

**Prova scritta di Fisica Teorica**  
**Padova - Dipartimento di Fisica - 16 Febbraio 2007**

Una particella di momento angolare  $l = 1$  e spin  $s = 1/2$  si trova, al tempo  $t = 0$ , nello stato

$$|-1 \ 1/2\rangle = (1/3)^{1/2}|3/2 \ -1/2\rangle_J - (2/3)^{1/2}|1/2 \ -1/2\rangle_J ,$$

con ovvio significato dei simboli. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = A\vec{J} \cdot \vec{n} ,$$

dove  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , con  $A$  costante e  $\vec{n} := (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ .

1. Si calcolino i valori medi degli operatori posizione e momento al tempo  $t \geq 0$ .
2. Si calcoli il valor medio dell'operatore  $S_x$  al tempo  $t \geq 0$ . In proposito può essere utile considerare la relazione

$$e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}} \sigma_k e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}} = \sigma_k + 2 \sin^2(\alpha/2)(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} n_k - \sigma_k) + \sin \alpha (\vec{n} \times \vec{\sigma})_k , \quad k = x, y, z , \quad \alpha \in \mathbf{R} . \quad (1)$$

3. Si supponga che al tempo  $t_0 > 0$  una misura abbia rivelato che la particella si trova nello stato  $|3/2 \ -1/2\rangle_J$ . Si esprimano, in termini dei coefficienti  $C_{m,m_n} = {}_J\langle 3/2 \ m_n | 3/2 \ m \rangle_J$  dell'espansione

$$|3/2 \ m\rangle_J = \sum_{m_n=-3/2}^{3/2} C_{m,m_n} |3/2 \ m_n\rangle_J ,$$

dove  $\vec{J} \cdot \vec{n} |J \ m_n\rangle_J = m_n |J \ m_n\rangle_J$ , le probabilità relative ai possibili risultati di una misura di  $J_z$  eseguita al tempo  $t_1 > t_0$ .

4. Supponendo che la misura, da considerare ideale, abbia effettivamente rivelato che  $J_z$  ha valore  $-\hbar/2$ , si calcoli, rispetto a tale stato, e senza considerare l'evoluzione dinamica, il valor medio dell'operatore  $\vec{S} \cdot \vec{n}$ . Si ricorda che

$$|3/2 \ -1/2\rangle_J = (2/3)^{1/2}|0 \ -1/2\rangle + (1/3)^{1/2}|-1 \ 1/2\rangle .$$

5. Si dimostri la relazione (1) nel caso  $k = x$ . In proposito, per una dimostrazione algebrica, può essere utile considerare la relazione

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) .$$

Per una dimostrazione geometrica può essere utile osservare che la relazione (1) ha la forma equivalente

$$e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}} \vec{\sigma} e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{n} + \cos \alpha (\vec{\sigma} - \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{n}) + \sin \alpha \vec{n} \times \vec{\sigma} , \quad \alpha \in \mathbf{R} .$$

1. Poiché  $[H, L^2] = 0$ , lo stato evoluto continua ad avere  $l = 1$ . Ciò implica che la parità, che per lo stato in esame vale  $-1 = (-)^{l=1}$ , è ben definita  $\forall t \geq 0$ , quindi  $\langle X \rangle_t = 0 = \langle P \rangle_t$ .

2. Si osservi che

$$\langle -1 \ 1/2 | S_x | -1 \ 1/2 \rangle_t = \frac{\hbar}{2} \langle -1 \ 1/2 | e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} \sigma_x e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} | -1 \ 1/2 \rangle = \frac{\hbar}{2} C ,$$

dove  $\alpha := At$ , e  $C$  è il coefficiente di  $\sigma_z$  nel membro destro di (1) con  $k = x$ . Quindi

$$\langle \psi | S_x | \psi \rangle_t = \frac{\hbar}{2} [\cos \phi \sin 2\theta \sin^2(At/2) + \sin \theta \sin \phi \sin(At)] .$$

