

Prova scritta di Fisica Teorica
Padova - Dipartimento di Fisica - 9 Luglio 2007

Problema 1

Si consideri l'hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 X^2 + AX^3 + BX^4 ,$$

con A e $B > 0$ costanti.

1. Si determini $\text{Sp}(H)$ all'ordine \hbar^2 , ignorando la possibile dipendenza di A e B da \hbar .
2. Si denoti con ΔE_n la correzione al secondo ordine, e si ponga $E_n = E_n^0 + \Delta E_n$, con $E_n^0(\omega) = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, \dots$. Si determini la condizione che A e B devono soddisfare affinché
 - a) E_n dipenda da n solo quadraticamente;
 - b) ΔE_n sia indipendente da n . Denotando con \bar{E}_n il valore di E_n in tal caso, si determini B per cui $\bar{E}_{2n} = E_n^0(2\omega)$, $n = 0, 1, \dots$
3. Siano $|n\rangle$, $n = 0, 1, \dots$, gli autoket dell'hamiltoniana imperturbata $H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 X^2$, e \mathcal{P} l'operatore parità. Si determinino gli elementi di matrice

$$\langle n|[H, \mathcal{P}]|n\rangle , \quad \langle n|[H, \mathcal{P}]|n-1\rangle , \quad \langle n|[H, \mathcal{P}]|n-3\rangle .$$

Problema n.2

Si consideri una particella di spin $1/2$, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{e\hbar}{mc}Bs_y ,$$

con s_y la componente lungo l'asse y dell'operatore di spin e B una costante.

1. Supponendo che al tempo $t = 0$ la probabilità di avere $-\hbar/2$ come risultato di una misura di s_y sia $1/3$, si determini a tale istante il massimo valore possibile per il valor medio di s_z .
2. Supponendo che a $t = 0$ lo stato del sistema sia tale che il valor medio di s_z sia effettivamente massimo, si determini il valor medio di s_z per $t > 0$.

Soluzioni (preliminare)

Problema 1

1. Gli unici elementi non nulli della matrice $\langle m|X|n\rangle$ sono

$$\langle n|X|n-1\rangle = \langle n-1|X|n\rangle = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} ,$$

per cui gli elementi di matrice non nulli di X^3 sono

$$\langle n-1|X^3|n\rangle = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{n^3}{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} ,$$

$$\langle n-3|X^3|n\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

Non essendoci elementi diagonali, il termine X^3 non contribuisce alla correzione data dalla prima approssimazione. Quindi X^3 inizia a contribuire dalla seconda approssimazione. Il termine in X^4 ha invece il termine diagonale

$$\langle n|X^4|n\rangle = \frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 .$$

All'ordine richiesto si ha quindi

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega - \frac{15}{4}A^2(n^2 + n + 11/30)\frac{\hbar^2}{m^3\omega^4} + \frac{3}{2}B(n^2 + n + 1/2)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 .$$

2. Il termine in E_n lineare in n scompare se

$$B = \frac{5}{2}\frac{A^2}{m\omega^2} - \frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar} ,$$

cosicch 

$$E_n = (n^2 + 1)\hbar\omega .$$

3. L'indipendenza da n di ΔE_n la si ottiene per

$$B = \frac{5}{2}\frac{A^2}{m\omega^2} ,$$

da cui

$$\Delta E_n = \frac{B}{5}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 , \quad \bar{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega + \frac{B}{5}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 .$$

Imponendo $\bar{E}_0 = E_0^0(2\omega)$, si ottiene

$$B = \bar{B} \equiv \frac{5}{2} \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} , \quad \bar{E}_n(\bar{B}) = (n+1)\hbar\omega ,$$

quindi

$$\bar{E}_{2n}(\bar{B}) = (2n+1)\hbar\omega = (n+1/2)\hbar 2\omega = E_n^0(2\omega) .$$

4. Si ha $[H, \mathcal{P}] = -2AX^3$. Gli elementi di matrice di X^3 , già calcolati precedentemente, danno $\langle n|[H, \mathcal{P}]|n\rangle = 0$, e

$$\langle n|[H, \mathcal{P}]|n-1\rangle = -3A\sqrt{\frac{n^3}{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} , \quad \langle n|[H, \mathcal{P}]|n-3\rangle = -A\sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{3}{2}} .$$