

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 14 Novembre 2005

Una particella unidimensionale di massa m è confinata in una buca di potenziale definita dalla funzione $V(x) = 0$, per $-a \leq x \leq a$ e $V(x) = +\infty$ altrove. All'istante $t = 0$ il sistema è descritto da uno stato $|\psi\rangle$ corrispondente ad una combinazione lineare del primo e del terzo autostato dell'hamiltoniana H , tale che

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} .$$

1. Mostrare che lo stato è determinato a meno di una fase relativa $e^{i\alpha}$.
2. Si determinino gli istanti positivi per i quali sia massima la probabilità che il sistema si trovi nello stato, combinazione lineare del primo e del terzo autostato di H , ortogonale a $|\psi\rangle$.
3. Si determini, al tempo $t \geq 0$, l'eventuale dipendenza del valor medio dell'operatore posizione da α .
4. Al tempo $t_0 \geq 0$ un'opportuna misura rivela che la particella si trova nella regione $[-a/2, a/2]$. Si scriva la funzione d'onda al tempo $t \geq t_0$ e si determinino i possibili risultati, con le rispettive probabilità, di una misura dell'energia eseguita al tempo $t \geq t_0$.
5. Si determinino i possibili risultati e le relative probabilità di una misura di parità eseguita al tempo $t \geq t_0$. Si calcoli il valor medio dell'operatore posizione al tempo $t \geq t_0$.
6. Sia $|\psi(t_0)\rangle$ lo stato del sistema al tempo t_0 . Si determini il valore massimo di a per cui

$$e^{-ik\frac{Ht_0}{\hbar}}|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle , \quad \forall k \in \mathbf{N} .$$

N.B. Non è richiesto il calcolo esplicito della classe di integrali che compaiono nella soluzione del punto 4 se non per quelli immediatamente valutabili.

1.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{7}|\psi_1\rangle + e^{i\alpha}|\psi_3\rangle) .$$

2.

$$|\psi_\perp\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-i\alpha}|\psi_1\rangle - \sqrt{7}|\psi_3\rangle) ,$$

$$\langle\psi_\perp|e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi\rangle = \frac{\sqrt{7}}{8}e^{i\alpha}(e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_3t}{\hbar}}) ,$$

$$|\langle\psi_\perp|e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi\rangle|^2 = \frac{7}{32}\left[1 - \cos\frac{(E_1 - E_3)t}{\hbar}\right] .$$

$$t_{Max} = \frac{\hbar}{E_3 - E_1}(2n + 1)\pi , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

si osservi che la positività di t_{Max} è garantita dalla positività di $E_3 - E_1$.

3. Il valor medio dell'operatore di posizione X è dato da una somma di integrali di funzioni dispari su intervallo simmetrico, quindi

$$\langle\psi|e^{i\frac{Ht}{\hbar}}Xe^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi\rangle = 0 .$$

4.

$$\psi(x, t_0) = \frac{A}{2\sqrt{2}}[\sqrt{7}e^{-i\frac{E_1t_0}{\hbar}}\psi_1(x) + e^{i\alpha}e^{-i\frac{E_3t_0}{\hbar}}\psi_3(x)] , \quad \text{per } x \in [-a/2, a/2] ,$$

$$\psi(x, t_0) = 0 , \quad \text{altrove} ,$$

dove A è la costante di normalizzazione (calcolata sotto). Si ha

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle , \quad c_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx \psi_n(x) \psi(x, t_0) .$$

Poiché $c_{2n} = 0$, $n \in \mathbf{N}$, risulta

$$|\psi(t \geq t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} e^{-i\frac{E_{2n+1}(t-t_0)}{\hbar}} |\psi_{2n+1}\rangle .$$

$$\mathcal{P}_t(E_{2n+1}) = \mathcal{P}_{t_0}(E_{2n+1}) = |c_{2n+1}|^2 , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Normalizzazione:

$$1 = \frac{|A|^2}{4\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt (7 \cos^2 t + \cos^2 3t + 2\sqrt{7} \cos \beta \cos t \cos 3t) ,$$

dove $\beta = \alpha + (E_1 - E_3)t_0/\hbar$. Poiché

$$\int dt \cos^2 nt = \frac{1}{2n} \sin nt \cos nt + \frac{t}{2} + c , \quad \int dt \cos t \cos 3t = \frac{1}{8} \sin 4t + \frac{1}{4} \sin 2t + c ,$$

si ha

$$1 = \frac{|A|^2}{4\pi} [7/2(1 + \pi/2) + 1/2(-1/3 + \pi/2) + \sqrt{7} \cos \beta] ,$$

cioè

$$A = 2\sqrt{\frac{3\pi}{10 + 6\pi + 3\sqrt{7} \cos \beta}} .$$

5. La misura ha conservato la parità dello stato. Poiché l'operatore parità commuta con l'hamiltoniana, ne segue che una misura di parità darà sempre risultato +1 ed il valor medio di X è sempre nullo.

6.

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi\hbar t_0}{m}} .$$