

**Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 19 Dicembre 2005**

Problema n.1

Una particella unidimensionale di massa m e carica q è soggetta ad un potenziale armonico e ad un campo elettrostatico omogeneo E di modo tale che l'hamiltoniana sia

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx .$$

1. Si determinino autovalori ed autovettori del problema.

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi(0)\rangle$ corrispondente allo stato fondamentale dell'oscillatore armonico imperturbato H_0 . Si denotino con $|n\rangle$ e $|\bar{n}\rangle$ gli autostati di H_0 e H rispettivamente. Sapendo che

$$\langle 0|\bar{n}\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} l \right)^n e^{-m\omega l^2/4\hbar} , \quad l \equiv qE/m\omega^2 , \quad (1)$$

si calcoli la probabilità che un'opportuna misura effettuata al tempo $t \geq 0$ riveli che il sistema si trova

2. nello stato $|\bar{0}\rangle$;
3. nello stato $|0\rangle$;
4. nello stato $|1\rangle$. Per il calcolo esplicito di tale probabilità può essere utile la seguente relazione

$$\langle 1|\bar{n}\rangle = \sqrt{n}\langle 0|\bar{n-1}\rangle + l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle 0|\bar{n}\rangle . \quad (2)$$

5. Si determini il valor medio dell'operatore posizione nello stato $|\psi(t)\rangle$.
6. (facoltativo) Siano a^+ ed a gli operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico e $p = -i\sqrt{m\omega\hbar/2}(a - a^+)$ l'operatore momento.

Si mostri l'eq.(1) tenendo presente la relazione $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$, valida per operatori tali che $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$. Si mostri inoltre che l'eq.(2) è un'immediata conseguenza della relazione

$$[a, e^{-ilp/\hbar}] = l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-ilp/\hbar} ,$$

che a sua volta segue da

$$[a, p^n] = in\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} p^{n-1} .$$

Problema n.2

Si supponga che al tempo $t = 0$ la funzione d'onda di una particella di spin $1/2$ sia fattorizzata in una parte di spin ed una parte spaziale corrispondente a

$$\phi = yf(r) ,$$

dove f è una funzione non specificata del modulo r del raggio vettore. Sia $\mathbf{L} \equiv (L_x, L_y, L_z)$ l'operatore momento angolare.

1. Si determinino i possibili risultati, con le relative probabilità, di un'eventuale misura, effettuata al tempo $t = 0$, delle osservabili relative agli operatori \mathbf{L}^2 e L_z .
2. Si calcoli, al tempo $t = 0$, il valor medio dell'operatore parità. Si illustri cosa sia possibile prevedere, con le informazioni sinora disponibili, riguardo il valor medio di tale operatore al tempo $t > 0$.

Si supponga ora che l'hamiltoniana del sistema sia nota e che questa sia

$$H = c\mathbf{J}^2 ,$$

dove $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ con \mathbf{S} l'operatore di spin, e c una costante. Supponendo che al tempo $t_0 \geq 0$ venga effettivamente eseguita una misura e che questa riveli che la particella si trova nello stato

$$|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle ,$$

si calcoli, al tempo $t_1 \geq t_0$,

3. il valor medio di J_z ;
4. il valor medio di J_x .
5. (facoltativo) Si mostri che lo stato $e^{-i\pi L_z/2\hbar}|l = 1, l_y = 1\rangle$ è autostato di L_x .

Si osservi che

$$|3/2, 3/2\rangle_J = |1, 1/2\rangle ,$$

$$|3/2, 1/2\rangle_J = (1/3)^{1/2}|1, -1/2\rangle + (2/3)^{1/2}|0, 1/2\rangle ,$$

$$|1/2, 1/2\rangle_J = (2/3)^{1/2}|1, -1/2\rangle - (1/3)^{1/2}|0, 1/2\rangle ,$$

dove gli stati $|\cdot, \cdot\rangle_J$ sono caratterizzati dai numeri quantici j e j_z , (per esempio $|3/2, 1/2\rangle_J \equiv |j = 3/2, j_z = 1/2\rangle_J$), mentre gli stati $|\cdot, \cdot\rangle$ sono caratterizzati dai numeri quantici m_l ed m_s (per esempio $|1, 1/2\rangle \equiv |m_l = 1, m_s = 1/2\rangle$).

Soluzioni

Problema 1

Poiché $e^{ilp/\hbar} x e^{-ilp/\hbar} = x + l$, si ha

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - qE/m\omega^2)^2 - \frac{q^2 E^2}{2m\omega^2} = e^{-ilp/\hbar} H_0 e^{ilp/\hbar} - \frac{q^2 E^2}{2m\omega^2} ,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico e $l \equiv qE/m\omega^2$. Gli autostati sono

$$|\bar{n}\rangle = e^{-ilp/\hbar} |n\rangle ,$$

ovvero

$$\bar{\psi}_n(x) = \psi_n(x - l) ,$$

con autovalori

$$\bar{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega - \frac{m\omega^2}{2}l^2 .$$

La soluzione del resto del problema è agevolata dal fatto che il testo fornisce l'espressione esplicita dei coefficienti $\langle 0|\bar{n}\rangle$ e $\langle 1|\bar{n}\rangle$. Nel rispondere ai rimanenti punti, mostriamo il calcolo di tali coefficienti seguendo il suggerimento della domanda facoltativa. In tal modo evitiamo la valutazione di tali coefficienti calcolando tramite calcolo integrale.

