

Prova scritta di Fisica Teorica
Padova - Dipartimento di Fisica - 21 Marzo 2007

Problema 1

Due particelle non identiche di spin $1/2$ si trovano, al tempo $t = 0$, nello stato

$$|\psi\rangle = |1/2, -1/2\rangle .$$

L'hamiltoniana del sistema è

$$H = a_1 \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} + a_2 S_z^{(1)} + a_3 S_z^{(2)} ,$$

con a_1, a_2, a_3 costanti reali. Si determinino

1. $\text{Sp}(H)$;
2. $e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi\rangle$, $t \geq 0$;
3. ${}_S\langle 1, m | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi\rangle$, $t \geq 0$, $m = -1, 0, 1$, dove $S_z |1, m\rangle_S = m\hbar |1, m\rangle_S$, con $\vec{S} := \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$.

Problema 2

Si consideri la seguente hamiltoniana relativa ad una particella di spin $1/2$

$$H = a S_z + b S_x ,$$

con a e b costanti reali. Si determinino

1. $\text{Sp}(H)$;
2. le correzioni fino al secondo ordine a $\text{Sp}(H^{(0)})$, considerando $b S_x$ come termine perturbativo rispetto all'hamiltoniana $H^{(0)} = a S_z$;
3. l'equazione del moto, in rappresentazione di Heisenberg, soddisfatta dall'operatore $H_H^{(0)}(t)$.
4. Si risponda ai punti 2 e 3, considerando $H' := H^{(0)}$ l'hamiltoniana del sistema e $H'^{(0)} := H$ l'hamiltoniana imperturbata.
5. Si determini $\langle S_x \rangle_t$, $t \geq 0$, supponendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema sia autostato di S_x con autovalore $\hbar/2$.

Problema 1

1. Si noti che

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{a_1}{2}(S_+^{(1)}S_-^{(2)} + S_-^{(1)}S_+^{(2)}) + a_1S_z^{(1)}S_z^{(2)} + a_2S_z^{(1)} + a_3S_z^{(2)} , \\
 H|1/2, 1/2\rangle &= \frac{\hbar}{4}(a_1\hbar + 2a_2 + 2a_3)|1/2, 1/2\rangle , \\
 H|-1/2, -1/2\rangle &= \frac{\hbar}{4}(a_1\hbar - 2a_2 - 2a_3)|-1/2, -1/2\rangle , \\
 H|1/2, -1/2\rangle &= a_1\frac{\hbar^2}{2}|-1/2, 1/2\rangle + \frac{\hbar}{4}(-a_1\hbar + 2a_2 - 2a_3)|1/2, -1/2\rangle , \\
 H|-1/2, 1/2\rangle &= a_1\frac{\hbar^2}{2}|1/2, -1/2\rangle + \frac{\hbar}{4}(-a_1\hbar - 2a_2 + 2a_3)|-1/2, 1/2\rangle .
 \end{aligned}$$

Possiamo quindi risolvere l'equazione $H|ij\rangle = E_{ij}|ij\rangle$, $i, j = -, +$, prima osservando che

$$\begin{aligned}
 |++\rangle &= |1/2, 1/2\rangle , & E_{++} &= \frac{\hbar}{4}(a_1\hbar + 2a_2 + 2a_3) , \\
 |--\rangle &= |-1/2, -1/2\rangle , & E_{--} &= \frac{\hbar}{4}(a_1\hbar - 2a_2 - 2a_3) .
 \end{aligned}$$

Gli altri due stati, dovendo essere ortogonali, avranno la forma

$$\begin{aligned}
 |+-\rangle &= \cos\alpha|1/2, -1/2\rangle + \sin\alpha|-1/2, 1/2\rangle , \\
 |-+\rangle &= \sin\alpha|1/2, -1/2\rangle - \cos\alpha|-1/2, 1/2\rangle .
 \end{aligned}$$

