FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica
Prova scritta del 3 Settembre 2008 - Canale ....

Problema 1

Un punto materiale compie una traiettoria circolare di raggio R = 0.5 m. All'istante t = 0 il punto inizia a muoversi con velocità angolare iniziale nulla e accelerazione angolare α = 3.98 s^{-2}. Calcolare:

1. la velocità del corpo al compimento dell'ottavo giro; v=.............
2. il modulo dell'accelerazione del corpo nell'istante t_1 = 0.54 s; a=..............
3. l'angolo che il vettore accelerazione fa con la direzione della velocità a t_1. θ=............

Il punto svolge un moto uniformemente accelerato. Si ha dunque:

$$\begin{cases} \omega^2(\theta) - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \\ v = \omega R \end{cases} \qquad \theta = 8 \cdot 2\pi \quad \omega = 20 s^{-1} \Rightarrow v = 10 m/s$$

Il vettore accelerazione è somma dei suoi componenti tangenziale e normale. Si ha:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \qquad a_T = \alpha R = 1.99 ms^{-2} \quad a_N = \omega^2(t) R = 2.309 ms^{-2}$$

$$a = 3.05 ms^{-2}$$

L'accelerazione tangenziale ha la stessa direzione della velocità, per cui si ha:

$$a_T = a \cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{a_T}{a} = 0.65(2) \quad \Rightarrow \quad \theta = 49.2°$$

oppure

$$tg\theta = \frac{a_N}{a_T} = 1.16 \quad \Rightarrow \quad \theta = 49.2°$$

Problema 2

Due sbarrette sottili ed omogenee, di lunghezza L_1=L=1 m e massa M_1=M=2 kg e L_2=L/2 e M_2=M/2, rispettivamente, sono disposte come in figura in un piano verticale. La sbarretta 2 è fissata ad un estremo della sbarretta 1 nel suo punto di mezzo. Il sistema può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per l'altro estremo della sbarretta 1(punto O). All'inizio il sistema è mantenuto in quiete dalla tensione di un filo che è collegato ad un punto C della sbarra 1 che dista L/4 dall'asse di rotazione.

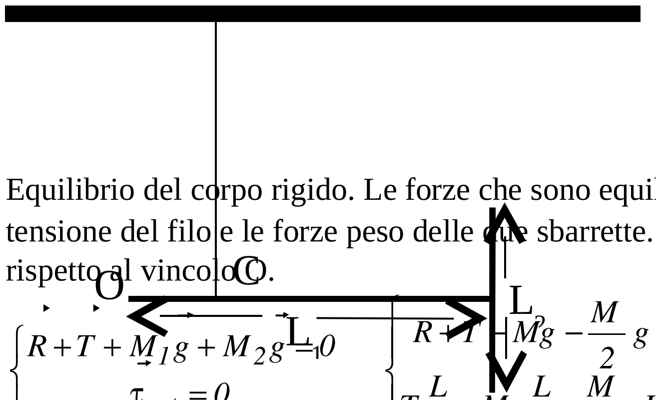
1) Determinare la tensione del filo T e la reazione vincolare in O; T=................, R=.................

Se all'istante t=0 il filo viene tagliato, si determinino:

2) L'accelerazione angolare del sistema a t=0, α=........................

3) la velocità angolare del sistema quando il suo CM passa per la verticale per O.

ω=.......................



Equilibrio del corpo rigido. Le forze che sono equilibrate sono la reazione vincolare in O, la tensione del filo e le forze peso delle due sbarrette. Il momento delle forze (τ) si può calcolare rispetto al vincolo O.

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{T} + M_1\vec{g} + M_2\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau}_{ext} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R + T - Mg - \frac{M}{2}g = 0 \\ T\frac{L}{4} - Mg\frac{L}{2} - \frac{M}{2}gL = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T = 4Mg = 78.4N \\ R = -\frac{5}{2}MG = -49N \end{cases}$$

Quando il filo viene tagliato il sistema inizia a ruotare senza attrito attorno ad O. Calcoliamo la posizione del CM del sistema rispetto ad O e il momento di inerzia del sistema per rotazione attorno ad O.

$$x_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + \frac{M}{2}L}{M + \frac{M}{2}} = \frac{2}{3}L = 0.667m$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 \qquad I_1 = \frac{ML^2}{3} = 0.667kgm^2 \qquad I_2 = \frac{M_2 L_2^2}{12} + M_2 L^2 = 1.0208kgm^2$$

$$I_{tot} = \frac{27}{32}ML^2 = 1.688kgm^2$$

L'equazione del moto di rotazione attorno ad O comporta:

$$I_{tot}\alpha = \tau_{ext} \qquad \frac{27}{32}ML^2\alpha = -\frac{3}{2}Mg\frac{2}{3}L = -MgL \qquad \alpha = -\frac{32}{27}\frac{g}{L} = -11.61rad/s^2$$

Il sistema è sottoposto all'azione della forza peso (conservativa) quindi si conserva l'energia meccanica del sistema. Ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nella situazione in cui il CM passa per la verticale si ha:

$$E = cost. \qquad E_i = \frac{3}{2}Mg\cdot\frac{2}{3}L = MgL \qquad E_f = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{64}{27}\frac{g}{L}} = 4.82rad/s$$

Problema 3

Una quantità n = 1.5 moli di gas ideale monoatomico si trova inizialmente in uno stato di equilibrio termodinamico A caratterizzato dalla pressione T_A incognita e dal volume V_A= 4.2 x 10^{-3} m^3. Il gas viene fatto espandere adiabaticamente e reversibilmente fino allo stato di equilibrio B in cui la temperatura è T_B = 333.5 K. Sapendo che il lavoro W_{AB} = 4130.4 J, calcolare:

1) La temperatura del gas nello stato A. T_A =................

Successivamente, mantenendo il gas a contatto con una sorgente di calore a temperatura T_B, esso viene compresso isotermicamente e reversibilmente, fino a raggiungere lo stato C. Infine il gas viene riportato allo stato iniziale tramite una trasformazione isocora reversibile. Calcolare:

2) Il calore scambiato dal gas nella trasformazione B->C. Q_{BC} =................
3) Il rendimento del ciclo ABCA η =................

La prima trasformazione è adiabatica reversibile, per cui il primo principio della termodinamica dà:

$$Q_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = -\Delta U_{AB} = \Delta U_{BA} = nc_V \left(T_A - T_B\right)$$

$$T_A = T_B + \frac{W_{AB}}{nc_V} = 554.3K$$

La trasformazione BC è isoterma reversibile e il volume in C è lo stesso che in A e considerando che AB è adiabatica reversibile si ha:

$$Q_{BC} = W_{BC} = nRT_B \, ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) \qquad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \qquad V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 9 \cdot 10^{-3} m^3$$

$$Q_{BC} = -3170 J$$

Il rendimento del ciclo è, allora, dato da: