

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 11 Luglio 2006

Problema n.1

Un sistema quantistico unidimensionale è costituito da una particella di massa m soggetta al potenziale $V(x)$. Siano $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ autofunzioni dell'operatore hamiltoniano corrispondenti ai primi due livelli energetici E_0 ed E_1 ($> E_0$). Sapendo che $\psi_1(x) = x\psi_0(x)$ e $V(0) = 0$, si dimostri, determinandolo esplicitamente, che $V(x)$ è il potenziale di un oscillatore armonico. Assumendo

$$\frac{m(E_1 - E_0)}{\hbar^2} = 1,$$

si supponga ora che la particella, al tempo $t = 0$, si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) .$$

Siano H e \mathcal{P} gli operatori hamiltoniano e parità. Si denoti con $\langle \mathcal{O} \rangle_{\Psi_t}$ il valor medio dell'operatore \mathcal{O} calcolato nello stato descritto dalla generica funzione d'onda $\Psi_t := \Psi(x, t)$. Si determinino:

1. $\langle H \rangle_{\psi_t}$, $t \geq 0$.
2. $\langle \mathcal{P} \rangle_{\psi_t}$, $t \geq 0$.
3. $\langle \mathcal{P} \rangle_{\Psi_t}$, $t \geq 0$, dove si suppone che al tempo $t = 0$ lo stato sia descritto dalla funzione d'onda $\Psi(x, 0) = x\psi(x)$ piuttosto che da $\psi(x)$.

Problema n.2

È noto che al tempo $t = 0$ la funzione d'onda di una particella in \mathbf{R}^3 è

$$\psi(\mathbf{r}) = Nye^{-\alpha r} ,$$

dove N è il fattore di normalizzazione e α una costante positiva.

1. Determinare N .
2. Determinare la probabilità di trovare, al tempo $t = 0$, la particella nella regione $r < r_0$.
3. Si determinino, al tempo $t = 0$, i valori medi degli operatori L^2 e L_z , dove L denota l'operatore momento angolare e L_i , $i = x, y, z$, la sua componente lungo l'asse i .

4. Supponendo che l'hamiltoniana del sistema sia

$$H = CL_x ,$$

con C una costante positiva, si determini il valor medio dell'operatore L_y al tempo $t \geq 0$.