



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica

Canale

Prova scritta del 31 Marzo 2006

Problema 1

Un punto materiale di massa $m_1 = 60 \text{ g}$ è in moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$ in senso orario lungo una circonferenza di raggio $R = 35 \text{ cm}$ che giace in un piano orizzontale, come in figura. Un secondo punto materiale di massa $m_2 = 95 \text{ g}$ è inizialmente fermo nel punto P, esterno alla circonferenza. A partire dall'istante $t = 0$ la massa m_2 viene sottoposta ad una forza costante $F = 1.4 \times 10^{-2} \text{ N}$ che la mette in moto lungo una retta orizzontale tangente alla circonferenza, fino a che, giunta nel punto A, alla distanza d da P, urta elasticamente e frontalmente la massa m_1 . Sapendo che all'istante $t = 0$ la massa m_1 si trovava nella posizione B, diametralmente opposta ad A, e che l'urto avviene dopo che la massa m_1 ha compiuto un giro e mezzo, calcolare:

- La distanza d .

$d = \dots\dots\dots$

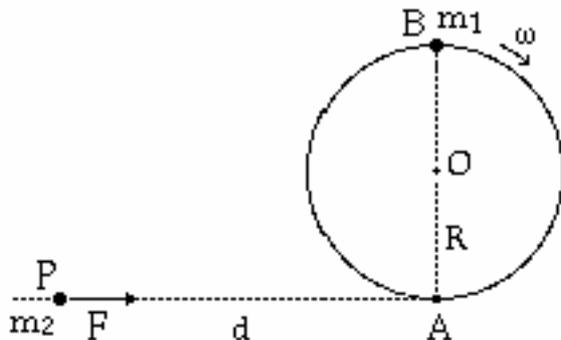
Dopo l'urto m_2 rimbalza indietro e ritorna verso il punto P senza essere più sottoposta a nessuna forza. Calcolare:

- Il tempo trascorso fra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante in cui la massa m_2 raggiunge nuovamente il punto P;

$t = \dots\dots\dots$

- la velocità di m_1 dopo l'urto.

$v = \dots\dots\dots$



Il punto m_1 ruota con velocità angolare costante e dal tempo t_0 percorre 1.5 giri, nello stesso tempo il punto m_2 percorre la distanza d , per cui:

$$\frac{3}{2}2\pi = \omega t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 6.28 \text{ s} \quad d = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_2} t_1^2 = 2.9 \text{ m}$$

L'urto è non vincolato ed elastico, si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto del sistema. Posto il verso positivo delle velocità verso destra si ha:

$$v_{1,i} = -\omega R = -0.525 \text{ m/s} \quad v_{2,i} = a t_1 = 0.923 \text{ m/s}$$

Dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema si trova che:

$$v_{2,f} = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{(m_1 + m_2)} = -0.198 \text{ m/s} \quad t_2 = \frac{d}{|v_{2,f}|} = 14.65 \text{ s} \quad t_{tot} = t_1 + t_2 = 20.93 \text{ s}$$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{(m_1 + m_2)} = 1.25m/s$$

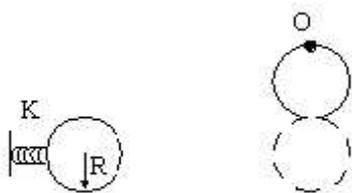
Il punto m_1 dopo l'urto si muove verso destra.

Problema 2

Un disco di massa $m=2$ kg e raggio $R=0.5$ m è appoggiato con una faccia ad un piano orizzontale liscio. All'istante iniziale il disco è a contatto di una molla di costante elastica $K=100$ N/m, compressa della quantità d incognita. A un certo istante il disco è lasciato libero di muoversi. Durante il moto, il disco urta in modo completamente anelastico un disco uguale che può ruotare sul piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il punto O, come in figura.

Se la velocità angolare del sistema formato dai due dischi dopo l'urto è $\omega=2$ rad/s, determinare:

- La compressione iniziale d della molla; d=.....
- L'impulso trasferito al sistema dal vincolo durante l'urto; J=.....
- L'energia dissipata durante l'urto. $\Delta E=.....$



Il momento angolare rispetto al polo fisso O si conserva nell'urto :

$$L_{O_i} = L_{O_f} \quad L_{O_i} = mv3R \quad L_{O_f} = I_{tot} \omega \quad I_{tot} = I_1 + I_2 \quad I_1 = \frac{mR^2}{2} + m(3R)^2$$

$$I_2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 \quad I_{tot} = 11mR^2 = 5.5kgm^2$$

$$\Rightarrow 3mvR = 11mR^2\omega \quad \Rightarrow v = \frac{11}{3}R\omega = 3.67m/s$$

L'energia potenziale della molla viene trasformata in energia cinetica del disco:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow d = \sqrt{\frac{mv^2}{K}} = \sqrt{\frac{m}{K} \left(\frac{11}{3}R\omega \right)^2} = 0.52m$$

Per definizione l'impulso trasferito al sistema è uguale alla variazione della sua quantità di moto:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \quad P_f = 2mv_{CM,f} = 2m \cdot 2R \cdot \omega \quad P_i = 2mv_{CM,i} = 2m \cdot \frac{v}{2} = mv$$

$$J = 4m\omega R - mv = 0.66Ns$$

L'energia dissipata nell'urto è pari all'energia cinetica dissipata nell'urto:

$$\Delta E = E_{K,f} - E_{K,i} \quad E_{K,f} = \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 \quad E_{K,i} = \frac{1}{2} m v^2 \quad |\Delta E| = 2.44 J$$

Problema 3

Una mole di gas ideale biatomico si trova in uno stato di equilibrio termodinamico A caratterizzato da $p_A = p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e $T_A = 273 \text{ K}$. Tramite una trasformazione isocora reversibile passa allo stato B. Nella trasformazione AB l'energia interna del gas varia della quantità $\Delta U = 3118 \text{ J}$. In seguito il gas, a contatto termico con un serbatoio ideale alla temperatura T_B , esegue una trasformazione isoterma reversibile fino allo stato C. Da C ritorna in A tramite una trasformazione isobara.

Si determinino:

- Il volume in C V_C =
- La variazione di energia interna del serbatoio a seguito della trasformazione BC, $\Delta U_S = \dots\dots\dots$
- Il rendimento del ciclo $\eta = \dots\dots\dots$

La prima trasformazione è un'isocora reversibile, per definizione in questa trasformazione il gas non fa lavoro, per cui:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 3118 \text{ J} = n C_V (T_B - T_A) \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A + \frac{\Delta U_{AB}}{n C_V} = 423 \text{ K}$$

Nello stato C il gas ha la stessa pressione che in A e la stessa temperatura che in B, quindi:

$$V_C = \frac{n R T_C}{P_C} = \frac{n R T_B}{P_A} = 34.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

Nella trasformazione BC il gas non varia la sua energia interna e compie un lavoro:

$$W_{BC} = Q_{BC} = n R T_B \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) = 1551.5 \text{ J}$$

Il gas assorbe il calore Q_{BC} dalla sorgente che quindi cede una quantità di calore $-Q_{BC}$. Una sorgente scambia calore e non compie lavoro per cui il primo principio scritto per la sorgente dà:

$$Q_S = W_S + \Delta U_S \quad W_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_S = Q_S = -Q_{BC} = -1551.5 \text{ J}$$

Il calore scambiato dal gas nella trasformazione CA (isobara) è:

$$Q_{CA} = n C_p (T_A - T_C) = -4364.9 \text{ J}$$

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}}{(Q_{AB} + Q_{BC})} = 0.065 = 6.5\%$$