FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Prova scritta del 31 Marzo 2006

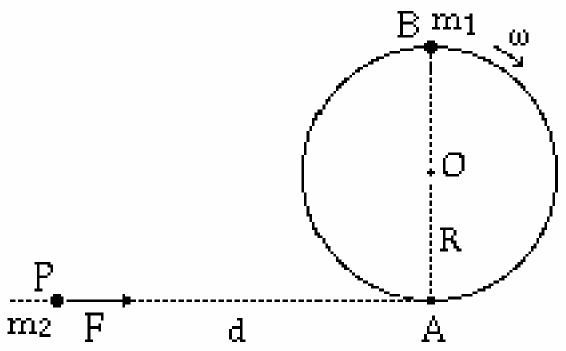
Problema 1

Un punto materiale di massa m_1 = 83 g e' in moto circolare uniforme con velocità angolare ω in senso orario lungo una circonferenza di raggio R = 35 cm che giace in un piano orizzontale, come in figura. Un secondo punto materiale di massa m_2= 65 g e' inizialmente fermo nel punto P, esterno alla circonferenza. A partire dall'istante t = 0 la massa m_2 viene sottoposta ad una forza costante F = 2.5 x 10^{-2} N che la mette in moto lungo una retta orizzontale tangente alla circonferenza, fino a che, giunta nel punto A, alla distanza d = 2.5 m da P, urta elasticamente e frontalmente la massa m_1. Sapendo che all'istante t = 0 la massa m_1 si trovava nella posizione B, diametralmente opposta ad A, e che l'urto avviene dopo che la massa m1 ha compiuto un giro e mezzo, calcolare:

- la velocita angolare ω prima dell'urto. ω=…………..

Dopo l'urto m_2 rimbalza indietro e ritorna verso il punto P senza essere più sottoposta a nessuna forza. Calcolare:

- il tempo trascorso fra l'istante iniziale t=0 e l'istante in cui la massa m_2 raggiunge nuovamente il punto P; t=…………….
- la velocità di m_1 dopo l'urto. v=……………..



Il punto m_1 ruota con velocità angolare costante e dal tempo t_0 percorre 1.5 giri , nello stesso tempo il punto m_2 percorre la distanza d, per cui:

$$a = \frac{F}{m_2} \qquad d = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2dm_2}{F}} = 3.6s \qquad \frac{3}{2}2\pi = \omega t_1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3\pi}{t_1} = 2.61 rad/s$$

L'urto è non vincolato ed elastico, si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto del sistema. Posto il verso positivo delle velocità verso destra si ha:

$$v_{1,i} = -\omega R = -0.915 m/s \qquad v_{2,i} = at_1 = 1.385 m/s$$

Dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema si trova che:

$$v_{2,f} = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{(m_1 + m_2)} = -1.19 m/s \qquad t_2 = \frac{d}{|v_{2,f}|} = 2.09s \qquad t_{tot} = t_1 + t_2 = 5.69s$$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{(m_1 + m_2)} = 1.10m/s$$

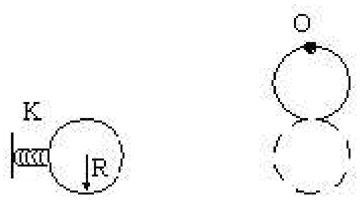
Il punto m_1 dopo l'urto si muove verso destra.

Problema 2

Un disco di massa m=3 kg e raggio R=0.5 m è appoggiato con una faccia ad un piano orizzontale liscio. All'istante iniziale il disco è a contatto di una molla di costante elastica K incognita, compressa della quantità d=0.3 m. A un certo istante il disco è lasciato libero di muoversi. Durante il moto, il disco urta in modo completamente anelastico un disco uguale che può ruotare sul piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il punto O, come in figura.

Se la velocità angolare del sistema formato dai due dischi dopo l'urto è ω=1 rad/s, determinare:

- La costante elastica K della molla; K=……………
- L'impulso trasferito al sistema dal vincolo durante l'urto; J=…………….
- L'energia dissipata durante l'urto. ΔE=…………….



Il momento angolare rispetto al polo fisso O si conserva nell'urto :

$$L_{Oi} = L_{Of} \qquad L_{Oi} = mv3R \qquad L_{Of} = I_{tot}\omega \qquad I_{tot} = I_1 + I_2 \qquad I_1 = \frac{mR^2}{2} + m(3R)^2$$

$$I_2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 \qquad I_{tot} = 11mR^2 = 8.25kgm^2$$

$$\Rightarrow \quad 3mvR = 11mR^2\omega \qquad \Rightarrow \quad v = \frac{11}{3}R\omega = 1.83m/s$$

L'energia potenziale della molla viene trasformata in energia cinetica del disco:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{mv^2}{d^2} = \frac{m}{d^2}\left(\frac{11}{3}R\omega\right)^2 = 112N/m$$

Per definizione l'impulso trasferito al sistema è uguale alla variazione della sua quantità di moto:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \qquad P_f = 2mv_{CM,f} = 2m \cdot 2R \cdot \omega \qquad P_i = 2mv_{CM,i} = 2m \cdot \frac{v}{2} = mv$$

$$J = 4m\omega R - mv = 0.51Ns$$

L'energia dissipata nell'urto è pari all'energia cinetica dissipata nell'urto:

$$\Delta E = E_{K,f} - E_{K,i} \qquad E_{K,f} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 \qquad E_{K,i} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Delta E = 0.90J$$

Problema 3

n=0.5 moli di gas ideale biatomico si trovano in uno stato di equilibrio termodinamico A caratterizzato da $p_A=p_0=1.01\ 10^5$ Pa e $T_A=423K$. Tramite una trasformazione isobara reversibile il gas passa allo stato B. Nella trasformazione AB il gas cede all'ambiente una quantità di calore $Q_{AB}=-2182.5$ J. Tramite una trasformazione isocora reversibile il gas si porta in uno stato di equilibrio C in cui $T_C=T_A$. In seguito il gas, a contatto termico con un serbatoio ideale alla temperatura T_A, esegue una trasformazione isoterma reversibile che lo riporta allo stato iniziale. Si determinino:

-Il volume in C V_C= …………..

-La variazione di energia interna del serbatoio a seguito della trasformazione CA, ΔU_S=……….

-Il rendimento del ciclo η=…………..

Essendo la prima trasformazione un'isobara si ha:

$$Q_{AB} = nC_p\left(T_B - T_A\right) \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A - \frac{\left|Q_{AB}\right|}{nC_p} = 273K$$

$$V_B = V_C = \frac{nRT_B}{p_B} = \frac{nrT_B}{p_A} = 1.12 \cdot 10^{-2}\, m^3$$

Durante la trasformazione isocora BC il gas scambia con l'ambiente una quantità di calore:

$$Q_{BC} = nC_V\left(T_C - T_B\right) = nC_V\left(T_A - T_B\right) = 1559J$$

Durante la trasformazione isoterma reversibile l'energia interna del gas non varia per cui, dal primo principio della termodinamica, si ha:

$$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A\, ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 774.7J$$

Il gas assorbe il calore Q_{CA} dalla sorgente che quindi cede una quantità di calore $-Q_{CA}$. Una sorgente scambia calore e non compie lavoro per cui il primo principio scritto per la sorgente dà:

$$Q_S = W_S + \Delta U_S \qquad W_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_S = Q_S = -Q_{CA} = -774.7\,J$$

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}}{\left(Q_{BC} + Q_{CA}\right)} = \frac{-2182.5 + 1559 + 774.7}{1559 + 774.7} = 0.0648 = 6.5\%$$