Richiedendo $H|+-\rangle = E_{+-}|+-\rangle$ o, equivalentemente, $H|-+\rangle = E_{-+}|-+\rangle$, si ottiene, ricordando che $\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha/(1 - \tan^2\alpha)$,

$$a_1\hbar^2\tan^2\alpha + 2\hbar(a_2 - a_3)\tan\alpha - a_1\hbar^2 = 0 , \quad \tan 2\alpha = a_1\hbar/(a_2 - a_3) ,$$

quindi

$$E_{+-} = a_1\frac{\hbar^2}{2}\cot\alpha + \frac{\hbar}{4}(-a_1\hbar - 2a_2 + 2a_3) , \quad E_{-+} = -a_1\frac{\hbar^2}{2}\cot\alpha + \frac{\hbar}{4}(-a_1\hbar + 2a_2 - 2a_3) .$$

2.

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}E_{+-}t}\cos\alpha|+-\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-+}t}\sin\alpha|-+\rangle = \\
 &= (e^{-\frac{i}{\hbar}E_{+-}t}\cos^2\alpha + e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-+}t}\sin^2\alpha)|1/2, -1/2\rangle + (e^{-\frac{i}{\hbar}E_{+-}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-+}t})\cos\alpha\sin\alpha|-1/2, 1/2\rangle , \\
 &t \geq 0.
 \end{aligned}$$

3. Poiché $|1, 0\rangle_S = 2^{-1/2}(|1/2, -1/2\rangle + |-1/2, 1/2\rangle)$ è l'unico tra gli stati $|1, m\rangle_S$, $m = -1, 0, 1$, a non essere ortogonale a $|1/2, -1/2\rangle$ e/o $|-1/2, 1/2\rangle$, segue che l'unico elemento non nullo è ($t \geq 0$)

$${}_S\langle 1, 0|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle = 2^{-1/2}[e^{-\frac{i}{\hbar}E_{+-}t}\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-+}t}\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)] .$$

Problema 2

1. Gli autovalori di H sono $E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$, soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \left(\frac{\hbar}{2} a \sigma_z + \frac{\hbar}{2} b \sigma_x - E I_{2 \times 2} \right) = 0 .$$

2. Gli autovalori di $H^{(0)}$ sono $E_{\pm}^{(0)} = \pm \frac{\hbar}{2} a$. S_x non ha termini diagonali nella rappresentazione in cui $H^{(0)}$ è diagonale. Quindi non ci sono correzioni al primo ordine. Al secondo ordine si ha

$$E_+^{(2)} = \frac{|\langle 1/2 | b S_x | -1/2 \rangle|^2}{E_+^{(0)} - E_-^{(0)}} = \frac{\hbar b^2}{4 a} ,$$

$$E_-^{(2)} = \frac{|\langle -1/2 | b S_x | 1/2 \rangle|^2}{E_-^{(0)} - E_+^{(0)}} = -\frac{\hbar b^2}{4 a} .$$

- 3.

$$\frac{dH_H^{(0)}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, H^{(0)}]_H(t) = ab S_{yH} := ab e^{\frac{i}{\hbar} H t} S_y e^{-\frac{i}{\hbar} H t} .$$

Si osservi che, anche se non richiesto nel testo, l'ultimo membro è ulteriormente sviluppabile. Infatti

$$H = \rho \vec{S} \cdot \vec{n} ,$$

dove $\rho := \sqrt{a^2 + b^2}$, $n_x := b/\rho$, $n_y := 0$, $n_z := a/\rho$, e ricordando che

$$e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{S} \cdot \vec{n}} \vec{S} e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{S} \cdot \vec{n}} = \vec{S} \cdot \vec{n} \vec{n} + \cos \alpha (\vec{S} - \vec{S} \cdot \vec{n} \vec{n}) + \sin \alpha \vec{n} \times \vec{S} , \quad \alpha \in \mathbf{R} ,$$

si ha

$$\frac{dH_H^{(0)}}{dt} = ab \left[\cos(\rho t) S_y + \sin(\rho t) \left(\frac{a}{\rho} S_x - \frac{b}{\rho} S_z \right) \right] .$$

