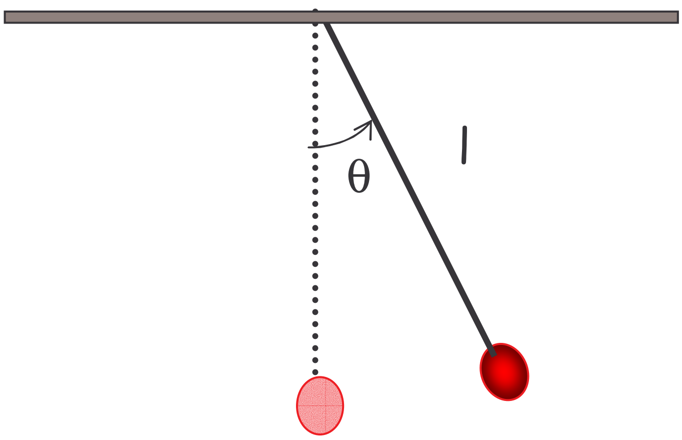
IL PENDOLO REVERSIBILE DI KATER

Il periodo delle oscillazioni del pendolo semplice è dato dalla formula:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

Questa relazione è valida per le piccole oscillazioni, quando, cioè, si può assimilare il seno dell'angolo massimo α (tra il pendolo e la verticale) con il valore dell'angolo stesso espresso in radianti. Il periodo risulta, quindi in queste condizioni, indipendente sia da α che dalla massa m.



Se α non si può ritenere piccolo, la formula del periodo si trova mediante lo sviluppo in serie e vale:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{9}{256}\theta^4 + \ldots\ldots\right) \qquad (2)$$

Chiaramente T dipende dall'angolo ed è maggiore di T_o, coincide con esso solo per oscillazioni infinitesime. Il termine α^4 è a tutti gli effetti trascurabile per le applicazioni di laboratorio, di conseguenza il periodo è dato, in generale, dalla:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta^2\right) \qquad (3)$$

Quindi, quando nei calcoli si usa la (1),si introduce per ogni a>0 un errore sistematico che si può ricavare dalla (2) e vale:

$$\Delta T = T - T_0 = T_0\left(\frac{1}{16}\theta^2\right) \quad \text{cioè} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{16}\alpha^2 \qquad (4)$$

e può risultare più o meno trascurabile a seconda delle situazioni sperimentali.

Il pendolo composto è, invece, costituito da un corpo rigido libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso, non verticale e non passante per il baricentro. Il periodo del moto del pendolo composto è (ancora per piccole oscillazioni) :

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad (5)$$

indicando con I il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di oscillazione e con h la distanza di esso dal baricentro.

Per oscillazioni non piccole vale ancora la stessa legge espressa dalla (3).

Il corpo si comporta esattamente come un pendolo semplice avente lunghezza:

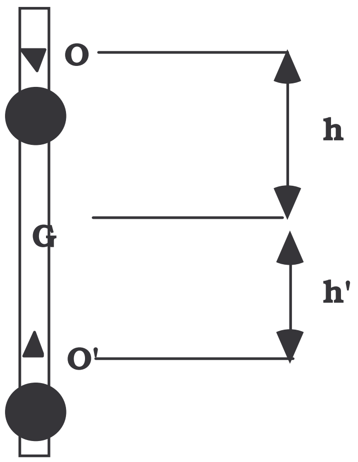
$$l = \frac{I}{mh} \qquad (6)$$

Sfruttando il teorema di Huygens-Steiner il memento di inerzia del corpo di può scrivere:

$$I = I_G + mh^2$$

e si ottiene per la lunghezza ridotta del pendolo composto l'espressione:

$$l = \frac{I}{mh} = \frac{I_G + mh^2}{mh} = h + \frac{I_G}{mh} \qquad (7)$$



rappresentazione schematica del pendolo reversibile

Il pendolo reversibile può essere messo in oscillazione attorno a due assi diversi , tra loro paralleli e passanti per i due coltelli O e O'. I rispettivi periodi di oscillazione:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{e} \qquad T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

sono uguali quando (l=l')

$$h + \frac{I_G}{mh} = h' + \frac{I_G}{mh'} \qquad (8)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto ad h si trova:

$$h = h^1 \qquad \text{e} \qquad h = \frac{I_G}{mh'} \qquad (9)$$

Nel primo caso l'interpretazione fisica è che i due assi sono simmetrici rispetto al baricentro del pendolo, nel secondo, che implica anche che:

$$h' = \frac{I_G}{mh} \qquad \text{e quindi} \qquad l = h + \frac{I_G}{mh} = h + h' \qquad (10)$$

la distanza tra i due assi di rotazione è pari alla lunghezza ridotta.

Nel pendolo reversibile di Kater la prima situazione è da escludere per la costruzione dello strumento, se i periodi di oscillazione attorno ai due assi sono uguali e di valore T, indicando con l la distanza tra O e O' (che è facilmente misurabile), si può ricavare il valore dell'accelerazione di gravità dalla:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad (11)$$

L'errore su **g** sarà dato dalla formula di propagazione degli errori:

$$\left(\frac{\mu_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\mu_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\mu_T}{T}\right)^2 \qquad \text{ossia} \qquad \mu_g = g\sqrt{\left(\frac{\mu_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\mu_T}{T}\right)^2} \qquad (12)$$

g a Vicenza vale :

g=9.806 m/s²

Lo scopo dell'esperienza è quello di determinare l'accelerazione di gravità **g**. Si deve quindi trovare la condizione per la quale il pendolo, sospeso per O e per O' ha lo stesso periodo, determinato il periodo e nota la lunghezza ridotta, si può valutare **g**.