Si ha

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \bar{n}|0\rangle e^{-i\bar{E}_n t/\hbar} |\bar{n}\rangle .$$

Probabilità al punto 2:

$$|\langle \bar{0}|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle \bar{0}|0\rangle e^{-i\bar{E}_0 t/\hbar}|^2 = e^{-m\omega l^2/2\hbar} .$$

L'ampiezza necessaria per il punto 3. è

$$\langle 0|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \bar{n}|0\rangle e^{-i\bar{E}_n t/\hbar} \langle 0|\bar{n}\rangle .$$

D'altronde

$$e^{-ilp/\hbar} = e^{l\sqrt{m\omega/2\hbar}a^+} e^{-l\sqrt{m\omega/2\hbar}a} e^{-m\omega l^2/4\hbar} ,$$

quindi

$$\langle 0|\bar{n}\rangle = e^{-m\omega l^2/4\hbar} \langle 0|e^{-l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a}|n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-m\omega l^2/4\hbar}}{\sqrt{k!}} \left(-l\sqrt{m\omega/2\hbar}\right)^k \langle k|n\rangle = \frac{e^{-m\omega l^2/4\hbar}}{\sqrt{n!}} \left(-l\sqrt{m\omega/2\hbar}\right)^n ,$$

che è l'eq.1 del testo. La probabilità richiesta risulta

$$|\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = e^{-2\frac{m\omega l^2}{\hbar}\alpha(t)} ,$$

dove $\alpha(t) \equiv \sin^2(\omega t/2)$.

L'ampiezza necessaria per il punto 4 è

$$\langle 1|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \bar{n}|0\rangle e^{-i\bar{E}_n t/\hbar} \langle 1|\bar{n}\rangle .$$

D'altronde

$$\langle 1|\bar{n}\rangle = \langle 0|ae^{-ilp/\hbar}|n\rangle = \langle 0|e^{-ilp/\hbar}a + [a, e^{-ilp/\hbar}]|n\rangle = \langle 0|e^{-ilp/\hbar}a|n\rangle + l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle 0|e^{-ilp/\hbar}|n\rangle ,$$

che è l'eq.2 del testo. La probabilità richiesta al punto 4 risulta quindi

$$|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = 2\frac{m\omega l^2}{\hbar}\alpha(t)e^{-2\frac{m\omega l^2}{\hbar}\alpha(t)} .$$

Si noti che

$$|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = -|\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 \ln |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 .$$

Per quanto riguarda il valor medio richiesto al punto 5, si ha

$$\langle \psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \sum_{n,n'=0}^{\infty} \langle 0|\bar{n}\rangle \langle \bar{n}'|0\rangle e^{-i\omega t(n-n')} \langle n|e^{ilp/\hbar}xe^{-ilp/\hbar}|n'\rangle .$$

Poiché $e^{ilp/\hbar}xe^{-ilp/\hbar} = x + l$, e

$$\langle n|x|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1}) ,$$

che segue immediatamente dall'espressione di x in termini di a e a^+ , si ha

$$\langle \psi(t)|x|\psi(t)\rangle = 2l\alpha(t) .$$

Problema 2

La parte angolare della funzione d'onda è

$$Y_{1,1} + Y_{1,-1} ,$$

quindi $P(l = 1) = 1$, $P(m = -1) = 1/2 = P(m = 1)$. L'azione dell'operatore parità è semplicemente $y \rightarrow -y$, in accordo con il fatto che le armoniche sferiche hanno parità $(-1)^l$. Di conseguenza lo stato è autostato dell'operatore parità con autovalore -1 , risulta quindi tale anche il suo valor medio. Poiché fino a questo punto nel testo non è stata ancora specificata l'hamiltoniana, non è possibile fare alcuna previsione sul valor medio della parità per $t > 0$.

E' possibile rispondere ai punti 3 e 4 esprimendo prima lo stato con $m_l = 1$, $m_s = -1/2$ in termini degli stati indicizzati dai numeri quantici J e J_z . Successivamente, poiché $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$, $i = x, y, z$, si può valutare il valor medio richiesto semplicemente al tempo t_0 . Comunque, poiché $J_z = L_z + S_z$, segue che lo stato $|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ è uno stato con J_z determinato. In altre parole $J_z|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle = \frac{\hbar}{2}|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$, proprietà che continua a valere anche sotto evoluzione temporale

$$J_z e^{-iHt/\hbar} |m_l = 1, m_s = -1/2\rangle = \frac{\hbar}{2} e^{-iHt/\hbar} |m_l = 1, m_s = -1/2\rangle .$$

Non è quindi necessario esprimere $e^{-iHt/\hbar} |m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ in autostati di \mathbf{J}^2 e J_z per stabilire che

$$\langle J_z \rangle_{t_1} = \frac{\hbar}{2} .$$

Analogo ragionamento vale per il valor medio di J_x . Infatti, poiché $J_x = L_x + S_x$, si ha

$$J_x = \frac{1}{2}(L_+ + S_+ + L_- + S_-) ,$$

il che mostra che $J_x|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$ è uno stato ortogonale a $|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle$. Quindi

$$\langle J_x \rangle_{t_1} = 0 .$$

La domanda facoltativa è di immediata soluzione se si osserva che $e^{-i\pi L_z/2\hbar}$ è l'operatore di rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse z . Per verificare con il calcolo diretto conviene esprimere $|l = 1, l_y = 1\rangle$ in autostati dell'operatore L_z . Si ha

$$|l = 1, l_y = 1\rangle = \frac{i}{2}|1, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{i}{2}|1, 1\rangle ,$$

da cui, utilizzando la relazione $L_x = (L_+ + L_-)/2$, si verifica immediatamente che

$$L_x e^{-i\pi L_z/2\hbar} |l = 1, l_y = 1\rangle = -\hbar e^{-i\pi L_z/2\hbar} |l = 1, l_y = 1\rangle .$$