FACOLTA' DI   INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica
VERDE
Prova scritta del *18 Marzo 2006*

Problema 1

Un punto materiale P di massa m=1 kg può scorrere su un piano orizzontale OA di lunghezza L=5 m contiguo a una guida circolare liscia di raggio R incognito, come in figura. Il punto P e' inizialmente fermo a contatto dell'estremità di una molla di lunghezza a riposo l_0=1 m e costante elastica K=150 N/m, inizialmente compressa della quantità d=0.45 m. Ad un certo istante, P viene lasciato libero di muoversi.

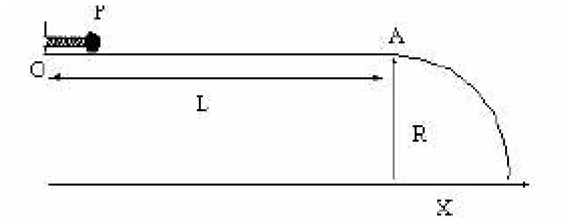
Determinare:

1) Il massimo raggio R della guida affinché P si stacchi dal piano orizzontale, supposto liscio, nella posizione A di raccordo tra lo stesso e la guida circolare; R_{max}=…………

Se il raggio della guida e' R=2 m, calcolare:

2) L'angolo ϕ tra la velocità di P e l'asse delle x nell'istante in cui P giunge al suolo, se il piano orizzontale OA e' liscio; ϕ=………………

3) Il massimo coefficiente di attrito dinamico μ_d tra P e il piano orizzontale OA, supposto scabro, affinché P si stacchi dalla guida circolare ancora nella posizione A; μ=…………..



Se il punto si muove sulla guida circolare, risente di una forza normale.
L'equazione del moto del punto all'inizio della guida è:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N$$

Il punto si stacca dalla guida se non risente della forza normale, quindi se

$$mv^2 = mgR$$

Inizialmente l'energia meccanica del sistema molla-punto è solo dato dall'energia potenziale della molla, quando la molla si rilascia, trasferisce tutta la sua energia potenziale al punto materiale, sotto forma di energia cinetica:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Il massimo raggio compatibile con questo moto è quello corrispondente all'energia cinetica minima per la quale il punto si stacca in A dalla guida:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 > \frac{1}{2}mgR \qquad \Rightarrow \qquad R \le \frac{Kd^2}{mg} = 3.1m$$

Se il punto lascia la guida la sua velocità iniziale è orizzontale e poi prosegue il suo moto sotto l'azione della forza peso, quindi:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Kd^2}{m}} = 5.51m/s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v \\ v_y(t) = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = R - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$ Il punto arriverà a terra quando la sua coordinata y sarà nulla.

$$y = 0 \qquad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.64s \qquad \Rightarrow \begin{cases} v_x(t_1) = 5.51 m/s \\ v_y(t_1) = -gt_1 = -6.27 m/s \end{cases} \qquad \tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = -1.138$$

$$\phi = -48.7°$$

Il massimo coefficiente di attrito dinamico compatibile è quello che fa si che il punto materiale arrivi in A con la minima velocità per cui si stacca dalla guida.
Inizialmente la molla è compressa e trasferisce la sua energia potenziale al punto sotto forma di energia cinetica. La forza di attrito dinamico fa lavoro sul punto e dissipa energia.

$$\Delta E_k = W_{att} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_d m g (L - l_0 + d)$$

$$\frac{1}{2} mgR - \frac{1}{2} K d^2 = -\mu_d mg (L - l_0 + d) =$$

$$\mu = \frac{K d^2 - mgR}{2mg(L - l_0 + d)} = 0.12$$

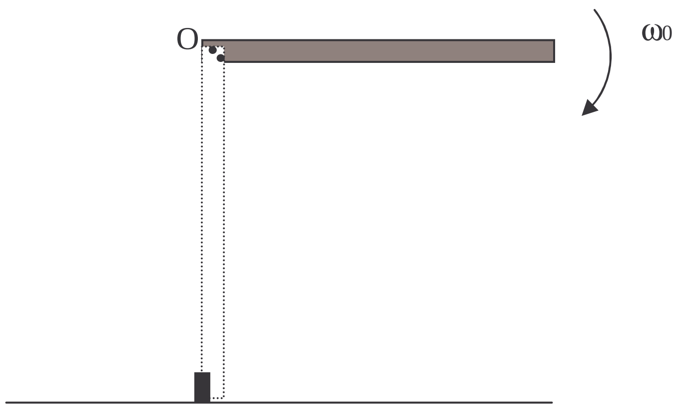
Problema 2
Un' asta omogenea di lunghezza L=0.3m e massa m=2.0 kg può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale che passa per un suo estremo O. All'istante iniziale l'asta passa per la posizione orizzontale con velocità angolare ω_0=1 rad/s. Quando l'asta raggiunge la posizione verticale urta un piolo fisso e inverte il suo moto.

1-Nell'ipotesi che il vincolo in O sia liscio si determini la velocità angolare dell'asta immediatamente prima dell'urto. ω=……………….

