle$.

5. *Facoltativo.* Si dimostri che

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + |1\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |2\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |3\rangle \otimes |\psi_3\rangle) ,$$

dove $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$, sono stati unitariamente trasformati dello stato ad una particella

$$|\psi\rangle := a_+ |\uparrow\rangle + a_- |\downarrow\rangle .$$

Problema 2

Si consideri un elettrone in presenza del campo magnetico $\vec{B} \equiv (0, 0, B)$, con B costante. Sia

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} ,$$

l'hamiltoniana. Si consideri la seguente scelta di gauge

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{X} = \frac{1}{2} B (-X_2, X_1, 0) .$$

1. Si determini l'operatore \vec{V} che in visuale di Heisenberg è definito come

$$\vec{V}_H(t) := \frac{d\vec{X}_H(t)}{dt} .$$

2. Si calcoli $[V_i, V_j]$, per cui è utile osservare che

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_k \mathbf{1} ,$$

$i, j = 1, 2, 3$, e si dimostri che

$$H = \frac{m}{2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{V})^2 .$$

In proposito può essere utile osservare che

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k , \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} , \quad \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} ,$$

e

$$\sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} V_i V_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ijk} V_i V_j + \epsilon_{jik} V_j V_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} [V_i, V_j] ,$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3$.

3. È immediato verificare che $H = H_{\perp} + H_{\parallel} + H_S$, dove

$$H_{\perp} := \frac{m}{2} (V_1^2 + V_2^2) , \quad H_{\parallel} := \frac{P_3^2}{2m} , \quad H_S := -\omega S_3 ,$$

$\omega := eB/(mc)$. Si determinino gli operatori a e a^+ , $[a, a^+] = 1$, tali che, come suggerito dalla struttura di $[V_1, V_2]$, H_{\perp} corrisponda all'hamiltoniana di un oscillatore armonico

$$H_{\perp} = \hbar\omega (a^+ a + 1/2) .$$

4. Si determini $\text{Sp}(\bar{N})$, $\bar{N} := b^+ b$, $b := (S_2 - iS_1)/\hbar$, e si mostri che $b^2 = 0 = b^{+2}$, $\{b, b^+\} = 1$.

5. *Facoltativo*. Si verifichi che $H_S = \hbar\omega (b^+ b - 1/2)$ e

$$\{Q, Q^+\} = \hbar\omega (N + \bar{N}) = H_{\perp} + H_S ,$$

dove $Q := \sqrt{\hbar\omega} ab^+$ e $N := a^+ a$.

Problema 1

1. $|11\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$, $|10\rangle = 2^{-1/2}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$, $|1-1\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$, da cui

$$|11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) .$$

2. Poiché $|10\rangle = 2^{-1/2}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$, si avrà certamente $m_s^{(2)} = -\hbar/2$ (entanglement).

3. In questo caso la misura di $S_z^{(1)}$ non ha effetto sui possibili valori di $m_s^{(2)}$ (disentanglement), si avrà quindi $m_s^{(2)} = -\hbar/2$ o $m_s^{(2)} = \hbar/2$, con equiprobabilità.

4. Si ha

$$|0\rangle = 2^{-1/2}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) , \quad |1\rangle = 2^{-1/2}(|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + i|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) ,$$

$$|2\rangle = 2^{-1/2}(|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - i|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) , \quad |3\rangle = 2^{-1/2}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - i|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) .$$

5. Ponendo

$$|\psi_1\rangle = b_+|\uparrow\rangle + b_-|\downarrow\rangle , \quad |\psi_2\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle , \quad |\psi_3\rangle = d_+|\uparrow\rangle + d_-|\downarrow\rangle ,$$

il membro destro della relazione diventa

$$\begin{aligned} & 2^{-3/2} [(a_+ + ib_+)|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + (ia_+ + b_+)|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ & + (a_- + ib_-)|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + (ia_- + b_-)|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\ & + (c_+ - id_+)|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + (-ic_+ + d_+)|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ & + (c_- - id_-)|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + (-ic_- + d_-)|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle] . \end{aligned}$$

D'altronde

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle = 2^{-1/2}(a_+|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + ia_+|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + a_-|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + ia_-|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) ,$$

da cui $b_{\pm} = \mp ia_{\pm}$, $c_{\pm} = \pm a_{\mp}$, $d_{\pm} = ia_{\mp}$. Quindi

$$|\psi_1\rangle = -ia_+|\uparrow\rangle + ia_-|\downarrow\rangle , \quad |\psi_2\rangle = a_-|\uparrow\rangle - a_+|\downarrow\rangle , \quad |\psi_3\rangle = ia_-|\uparrow\rangle + ia_+|\downarrow\rangle ,$$

e, poiché $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_i|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$, risulta $|\psi_i\rangle = U_i|\psi\rangle$, con U_i operatore unitario.

Problema 2

1. Poiché

$$\frac{d\vec{X}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{X}]_H(t) = \frac{1}{m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)_H(t) ,$$

si ha

$$\vec{V} = \frac{1}{m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) .$$

2.

$$[V_i, V_j] = -\frac{e}{m^2 c} [P_i, A_j] + \frac{e}{m^2 c} [P_j, A_i] = \frac{ie\hbar}{m^2 c} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \frac{ie\hbar}{m^2 c} \epsilon_{ijk} B_k .$$

Quindi

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{V})^2 &= \sigma_i \sigma_j V_i V_j = \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) V_i V_j \\ &= (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k) V_i V_j = \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k [V_i, V_j] = \vec{V}^2 - \frac{e\hbar}{m^2 c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} . \end{aligned}$$

Anche se non richiesto nel testo, si osservi che

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{V}] = \frac{im}{2\hbar} [\vec{V}^2, \vec{V}] = -\frac{e}{mc} \vec{V} \times \vec{B} .$$

3. Si ha

$$H_{\perp} = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 ,$$

dove

$$Q := \omega^{-1} V_1 , \quad P := m V_2 .$$

Poiché

$$[Q, P] = i\hbar ,$$

segue che H_{\perp} descrive un oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω . In particolare

$$a := \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} (V_1 + iV_2) .$$

4. $\text{Sp}(\bar{N}) = \{0, 1\}$. Le relazioni $b^2 = 0 = b^{+2}$ e $\{b, b^+\} = 1$ si verificano immediatamente.

5. Si ha $b^+ b = (1 - \sigma_3)/2$, da cui $H_S = \hbar\omega(b^+ b - 1/2)$. Inoltre

$$\{Q, Q^+\} = \hbar\omega(aa^+ b^+ b + a^+ a b b^+) = \hbar\omega(b^+ b + a^+ a \{b^+, b\}) = \hbar\omega(b^+ b + a^+ a) = H_{\perp} + H_S .$$