FACOLTA` DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ENERGETICA
PRIMO COMPITINO DI COMPLEMENTI DI FISICA
28/11/2008

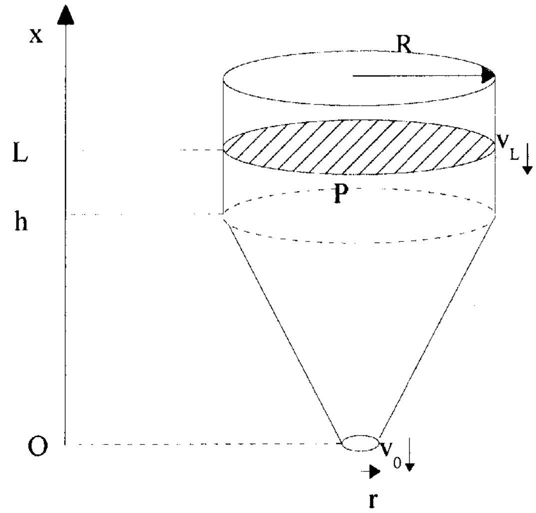
Nome ______________________________

Matricola ______________

Problema 1

Un serbatoio contenente acqua e` costituito da un cilindro cavo di raggio R=2m collegato a un tronco di cono cavo di altezza h=10m, come in figura. L'acqua fuoriesce dalla sezione inferiore del serbatoio, di raggio r=5cm. Assimilando l'acqua ad un fluido ideale di densita` $\rho=10^3 kg/m^3$, se all'istante iniziale t=0s l'altezza dell'acqua nel serbatoio e` pari a L=12m, si determini:

1) La pressione in un punto P ad altezza x=11m dal suolo all'istante t=0s;
2) Le velocita` v_0 e v_L dell'acqua all'istante t=0s, rispettivamente all'uscita dal serbatoio e all'altezza x=L;
3) FACOLTATIVO: Dopo quanto tempo dall'istante iniziale la superficie dell'acqua si trova ad altezza x=h.



1) $P_0 + \frac{1}{2}\rho v_L^2 + \rho g L = P(x) + \frac{1}{2}\rho v_L^2 + \rho g x$

$P(x) = P_0 + \rho g (L - x) = 1.11 \cdot 10^5\, Pa$

) $P_0 + \frac{1}{2}\rho v_L^2 + \rho g L = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = v_L^2 + 2gL$

$v_L S_L = v_0 S_0 \Rightarrow v_0 = \frac{v_L R^2}{r^2}$

$v_0^2 = v_L^2 \frac{R^4}{r^4} = v_L^2 + 2gL \Rightarrow v_L = \sqrt{2gL}\,\frac{r^2}{\sqrt{R^4 - r^4}} = 9.6\, mm/s$

$v_0 = \sqrt{2gL}\,\frac{R^2}{\sqrt{R^4 - r^4}} = 15.34\, m/s$

3) $|v(x)| = \sqrt{2gx}\,\frac{r^2}{\sqrt{R^4 - r^4}}$ pour $h < x < L$

$= A\sqrt{2gx}$; $A = 6.25 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{dx}{dt} = -A\sqrt{2gx} \Rightarrow \int_L^h \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = -\int_0^t A\, dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\left[2\sqrt{x}\right]_L^h = -At \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{\sqrt{L} - \sqrt{h}}{A} = 218.2\, s$$

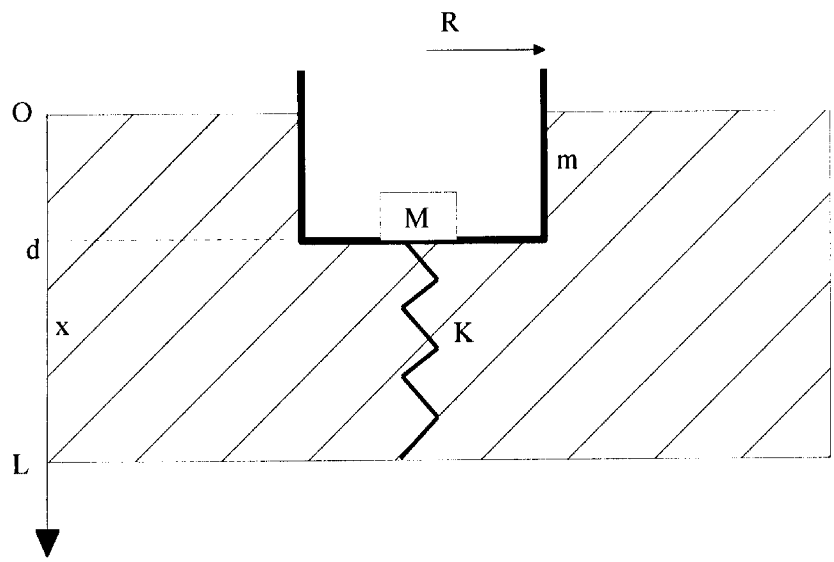
Problema 2

Un bidone cilindrico di ferro ha sezione di raggio R=0.1m e massa m=15kg. Esso galleggia in una piscina profonda L=1m riempita di acqua ($\rho=10^3$kg/m^3). Il fondo del bidone e` collegato a un estremo di una molla di costante elastica K=300N/m e lunghezza a riposo pari a L. L'altro estremo della molla e` fissato al fondo della piscina. Nella configurazione iniziale, di equilibrio statico, all'interno del bidone e` posta una massa M e la molla e` compressa di una lunghezza d=0.4m. All'istante t=0s la massa M viene rimossa e il sistema inizia a oscillare.
Trascurando la resistenza dell'acqua durante il moto, si determini:

1) Il valore di M;
2) La pulsazione ω e la coordinata x del centro di oscillazione;
3) L'ampiezza di oscillazione e la fase iniziale.

