

Prova scritta di Fisica Teorica
Padova - Dipartimento di Fisica - 21 Marzo 2005

Problema n.1

Si consideri l'hamiltoniana H_0 di un oscillatore armonico di pulsazione ω e massa m .

1. Si supponga di aggiungere una perturbazione per cui la nuova hamiltoniana è

$$H = H_0 + \frac{1}{2}m\alpha^2 x^2 ,$$

con α costante. Si calcolino, fino al secondo ordine, le correzioni perturbative allo spettro di H_0 e si confrontino i livelli approssimati ottenuti con quelli esatti di H .

2. Si supponga ora che l'hamiltoniana perturbata sia

$$H = H_0 + a\hbar^{\frac{1}{2}}x + bx^3 + c\hbar x^4 ,$$

con a, b e $c > 0$ costanti. Si calcolino le prime due correzioni $E_n^{(1)}$ ed $E_n^{(2)}$ che contribuiscono allo spettro di H limitandosi comunque al secondo ordine in \hbar .

Problema n.2

Una particella di spin $1/2$ ha una funzione d'onda la cui dipendenza spaziale è

$$\psi = x e^{-ar} ,$$

dove a è una costante.

1. Si determinino i possibili risultati, con le relative probabilità, di una misura della terza componente L_z del momento angolare orbitale L .
2. È noto che la componente dello spin della particella lungo l'asse z è $\frac{1}{2}\hbar$. Si calcolino le probabilità che una misura della terza componente del momento angolare totale J_z dia come risultato 0 o $\frac{3}{2}\hbar$.
3. Si calcoli la probabilità che una misura di J^2 e J_z dia come risultato $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $-\frac{1}{2}\hbar$ rispettivamente.
4. Si supponga che la misura descritta al punto precedente sia stata eseguita ed abbia dato i risultati indicati. Si supponga inoltre che una successiva misura, eseguita al tempo $t = 0$, abbia rivelato che la particella è nello stato con valore della componente dello spin lungo l'asse z pari a $-\frac{1}{2}\hbar$. Si calcoli, per $t \geq 0$, il valor medio della componente S_x dell'operatore di spin S sapendo che l'hamiltoniana è

$$H = cL \cdot S ,$$

dove c è una costante.

Soluzioni

Problema n.1

1. Si ha

$$E_n^{(1)} = \frac{1}{2}m\alpha^2 \langle n|x^2|n \rangle = \frac{\hbar\alpha^2}{4\omega} \langle n|(a + a^\dagger)^2|n \rangle = (n + 1/2) \frac{\hbar\alpha^2}{2\omega} ,$$

e

$$E_n^{(2)} = \frac{1}{2}m\alpha^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle n|x^2|k \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} .$$

Osservando che gli unici elementi di matrice non nulli sono $\langle n|a^2|n+2 \rangle$ e $\langle n|a^{+2}|n-2 \rangle$, si ha

$$E_n^{(2)} = -(n + 1/2) \frac{\hbar\alpha^4}{8\omega^3} .$$

D'altronde espandendo al secondo ordine la radice nei livelli esatti

$$E_n = (n + 1/2)\hbar(\omega^2 + \alpha^2)^{1/2} ,$$

si ottengono precisamente le correzioni $E_n^{(1)}$ ed $E_n^{(2)}$.

2. L'unico elemento di matrice non nullo per l'operatore x è

$$\langle n-1|x|n \rangle = \langle n|x|n-1 \rangle = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}} .$$

Quindi né il termine in x né quello in x^3 possono contribuire ad $E_n^{(1)}$. Ne segue che gli unici contributi provengono dalla correzione $E_n^{(2)}$ dovuta al termine $a\hbar^{\frac{1}{2}}x + bx^3$. Gli elementi di matrice non nulli di x^3 sono

$$\langle n-1|x^3|n \rangle = \langle n|x^3|n-1 \rangle = 3 \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{n^3}{8}} ,$$

e

$$\langle n-3|x^3|n \rangle = \langle n|x^3|n-3 \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{8}} .$$

Quindi lo spettro di H fino al secondo ordine in \hbar , escluse le correzioni successive ad $E_n^{(2)}$, risulta

$$E_n^{(0)} + E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle n|a\hbar^{\frac{1}{2}}x + bx^3|k \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{a^2\hbar}{2m\omega^2} - \frac{15}{4} \frac{b^2}{m^3\omega^4} \hbar^2 \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right) .$$