4. Gli autovalori di $H' = H^{(0)}$ sono $E'_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} a$, mentre gli autovalori dell'hamiltoniana imperturbata $H'^{(0)} = H$ sono $E_{\pm}^{(0)} = \pm \frac{\hbar}{2} \rho$. Le equazioni che determinano gli autostati $|\pm\rangle$ di $H'^{(0)}$, cioè tali che $H'^{(0)}|\pm\rangle = E'_{\pm}|\pm\rangle$, sono equivalenti all'equazioni matriciali $\frac{\hbar}{2}(a\sigma_z + b\sigma_x)v_{\pm} = E'_{\pm}v_{\pm}$. Denotando con A_{\pm} e B_{\pm} la prima e seconda componente di v_{\pm} rispettivamente, si ha $aA_{\pm} + bB_{\pm} = \pm \rho A_{\pm}$ (si ricordi che questa prima coppia di equazioni è, per costruzione, equivalente alla seconda coppia di equazioni $bA_{\pm} - aB_{\pm} = \pm \rho B_{\pm}$). Imponendo anche la condizione di normalizzazione si ha

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho(\rho - a)}}(b|1/2\rangle + (\rho - a)|-1/2\rangle) , \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho(\rho + a)}}(b|1/2\rangle - (\rho + a)|-1/2\rangle) ,$$

dove $S_z|\pm 1/2\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|\pm 1/2\rangle$. La correzione al primo ordine ai livelli energetici è data dagli elementi diagonali dell'operatore $H' - H'^{(0)} = -bS_x$

$$E'_+{}^{(1)} = \langle + | -bS_x | + \rangle = -\frac{b^2}{2\rho}(\langle 1/2 | S_x | -1/2 \rangle + \langle -1/2 | S_x | 1/2 \rangle) = -\frac{b^2\hbar}{2\rho} ,$$

$$E'_-{}^{(1)} = \langle - | -bS_x | - \rangle = \frac{b^2}{2\rho}(\langle 1/2 | S_x | -1/2 \rangle + \langle -1/2 | S_x | 1/2 \rangle) = \frac{b^2\hbar}{2\rho} .$$

Le correzioni al secondo ordine sono

$$E'_+{}^{(2)} = \frac{|\langle + | -bS_x | - \rangle|^2}{E'_+{}^{(0)} - E'_-{}^{(0)}} = \frac{a^2b^2\hbar}{4\rho^3} ,$$

$$E'_-{}^{(2)} = \frac{|\langle - | -bS_x | + \rangle|^2}{E'_-{}^{(0)} - E'_+{}^{(0)}} = -\frac{a^2b^2\hbar}{4\rho^3} .$$

L'equazione del moto, in rappresentazione di Heisenberg, soddisfatta da $H'^{(0)}$ è

$$\frac{dH'^{(0)}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H', H'^{(0)}]_{H'}(t) = -abS_{yH'} := -abe^{\frac{i}{\hbar}H't}S_ye^{-\frac{i}{\hbar}H't} = -ab(\cos(at)S_y + \sin(at)S_x) .$$

5. Il metodo standard consiste nello sviluppare l'autostato di S_x con autovalore $\hbar/2$ in termini di autostati di H , corrispondenti ai kets $|\pm\rangle$ ricavati nel punto 4, e poi espandere lo stato evoluto temporalmente in termini di autostati di S_x . Risulta comunque conveniente calcolare l'equivalente $\langle S_{xH} \rangle$, in quanto

$$S_{xH} := e^{\frac{i}{\hbar}\rho t \vec{S} \cdot \vec{n}} S_x e^{-\frac{i}{\hbar}\rho t \vec{S} \cdot \vec{n}} = (1 - \cos(\rho t)) \frac{b}{\rho} \vec{S} \cdot \vec{n} + \cos(\rho t) S_x - \sin(\rho t) \frac{a}{\rho} S_y ,$$

da cui segue immediatamente ($t \geq 0$)

$$\langle S_{xH} \rangle = \frac{\hbar}{2\rho^2}(a^2 \cos(\rho t) + b^2) .$$