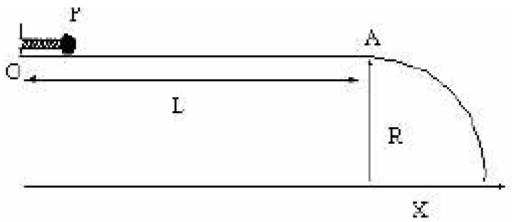
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica
ROSA
Prova scritta del 18 Marzo 2006

Problema 1
Un punto materiale P di massa m=1 kg può scorrere su un piano orizzontale OA di lunghezza L=5 m contiguo a una guida circolare liscia di raggio R=2 m, come in figura. Il punto P e' inizialmente fermo a contatto dell'estremità di una molla di lunghezza a riposo l_0=1 m e costante elastica K=150 N/m, inizialmente compressa della quantità d incognita. Ad un certo istante, P viene lasciato libero di muoversi.
Determinare:
1) La minima compressione d della molla affinché P si stacchi dal piano orizzontale, supposto liscio, nella posizione A di raccordo tra lo stesso e la guida circolare; d_{min}=…………
Se la molla e' inizialmente compressa della quantità d=0.5 m, calcolare:
2) L'angolo ϕ tra la velocità di P e l'asse delle x nell'istante in cui P giunge al suolo, se il piano orizzontale OA e' liscio; ϕ=………………
3) Il massimo coefficiente di attrito dinamico μ_d tra P e il piano orizzontale OA, supposto scabro, affinché P si stacchi dalla guida circolare ancora nella posizione A; μ=…………..



Se il punto si muove sulla guida circolare, risente di una forza normale.
L'equazione del moto del punto all'inizio della guida è:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N$$

Il punto si stacca dalla guida se non risente della forza normale, quindi se

$$mv^2 = mgR$$

Inizialmente l'energia meccanica del sistema molla-punto è solo dato dall'energia potenziale della molla, quando la molla si rilascia, trasferisce tutta la sua energia potenziale al punto materiale, sotto forma di energia cinetica:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

La minima compressione della molla affinché il punto lasci la guida è, quindi, quella che trasferisce la minima energia cinetica.

$$\frac{1}{2}Kd^2 \geq \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR \qquad \Rightarrow \qquad d' \geq \sqrt{\frac{mgR}{K}} = 0.36\,m$$

Se il punto lascia la guida la sua velocità iniziale è orizzontale e poi prosegue il suo moto sotto l'azione della forza peso, quindi:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Kd^2}{m}} = 6.12m/s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v \\ v_y(t) = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = R - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$ Il punto arriverà a terra quando la sua coordinata y sarà nulla.

$$y = 0 \qquad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.64s \qquad \Rightarrow \begin{cases} v_x(t_1) = 6.12m/s \\ v_y(t_1) = -gt_1 = -6.27m/s \end{cases} \qquad \tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = -1.024$$

$$\phi = -45.7°$$

Il massimo coefficiente di attrito dinamico compatibile è quello che fa si che il punto materiale arrivi in A con la minima velocità per cui si stacca dalla guida.
Inizialmente la molla è compressa e trasferisce la sua energia potenziale al punto sotto forma di energia cinetica. La forza di attrito dinamico fa lavoro sul punto e dissipa energia.

$$\Delta E_k = W_{att} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mg\left(L - l_0 + d\right)$$

$$\frac{1}{2}mgR - \frac{1}{2}Kd^2 = -\mu_d mg(L - l_0 + d) =$$

$$\mu = \frac{Kd^2 - mgR}{2mg(L - l_0 + d)} = 0.20$$

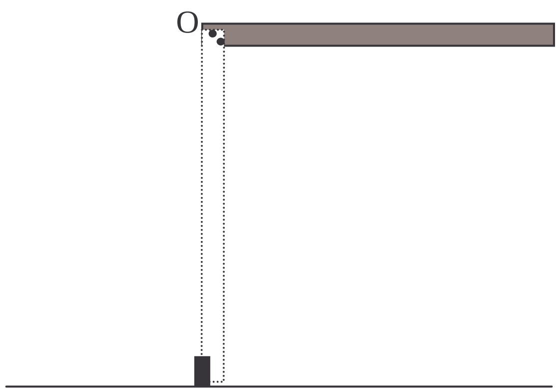
Problema 2

Un' asta omogenea di lunghezza L=0.5 m e massa m=3.0 kg può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale che passa per un suo estremo O. Si supponga che l'asta sia inizialmente in quiete in posizione orizzontale. Si toglie il vincolo che la tiene in quiete e l'asta si mette in movimento sotto l'azione della sua forza peso. Quando l'asta raggiunge la posizione verticale urta un piolo fisso e inverte il suo moto.

1- Nell'ipotesi che il vincolo in O sia liscio si determini la velocità angolare dell'asta immediatamente prima dell'urto. ω=……………….
2- Si osserva che dopo l'urto l'asta ruota di un angolo $\theta=\pi/3$ prima di fermarsi. Si determini l'impulso impresso all'asta dal vincolo durante l'urto. J=………………….

Si supponga, invece, che sull'asse agisca durante tutto il moto un momento di attrito costante M.
L'urto con il piolo sia ora elastico e, di nuovo, l'asta arresti il suo moto dopo aver percorso un angolo $\theta=\pi/3$ dopo l'urto.

3- Si determini il valore del momento di attrito. M_{ATT}=……………..



