

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 12 Settembre 2006

Problema n.1

Una particella unidimensionale è confinata nel segmento $0 < x < L$. All'istante $t = 0$ la funzione d'onda del sistema è

$$\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

e nulla altrove.

1. Si dimostri che l'operatore \mathcal{P}_L , definito come $(\mathcal{P}_L)f(x) = f(-x + L)$, $f \in L^2[0, L]$, è autoaggiunto e unitario.
2. Si determinino spettro e autofunzioni di \mathcal{P}_L .
3. Si determinino i possibili risultati e le rispettive probabilità di un'eventuale misura di \mathcal{P}_L effettuata al tempo $t > 0$.
4. Supponendo che la misura al punto precedente non sia stata effettuata, si determinino i possibili valori e le relative probabilità di una misura di \mathcal{P}_L , effettuata ad un tempo $t > 0$, nel caso in cui all'istante $t = 0^+$ sia stata effettuata una misura di energia da cui è risultato che il sistema si trova nello stato fondamentale ψ_1 .
5. Si supponga che al tempo $t = 0^+$ il sistema si trovi nello stato ψ_1 descritto al punto precedente ma che invece della misura di \mathcal{P}_L venga effettuata, al tempo $t_1 > 0$, un'opportuna misura da cui risulta che la particella si trova nell'intervallo $0 < x < L/2$. Si determini la funzione d'onda del sistema al tempo $t \geq t_1$.

Problema n.2

Una particella di spin $1/2$ si trova, al tempo $t = 0$, nell'autostato dell'operatore di spin S_x con autovalore $-\hbar/2$. L'hamiltoniana del sistema è $H = AS_z$, con A costante.

1. Si determinino, al tempo $t = 0$, i possibili risultati e le relative probabilità di una misura relativa a S_z .
2. Si determini lo stato al tempo $t > 0$.
3. Si determini la probabilità che una misura di S_x effettuata al tempo $t > 0$ dia come risultato $-\hbar/2$.
4. Si calcolino i valori medi di S_x , S_y e S_z al tempo $t > 0$.

N.B. Tutte le misure considerate nei due problemi sono ideali di prima specie.