2-Si osserva che dopo l'urto l'asta ruota di un angolo $\theta=\pi/6$ prima di fermarsi. Si determini l'impulso totale impresso all'asta durante l'urto. J=………………….

Si supponga, invece, che sull'asse agisca durante tutto il moto un momento di attrito costante M.
L'urto con il piolo sia ora elastico e l'asta arresti il suo moto dopo aver percorso un angolo $\theta_1=\pi/3$ dopo l'urto.

3- Si determini il valore del momento di attrito. M_{ATT}=……………..



$$I = \frac{mL^2}{3} = 0.06 kg \cdot m^2$$

Il moto dell'asta avviene sotto l'azione di forze conservative, per cui l'energia meccanica si conserva. Ponendo lo zero dell'energia potenziale nel punto di minimo (asta verticale) si ha:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 - mg\frac{L}{2} = 0 \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g}{L}} = 9.95 rad/s$$

Chiamata ω' la velocità angolare dell'asta dopo l'urto, si ha ancora la conservazione dell'energia meccanica, per cui:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}I\omega'^2 = 0 \qquad \omega' = \sqrt{\frac{mgL\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)}{I}} = 3.62 rad/s$$

L'impulso impartito all'asta durante l'urto è pari alla variazione di quantità di moto del suo CM. Tenendo conto che il verso di rotazione dell'asta si inverte durante l'urto si ha:

$$J = \Delta P = m\frac{L}{2}(\omega' + \omega) = 4.07 rad/s$$

Si deve , ora, supporre che il vincolo non sia liscio. Il momento di attrito che agisce sull'asse dissipa energia sia nella parte di discesa dell'asta che in quella di risalita. Ponendo sempre lo zero dell'energia potenziale nel punto di minima quota del CM si ha:

$\frac{1}{2}I\omega^2 - mg\frac{L}{2} - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = -M_{att}\frac{\pi}{2}$ nella parte di discesa.

Se l'urto è elastico si conserva l'energia cinetica nell'urto, quindi per il moto dopo l'urto si può scrivere:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}I\omega^2 = -M_{att}\frac{\pi}{3}$$

Il bilancio energetico per il moto complessivo da:

$$mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) - mg\frac{L}{2} - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = -M_{att}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \qquad |M_{att}| = \frac{mgL\cos\frac{\pi}{3} + I\omega_0^2}{2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 0.57\ Nm$$

Problema 3

Un cilindro con 1.8 moli di un gas ideale monoatomico è chiuso da un pistone scorrevole senza attrito, ed è in equilibrio termico con un contenitore entro il quale è posta inizialmente una massa M = 2.2 kg di acqua alla temperatura T. All'istante t = 0, viene attivato un dispositivo di raffreddamento che, mediante un fluido refrigerante che scorre entro una serpentina immersa nell' acqua, estrae lentamente calore dal sistema con potenza P = 3.25 W per un tempo Δt = 10 ore. Quando il dispositivo di raffreddamento viene spento si verifica che una massa m = 60 g di acqua è diventata ghiaccio. Sapendo che l'esterno del sistema è alla pressione atmosferica e che durante la trasformazione il gas si mantiene in equilibrio termico con il contenitore, calcolare:

1) dopo quanto tempo dall'accensione del dispositivo di raffreddamento comincia a formarsi il ghiaccio: t=…………..

2) la temperatura e il volume del gas nello stato di equilibrio iniziale;

T_i=…………………V_i=……………..

3) il rapporto fra il calore ceduto dal gas e quello ceduto dall'acqua dall'inizio del raffreddamento fino all'istante in cui comincia a formarsi il ghiaccio.

Q_g/Q_{H2O}=……..

(Per la soluzione assumere i seguenti valori: pressione atmosferica $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg, calore specifico dell'acqua c_A = 4186.8 J/(kg °K)).

La trasformazione avviene alla pressione atmosferica. Il dispositivo raffreddante sottrae calore al sistema secondo la:

$$Q = Pt = 3.25 \cdot 3600 \cdot 10 = 117 \cdot 10^3 \ J = 117 \ kJ$$

Il calore sottratto al sistema proviene in parte dal raffreddamento dell'acqua+gas e in parte dal cambiamento di fase.

$$|Q| = Q_1 + Q_2 \qquad Q_1 = Mc_A \Delta T \qquad Q_2 = m\lambda = 19.8 \cdot 10^3 \ J$$

$$Q_1 = |Q| - Q_2 = 97.2 \cdot 10^3 \ J \qquad t = \frac{Q_1}{P} = 29908s = 8.31h$$

$$\Delta T = \frac{Q_1}{Mc_A + nC_p} = 10.51K \quad \Rightarrow \quad T_i = 273 + 10.51 = 283.5K \qquad V_i = \frac{nRT_i}{p_0} = 4.19 \cdot 10^{-2} \, m^3$$

$$\frac{Q_{gas}}{Q_{H2O}} = \frac{nC_p}{Mc_A} = 4.06 \cdot 10^{-3}$$