L'asta si mette in moto sotto l'azione della sua forza peso. Il vincolo è liscio per cui si conserva l'energia meccanica del sistema. Ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nel punto di quota minima del CM della sbarra (posizione verticale) si ha:

$$mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad I=\frac{mL^2}{3}=0.25\ \text{kg m}^2 \qquad \omega=\sqrt{\frac{mgL}{I}}=\sqrt{\frac{3mgl}{mL^2}}=\sqrt{\frac{3g}{L}}=7.67\ \text{rad/s}$$

Ancora, si conserva l'energia meccanica del sistema per cui, chiamando ω' la velocità angolare dopo l'urto, si ha:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}I\omega'^2=\frac{1}{2}\frac{mgL^2}{3}\omega'^2 \quad \Rightarrow \quad \omega'=\sqrt{\frac{3g}{2L}}=5.42\ \text{rad/s}$$

L'impulso impresso all'asta è pari alla variazione della sua quantità di moto. Ricordando che il verso delle velocità angolari è opposto prima e dopo l'urto si ha:

$$\vec{J}=\Delta\vec{P} \qquad J=mv'_{CM}-mv_{CM}=m\frac{L}{2}\left(\omega'-(-\omega)\right)=9.82\,\text{Ns}$$

Si deve , ora, supporre che il vincolo non sia liscio. Il momento di attrito che agisce sull'asse dissipa energia sia nella parte di discesa dell'asta che in quella di risalita. Ponendo sempre lo zero dell'energia potenziale nel punto di minima quota del CM si ha:

$\frac{1}{2}I\omega^2-mg\frac{L}{2}=-M_{att}\frac{\pi}{2}$ nella parte di discesa.

Se l'urto è elastico si conserva l'energia cinetica nell'urto, quindi per il moto dopo l'urto si può scrivere:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}I\omega^2=-M_{att}\frac{\pi}{3}$$

Il bilancio energetico per il moto complessivo da:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)-mg\frac{L}{2}=-M_{att}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left|M_{att}\right|=\frac{mgL}{4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=1.403\ Nm$$

Problema 3

Un cilindro con 2 moli di un gas ideale monoatomico è chiuso da un pistone scorrevole senza attrito, ed e' in equilibrio termico con un contenitore entro il quale è posta inizialmente una miscela refrigerante alla temperatura T = 0 ˚C, costituita da una massa M = 1.5 kg di acqua contenente una quantità m = 100 g di ghiaccio. All'istante t = 0, viene attivato un dispositivo riscaldante che, mediante una corrente che fluisce in una resistenza elettrica immersa nella miscela di acqua e ghiaccio, trasferisce lentamente calore al sistema con potenza P = 2.5 W per un tempo Δt = 10 ore. Sapendo che l'esterno del sistema è alla pressione atmosferica e che durante la trasformazione il gas si mantiene in equilibrio termico con il contenitore, calcolare:

1) dopo quanto tempo dall'accensione del dispositivo riscaldante si sarà fuso tutto il ghiaccio,

t=…………..

2) la temperatura e il volume finale del gas nello stato di equilibrio raggiunto dal sistema allo spegnimento del dispositivo riscaldante;

T_f=…………………V_f=……………..

3) il rapporto fra il calore assorbito dal gas e quello assorbito dall'acqua dal momento in cui il ghiaccio è tutto fuso fino all'istante finale.

Q_g/Q_{H2O}=……..

(Per la soluzione assumere i seguenti valori: pressione atmosferica $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg, calore specifico dell'acqua c_A = 4186.8 J/(kg ˚K)).

La trasformazione avviene alla pressione atmosferica. Il lavoro totale erogato dall'esterno è dato da:
$W = Pt = 2.5 \cdot 3600 \cdot 10 = 90 \cdot 10^3$ J $= 90$ kJ
Dal momento che il sistema che eroga la potenza non fa lavoro, tutto il lavoro va in calore trasferito al sistema acqua-ghiaccio+gas ($W=Q_{tot}$).
Il sistema complessivo non può variare la sua temperatura fintantoché non si sia sciolto tutto il ghiaccio. Per sciogliere tutto il ghiaccio è necessario somministrargli una quantità di calore $Q=m\lambda$ $Q=33$ kJ.
Qundi il tempo necessario per sciogliere il ghiaccio sarà:

$$t = \frac{Q}{P} = 13200 \text{ s}$$

Di conseguenza alla fine della trasformazione tutto il ghiaccio sarà stato sciolto e il sistema complessivo avrà raggiunto una temperatura di equilibrio maggiore di T_0.

$$Q_{tot} = Q + Q_{H2O} + Q_{gas} \qquad Q_{H2O} = \left(m_{H2O} + m_{ghiaccio}\right)c_A\left(T_f - T_0\right) \qquad Q_{gas} = nC_p\left(T_f - T_0\right)$$

$$T_f = T_0 + \frac{Q_{tot} - Q}{\left[\left(m_{H2O} + m_{ghiaccio}\right)c_A + nC_p\right]} = 273 + 8.45 = 281.4 \text{ K}$$

$$V_f = \frac{nRT_f}{p_o} = 4.62 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\frac{Q_{gas}}{Q_{H2O}} = \frac{nC_p\left(T_f - T_0\right)}{\left(m_{H2O} + m_{ghiaccio}\right)c_A\left(T_f - T_0\right)} = 6.2 \cdot 10^{-3}$$