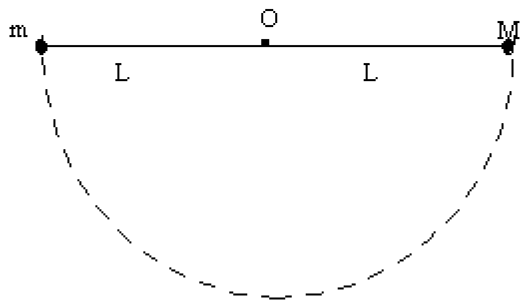
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Prova scritta del 18 Settembre 2007

Problema 1
Due punti materiali, di massa rispettivamente pari a m=0.5 kg e M=3.0 kg, sono collegati al vincolo O da due fili inestensibili e di massa trascurabile, entrambi di lunghezza L=2 m, giacenti in un piano verticale. Inizialmente i due fili sono mantenuti in posizione orizzontale, come in figura. Ad un certo istante le due masse sono lasciate libere di muoversi e durante il loro moto nel piano verticale si urtano in modo completamente anelastico.
Determinare
1)La velocita` delle due masse subito dopo l'urto; V=..........
2)La risultante delle tensioni dei due fili subito dopo l'urto; T=............
3)L'angolo di massima inclinazione rispetto alla verticale raggiunto dalle due masse dopo l'urto. θ=.............



Per ambedue le masse vale la conservazione dell'energia meccanica. L'urto avviene sulla verticale e durante l'urto si conserva la quantità di moto del sistema per cui si ha:

$$mgl = \frac{1}{2}mv_m^2 \qquad Mgl = \frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad mv_m - Mv_M = (m+M)V$$

$$V = \frac{m-M}{m+M}\sqrt{2gl} = -4.47\,m/s$$

Immediatamente dopo l'urto il sistema si comporta come un unico punto di massa totale sospeso ad un filo di lunghezza l. Le forze che agiscono sono la forza peso, diretta verso il basso e la tensione dei fili. La loro risultante deve dare la forza centripeta:

$$(m+M)\frac{V^2}{l} = -(m+M)g + T \qquad T = (m+M)\left(g + \frac{V^2}{l}\right) = 69.3N$$

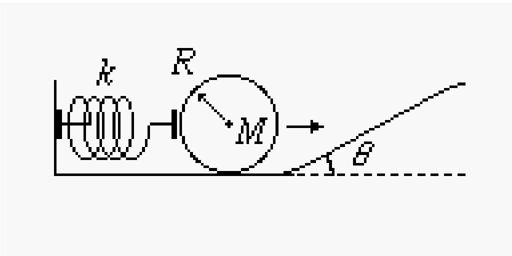
Dalla conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto si ottiene:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gl(1-\cos\theta) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{V^2}{2gl} = 0.49 \qquad \theta = 60.6°$$

Problema 2

Una sfera di massa M = 1.25 kg e raggio R = 5 cm rotola su un piano orizzontale spinta da una molla ideale di costante elastica k = 300 N/m. Inizialmente la sfera è ferma e la molla è compressa di una quantita' d = 12.5 cm rispetto alla posizione di riposo. Dopo che si è staccata dalla molla, la sfera comincia a salire una rampa inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sapendo che inizialmente la sfera si trova sul piano orizzontale, che durante tutto il percorso la sfera rotola senza strisciare e che l'attrito fra molla e sfera nel punto di contatto e' trascurabile, calcolare:

1. l'accelerazione angolare all'istante iniziale del moto; α=....................
2. il valore della forza di attrito nel momento in cui la sfera inizia a muoversi f_a=..................
3. la velocita' angolare della sfera quando il suo centro di massa risulta sollevato di una quota h = 17 cm rispetto alla quota iniziale; ω=...................



Inizialmente la sfera è ferma, quando viene rilasciata la molla essa si muove di puro rotolamento, avendo acquisito l'energia potenziale della molla. L'equazione che regola il moto di rotazione è la seconda equazione cardinale della dinamica. Il moto si può studiare sia considerando come polo il punto di contatto, costantemente in quiete, sia il CM della sfera.

In ogni caso la prima equazione cardinale si scrive:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{el} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_a$$

1- **polo nel punto di contatto**.