Assumendo una forza di attrito viscoso tra il bidone e l'acqua pari a $F_v = -\lambda v$, con λ=100Ns/m, si determini in queste nuove condizioni:

4) La pulsazione ω;
5) Il tempo al quale l'ampiezza di oscillazione e` pari alla meta` di quella iniziale.
6) FACOLTATIVO: Il valore dell'ampiezza e della fase iniziali.



1) $(m+M)g - F_A - Kd = 0$; $F_A = \pi R^2 d \rho_a g = 123.15N$

$$M = \frac{F_A + Kd - mg}{g} = 9.8kg$$

) $ma = mg - F_A(x) - kx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\pi R^2 \rho_a g + k}{m}\right)x = g \; ; \; \omega_0^2 = \frac{\pi R^2 \rho_a g + k}{m} \Rightarrow \omega_0 = 6.37\, s^{-1}$$

Soluzione particolare x_{eq}:

$$mg - \pi R^2 \rho_a g x - kx = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k + \pi R^2 \rho_a g} = 0.24\, m$$

) $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + x_{eq}$; $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} x(0) = d \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin\varphi + x_{eq} = d \\ A\omega \cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

$A + x_{eq} = d \Rightarrow A = d - x_{eq} = 0.16\, m$

) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = g \; ; \; 2\gamma = \frac{b}{m} \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m} = 3.33\, s^{-1}$$

$\omega^2 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \omega = 5.43\, s^{-1}$

5) $$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow e^{-\gamma t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\gamma} = 0.208$$

6) $$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + x_{eq}$$

$$x(0) = A_0 \sin\varphi + x_{eq} = d \Rightarrow \sin\varphi = \frac{(d - x_{eq})}{A_0}$$

$$v(t) = A_0 e^{-\gamma t}(-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi))$$

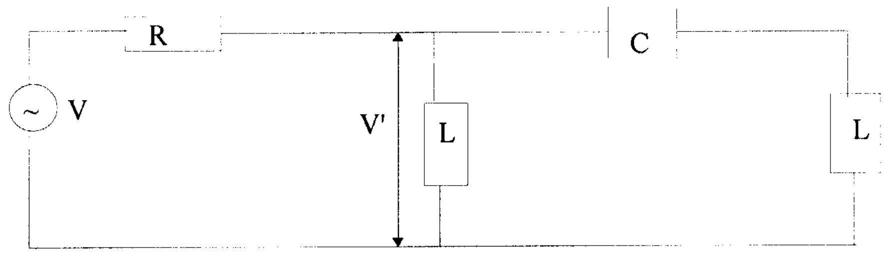
$$v(0) = -A_0 \gamma \sin\varphi + A_0 \omega \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\gamma \sin\varphi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\gamma}{\omega}\left(\frac{d - x_{eq}}{A_0}\right) ; \; \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\omega}{\gamma} \Rightarrow \varphi = 58.5°$$

$$A_0 = \frac{d - x_{eq}}{\sin\varphi} = 0.19\, m$$

Problema 3

Si consideri il seguente circuito in regime di corrente alternata, dove R=200Ω, L=0.5H, C=20nF e V_0=200V.



Si determini:

1) La pulsazione di risonanza ω_{RIS} ;
2) Il valore della tensione V' alla risonanza;
3) Per quale valore della pulsazione e` nulla la potenza media dissipata.

1) $z_{CL} = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = \frac{1-\omega^2 LC}{i\omega C}$

$\frac{1}{z_{LCL}} = \frac{1}{i\omega L} + \frac{i\omega C}{1-\omega^2 LC} = \frac{1-2\omega^2 LC}{i\omega L(1-\omega^2 LC)}$

$z_{LCL} = i\omega L\left(\frac{1-\omega^2 LC}{1-2\omega^2 LC}\right)$; $z_{TOT} = R + i\omega L\left(\frac{1-\omega^2 LC}{1-2\omega^2 LC}\right)$

ω_{RIS} per $\mathrm{Im}\, z_{TOT} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4\, s^{-1}$

2) $z_{TOT}(\omega_R) = R \Rightarrow I = V/R$

$V' = I\, z_{LCL}(\omega_R) = 0$

3) $P = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$; $\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \infty$

$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}\left(\frac{1-\omega^2 LC}{1-2\omega^2 LC}\right) = \infty \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 7071\, s^{-1}$

$[I_0 = V_0/|z_{TOT}| \to 0]$