Problema n.2

1. Si ha $x = -\frac{r}{2}(8\pi/3)^{1/2}(Y_1^{-1} - Y_1^{+1})$, quindi la parte angolare corrisponde allo stato con $l = 1$ e $m = \pm 1$, e le probabilità richieste sono

$$P(m_l = -1) = 1/2, \quad P(m_l = 1) = 1/2.$$

2. La parte angolare e di spin è descritta dallo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1 \ 1/2\rangle - |1 \ 1/2\rangle).$$

$m_J = 0$ non può essere tra i valori possibili nella composizione di momento angolare e spin semintero. Inoltre i due stati nel secondo membro hanno $m_J = -1/2$ e $m_J = 3/2$ ($m_J = m_l + m_s$, $|1 \ 1/2\rangle = |3/2 \ 3/2\rangle_J$), quindi

$$P(m_J = 0) = 0, \quad P(m_J = 3/2) = 1/2.$$

3. Poiché

$$|1/2 \ -1/2\rangle_J = \frac{1}{\sqrt{3}}|0 \ -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-1 \ 1/2\rangle, \quad (1)$$

si ha

$$P(J = 1/2, m_J = -1/2) = |\langle\psi|1/2 \ -1/2\rangle_J|^2 = \frac{1}{3}.$$

4. La I misura rivela che lo stato è $|1/2 \ -1/2\rangle_J$, la II che $m_s = -1/2$. Da Eq.(1) segue che lo stato dopo la II misura è $|0 \ -1/2\rangle$ che in rappresentazione J, m_J è

$$|0 \ -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1/2 \ -1/2\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{3}}|3/2 \ -1/2\rangle_J.$$

Trattandosi di stati di spin $1/2$ e con L fissato, si ha $L \cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) = \frac{1}{2}J^2 - \frac{11}{8}\hbar^2$. Poiché $[J_z, H] = 0$ e $|0 \ -1/2\rangle$ è autostato di J_z (con autovalore $-\hbar/2$), si ha che l'evoluto temporale di $|0 \ -1/2\rangle$ è ancora autostato J_z (sempre con autovalore $-\hbar/2$). D'altronde S_x mappa stati con fissato autovalore di J_z a stati ad essi ortogonali. Ne segue che il valor medio richiesto è nullo a qualsiasi istante.

Effettuiamo i calcoli esplicitamente. L'evoluto temporale dello stato è

$$e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|0 \ -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\hbar t}|1/2 \ -1/2\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{\epsilon}{2}\hbar t}|3/2 \ -1/2\rangle_J. \quad (2)$$

Essendo $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, e poiché per qualunque operatore di momento angolare

$$j_{\pm}|j \ m_j\rangle = [j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)]^{1/2}|j \ m_j \pm 1\rangle,$$

si ha che per particelle di spin $1/2$

$$S_x|\pm 1/2\rangle = \frac{1}{2}S_{\mp}|\pm 1/2\rangle = \frac{1}{2}|\mp 1/2\rangle .$$

Dalla (1) segue che

$$S_x|1/2 \ -1/2\rangle_J = \frac{1}{2\sqrt{3}}|0 \ 1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|-1 \ -1/2\rangle .$$

Inoltre, poiché

$$|3/2 \ -1/2\rangle_J = \sqrt{\frac{2}{3}}|0 \ -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-1 \ 1/2\rangle , \quad (3)$$

si ha

$$S_x|3/2 \ -1/2\rangle_J = \frac{1}{\sqrt{6}}|0 \ 1/2\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}|-1 \ -1/2\rangle .$$

Ne segue che

$$S_x e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|0 \ -1/2\rangle = \frac{1}{3}f_+(t)|0 \ 1/2\rangle + \frac{1}{3\sqrt{2}}f_-(t)|-1 \ -1/2\rangle ,$$

dove

$$f_{\pm}(t) = e^{-i\frac{\sigma}{2}\hbar t} \pm e^{i\hbar t} .$$

Poiché da (1)(2) e (3) segue che lo stato $e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|0 \ -1/2\rangle$ non contiene né $|0 \ 1/2\rangle$ né $|-1 \ -1/2\rangle$, ne segue che il valor medio richiesto è nullo.