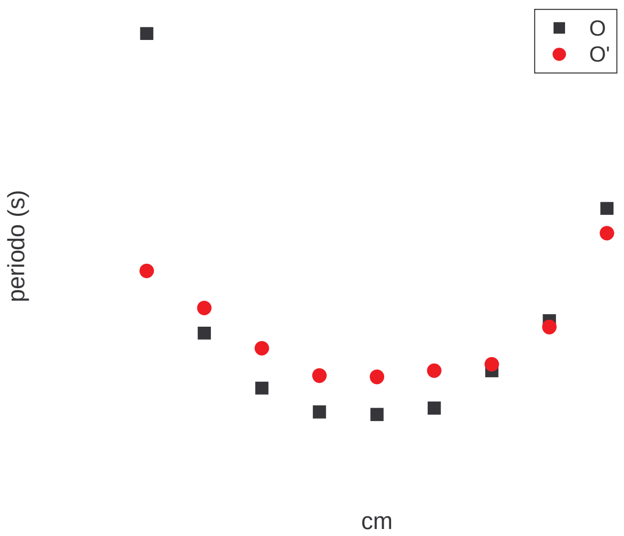
Si utilizzi lo stesso pendolo nei due turni successivi di misura e, prima di effettuare le prime misurazioni, si prenda nota del numero del pendolo e della relativa lunghezza ridotta.

Si pone la massa mobile ad una distanza Δx=10 cm dall'origine, si sospende il pendolo per O e si raccolgono per 2 volte le misure dei tempi corrispondenti a 10 periodi. Si calcola il valor medio e si considera il valore del periodo corrispondente. Si ripete la misura sospendendo il pendolo per O'. Si ripete la sequenza di misure spostando ogni volta la massa mobile di 10 cm. Si può, quindi, costruire una tabella con le seguenti colonne:

posizione (cm)	Tempo (O)	Periodo (O)	Tempo (O')	Periodo (O)
....	....	....	....	....

Si graficano i periodi (per O e per O') in funzione della distanza x (in cm).

L’andamento dei periodi in funzione della distanza dovrebbe essere il seguente:



Si verifica che i periodi per i due perni si distribuiscono su due curve che si intersecano in due punti. Le due curve si intersecano ad una distanza di circa 20 cm e alle grandi distanze. Per le basse distanze l'angolo tra le due curve è maggiore che per le alte distanze e nell'intorno dell'intersezione i punti appartenenti alle due curve possono essere interpolati da due rette.

Per la misura non è necessario verificare l’andamento lungo tutto l’intervallo di spostamenti possibili. Sarà sufficiente prendere le misure tra 10 e 40 cm e poi tra 70 e 90 cm.

Verificato che l’intersezione a minori distanze è, in genere, tra 15 e 25 cm, si effettuano nell'intorno dell'intersezione delle determinazioni del tempo (e dei periodi corrispondenti) per 10 periodi, spostando la massa mobile ogni volta di $\Delta x=2.0$ cm. Si procede come nel caso precedente, sospendendo il pendolo prima per O, poi per O'. Sarà sufficiente effettuare 2 misure per distanza.

Si costruisce una tabella come nel caso precedente e si graficano ancora i periodi in funzione di x. Si determina ancora il valore della distanza di intersezione tramite il grafico.

-Si effettuano ancora, nell'intorno dell'intersezione delle determinazioni del tempo (e dei periodi corrispondenti) per 50 oscillazioni, spostando la massa mobile ogni volta di $\Delta x=0.3$ cm. Si procede come nel caso precedente, sospendendo il pendolo prima per O, poi per O'. Sarà sufficiente effettuare 3 misure per ogni posizione. A scopo esemplificativo: se l’intersezione pare essere a 21 cm si prende il primo punto a 21 cm, poi si prendono un punto a 20.7 cm e uno a 21.3 cm. Se , analizzando i periodi misurati si verifica che l’intersezione è realmente a 21 cm si prendono due altre determinazioni a 21.6 e a 20.4 cm in modo da avere 5 punti centrati sull’intersezione. Se si verifica, invece, che l’intersezione pare spostata verso le basse o le alte distanze, si aggiustano gli spostamenti in modo da avere il punto di intersezione al centro del set di 5 misure.

Nel punto di intersezione i periodi corrispondenti alla sospensione per O e per O' coincidono. Se per ogni distanza si sono effettuate 3 misure di 50 periodi, per ognuna di esse di calcoli la media e l'errore massimo,

$$T = \frac{T_{50}}{50}$$

$$\Delta T_{50} = \frac{T_{max} - T_{min}}{2}$$

l'errore da attribuire alla singola determinazione di periodo è:

$$\mu_T = \frac{\Delta T_{50}}{50}$$

Si costruisce il grafico,tenendo conto dell'errore per ogni determinazione di periodo, i punti corrispondenti ai periodi per la sospensione per O e per O' possono ora, con buona approssimazione, essere interpolati da due rette. Si determina il punto di intersezione graficamente oppure effettuando due regressioni lineari.

-Si può allora determinare il valore dell'accelerazione di gravità tramite la (11). Il valore della lunghezza ridotta, diverso per ogni pendolo, è riportato in laboratorio.

-La valutazione dell'errore su **g** procede tramite la (12), dove a μ_l si attribuisce l'errore con cui è stata determinata la lunghezza ridotta del pendolo μ_l =0.2 mm.

La relazione consterà delle tabelle di dati e dei periodi come da schema allegato, dei tre grafici e della conseguente valutazione di **g** col proprio errore. Nella relazione si riporti il numero del pendolo di Kater con cui si è effettuata la misura.