3. Al tempo  $t_1$  lo stato è

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)} |3/2 \ -1/2\rangle_J = \sum_{m_n=-3/2}^{3/2} C_{-1/2, m_n} e^{-iAm_n(t_1-t_0)} |3/2 \ m_n\rangle_J = \sum_{m_n=-3/2}^{3/2} C_{-1/2, m_n} e^{-iAm_n(t_1-t_0)} \sum_{m=-3/2}^{3/2} \bar{C}_{m, m_n} |3/2 \ m\rangle_J ,$$

quindi le probabilità richieste sono

$$\left| {}_J\langle 3/2 \ m | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)} |3/2 \ -1/2\rangle_J \right|^2 = \left| \sum_{m_n=-3/2}^{3/2} C_{-1/2, m_n} \bar{C}_{m, m_n} e^{-iAm_n(t_1-t_0)} \right|^2 , \quad m = \pm 1/2, \pm 3/2 .$$

4. Si ha

$${}_J\langle 3/2 \ -1/2 | \vec{S} \cdot \vec{n} | 3/2 \ -1/2 \rangle_J = \frac{2}{3} \langle 0 \ -1/2 | \vec{S} \cdot \vec{n} | 0 \ -1/2 \rangle + \frac{1}{3} \langle -1 \ 1/2 | \vec{S} \cdot \vec{n} | -1 \ 1/2 \rangle = -\frac{\hbar}{6} \cos \theta .$$

5. Essendo  $e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} = \cos(\alpha/2) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin(\alpha/2)$ , si ha

$$e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} \vec{\sigma} e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}} = \cos^2(\alpha/2) \vec{\sigma} + \sin^2(\alpha/2) \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} + i \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) [\vec{\sigma} \cdot \vec{n}, \vec{\sigma}] ,$$

Utilizzando la relazione riportata nel testo, e osservando che  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} = (\vec{\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{n})^+$ , si ha

$$\vec{\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{n} + i\vec{n} \times \vec{\sigma} , \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} = \vec{n} - i\vec{n} \times \vec{\sigma} \quad \longrightarrow \quad i \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) [\vec{\sigma} \cdot \vec{n}, \vec{\sigma}] = \sin \alpha \vec{n} \times \vec{\sigma} .$$

Eq.(1) segue esprimendo anche  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  in forma lineare nelle componenti di  $\vec{\sigma}$ . Applicando da sinistra  $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  alla prima relazione soprascritta, ed utilizzando ancora la relazione nel testo, si ha

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{\sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = 2\vec{n} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \vec{\sigma} .$$

Lo stesso risultato segue osservando che il membro sinistro di (1) deve descrivere la rotazione del vettore operatore  $\vec{\sigma}$  di un angolo  $\alpha$  attorno all'asse  $\vec{n}$ . Si osservi infatti che, se non paralleli,  $\vec{\sigma}$  e  $\vec{n}$  identificano un piano, con  $\vec{n}$  convenientemente identificato con il versore di uno dei due assi del sistema di assi ortogonali. La componente di  $\vec{\sigma}$  sull'asse identificato da  $\vec{n}$  è  $\vec{\sigma}_{\parallel} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{n}$ , mentre  $\vec{\sigma}_{\perp} = \vec{\sigma} - \vec{\sigma}_{\parallel} = \vec{\sigma} - \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \vec{n}$  è la componente perpendicolare a  $\vec{n}$ . D'altronde una rotazione di angolo  $\alpha$  attorno alla direzione  $\vec{n}$  lascia invariato il "vettore"  $\vec{\sigma}_{\parallel}$ , mentre ruota la proiezione di  $\vec{\sigma}$  sul piano ortogonale ad  $\vec{n}$ , identificato dai vettori  $\vec{\sigma}_{\perp}$  e  $\vec{n} \times \vec{\sigma}$ , come descritto in Eq.(1).