In questo caso l'unica forza che può dare momento è la forza elastica, l'altra forza non applicata nel punto di contatto, la forza peso, non dà momento perchè raggio e forza sono paralleli. Prendendo un sistema di riferimento levogiro con asse x perpendicolare al piano del foglio, asse y rivolto verso destra e asse z verticale si ha:

$$\vec{F}_{el} = Kx\vec{u}_y \qquad \vec{r} = -R\vec{u}_y + R\vec{u}_z \qquad \vec{r} \times \vec{F}_{el} = \vec{M}_P = KRx\vec{u}_x$$

$$M_P = I_P\alpha \qquad I_P = I_{CM} + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 = 4.375 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$$

$$\alpha = \frac{KRx}{I_P} = 428.6\,rad/s^2$$

Considerando che il moto è di puro rotolamento, si può scrvere il legame funzionale tra accelerazione angolare e accelerazione del CM per cui si ha:

$$\begin{cases} a_{CM} = \alpha R \\ ma_{CM} = F_{el} - f_a \end{cases} \qquad f_a = Kx - m\alpha R = 10.7N$$

2- **polo nel CM**

In questo caso l'unica forza che dà momento è la forza di attrito, la reazione vincolare normale non dà momento perchè forza e raggio sono papralleli. La prima e la seconda domanda si risolvono mettendo in sistema la prima e la seconda equazione cardinale con la condizione di puro rotolamento:

$$\begin{cases} ma_{CM} = F_{el} - f_a \\ f_a R = I_{CM}\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha \\ a_{CM} = \alpha R \end{cases} \qquad I_{CM} = 1.25 \cdot 10^{-3}\, kgm^2 \qquad \alpha = \frac{5}{7}\frac{Kx}{mR}0428.6\, rad/s^{\cdot 2} \qquad f_a = 10.7N$$

La velocità angolare dopo che la sfera è salita di una quota *h* sul piano si trova conservando l'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}I_P\omega_0^2 = \left(\frac{1}{2}mv_{0,CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_0^2\right) = \frac{1}{2}I_P\omega^2 + mgh$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}Kx^2 - mgh\right)}{I_P}} = 10.9\, rad/s$$

Problema 3

Una macchina termica funziona tra due serbatoi ideali costituiti da due grandi masse di acqua in equilibrio, rispettivamente, col vapore e col ghiaccio. Il fluido che fa funzionare la macchina termica è costituito da n=4 moli di gas ideale biatomico. Inizialmente il gas si trova all'equilibrio con la sorgente a temperatura più alta e ha una pressione $p_A=10^6$ Pa. Il gas passa ad uno stato di equilibrio B tramite una trasformazione isoterma **irreversibile** in cui assorbe il calore Q_{AB}=4226 J. Successivamente, tramite una trasformazione adiabatica **reversibile**, il gas passa ad uno stato di equilibrio C con T_C=273 K, da questo stato il gas raggiunge lo stato di equilibrio D tramite una trasformazione isoterma **reversibile**. Il gas ritorna, infine, allo stato iniziale, tramite una trasformazione adiabatica **reversibile** DA.

Sapendo che ad ogni ciclo si formano complessivamente m=11.5 g di acqua liquida (condensati alla sorgente calda e liquefatti a quella fredda), si determinino:

1- il rendimento del ciclo η=....................
2- il volume V_D V_{D}=..........................
3- la pressione p_B. p_{B}=............................

(λ fusione del ghiaccio=3.35 10^5 J/kg, λ vaporizzazione dell'acqua=2.26 10^6 J/kg)

Il gas che fa funzionare la macchina termica assorbe calore Q_{AB} dalla sorgente a temperatura più alta e cede calore Q_{CD} a quella a temperatura più bassa. In ambedue le trasformazioni si forma acqua liquida alla sorgente per cui si ha:

$$m = m_1 + m_2 = \frac{|Q_{AB}|}{\lambda_v} + \frac{|Q_{CD}|}{\lambda_f} \qquad |Q_{CD}| = \lambda_f\left(m - \frac{|Q_{AB}|}{\lambda_v}\right) = 3226J \qquad Q_{CD} = -3226J$$

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = 0.2366(0.24)$$

La trasformazione DA è adiabatica reversibile, valgono le equazioni di Poisson per cui si ha:

$$TV^{\gamma-1} = cost. \qquad V_D = V_A\left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \left(\gamma = \frac{7}{5}\right) \qquad V_D = 2.706 \cdot 10^{-2}\, m^3$$

La prima trasformazione è irreversibile, per cui non si possono conoscere gli stati intermedi per cui passa il sistema. Per conoscere la pressione nello stato B è necessario studiare gli stati D e C.
Il volume nello stato C si ottiene tenendo conto che la trasformazione CD è isoterma reversibile:

$$W_{CD} = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \qquad \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = \frac{W_{CD}}{nRT_C} = -0.3553 \qquad V_C = 3.86 \cdot 10^{-2}\ m^3$$

Essendo la trasformazione BC adiabatica reversibile, gli stati B e C sono legati tra di loro dalle equazioni di Poisson, per cui, per esempio si ha:

$$V_B = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_C = 1.769 \cdot 10^{-2}\ m^3 \qquad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 7.0 \cdot 10^5\ Pa$$