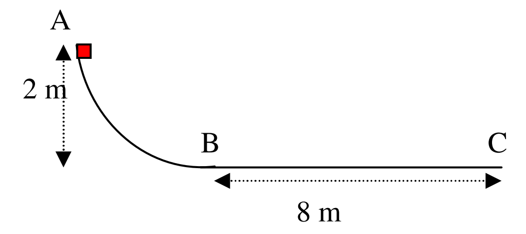
Esercizi sulla conservazione dell'energia meccanica

1.



Un piccolo blocco di massa m=300 g parte da fermo dalla posizione A, arriva in B con velocità v=4 m/s, poi scivola lungo la superficie orizzontale per una distanza d=8 m prima di fermarsi.
a)Si determini il lavoro della forza di attrito lungo la superficie curva. W= -3.48 J
b) Si determini il coefficiente di attrito lungo la superficie orizzontale. μ= 0.1

Conservazione dell'energia meccanica e lavoro della forze di attrito:

$$E_A = mgh \qquad E_B = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_B - E_A = W_{att} \qquad W_{att} = -3.48J$$

Lavoro delle forze di attrito lungo la superficie orizzontale:

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_C = 0 \qquad W_{att} = -\mu mgd \qquad \mu = \frac{v^2}{2gd} = 0.1$$

2. Una particella di massa m=2 kg si muove sotto l'influenza della forza $F(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$N. Se la sua velocità a x=2.0 m è v=6.0 m/s, quale è la sua velocità a x=7.0 m? v= 6.59 m/s

Teorema dell'energia cinetica (delle forze vive)

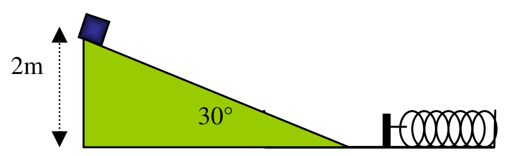
$$W = \Delta E_K \qquad \Delta E_K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Calcolo del lavoro della forza:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)dx = \int_2^7 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6\left(7^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) = 7.39J$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2W}{m} = 43.4\, m^2/s^2 \qquad v = 6.59\, m/s$$

3.



Un punto materiale di massa m=10 kg viene rilasciato dal punto più alto di un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Giunto in fondo collide con una molla ideale comprimendola al massimo di 0.75 m. La costante elastica della molla è K=500 N/m, l'altezza del piano inclinato è h=2 m e la superficie orizzontale è priva di attrito. Si calcolino: la velocità dell'oggetto al fondo del piano inclinato, il lavoro delle forze di attrito lungo il piano inclinato.
La molla respinge indietro il punto materiale, qual è la velocità del punto quando raggiunge la base del piano inclinato? v= 5.3 m/s
Qual è l'altezza massima che raggiunge? h_{max}= 1.12 m

Conservazione dell'energia meccanica sul piano orizzontale:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kx^2\end{cases} \qquad v = \sqrt{\frac{Kx^2}{m}} = 5.3\,m/s$$

Essendo la superficie orizzontale priva di attrito, la velocità con la quale il punto tornerà alla base del piano inclinato è la stessa.

Lavoro delle forze di attrito sul piano inclinato

$$\frac{1}{2}Kx^2 - mgh = W_{att} \qquad W_{att} = -55.4J$$

Teorema dell'energia cinetica nella fase di risalita:

$$W_{att,1} = -F_{att}x = -F_{att}\frac{h_1}{sen\alpha} \qquad \Delta E_K = W \qquad 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgh_1 - F_{att}\frac{h_1}{sen\alpha} \qquad h_1 = 1.12m$$

4. Una piccola sfera di massa m è attaccata ad un filo in estensibile di lunghezza a=0.9 m. La massa viene lasciata libera dalla posizione orizzontale col filo teso. Un piccolo perno si trova ad una distanza h sotto il punto in cui è appesa la massa. Si dica quale è il minimo valore di h per il quale la massa riesce ad avvolgersi completamente attorno al perno. h= 0.54 m

Sulla sfera l'unica forza esterna che può compiere lavoro è la forza peso (la reazione vincolare in h non compie lavoro), il sistema è quindi sottoposto alla sola azione di forze conservative, si conserva l'energia meccanica. Detto A il punto di partenza, B il punto di minima quota sulla verticale e C il punto di massima quota rispetto ad h si ha:

$$E_A = mga \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad E_C = 2mg(a-h) + \frac{1}{2}mv_C^2$$

In C le forze che agiscono sono la forza peso e la tensione del filo, dirette come la verticale ed equiverse. Perché la massa m riesca a compiere un giro la velocità deve essere almeno tale da annullare la tensione del filo, quindi:

$$mg + T = \frac{mv_C^2}{a-h} \quad T \le 0 \Rightarrow v_C^2 \ge g(a-h)$$

ponendo come condizione limite quella di uguaglianza si ha:

$$mga = 2mg(a-h) + \frac{1}{2}mg(a-h) \quad h = \frac{3}{5}a = 0.54m$$

5.Su un piano orizzontale scabro è posto un corpo di massa M=1 kg. Il coefficiente di attrito statico tra piano e corpo sia μs=0.7. Il corpo è connesso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile ad un punto materiale di massa m=M/2 (vedi figura). Inizialmente la parte di filo verticale ha lunghezza L=0.5 m ed il sistema si trova in equilibrio stabile.

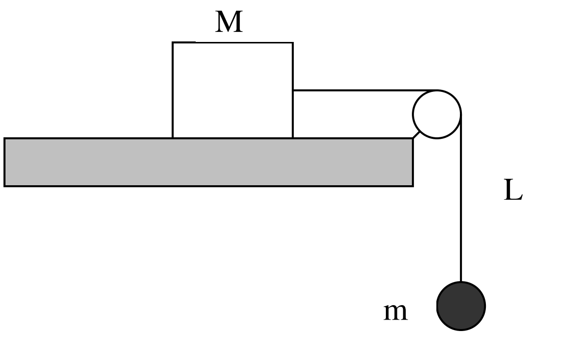
a) si determini il valore della forza di attrito statico tra corpo e piano. F_{att} = 6.86 N

In un secondo tempo si sposta la massa m dalla posizione di equilibrio di un angolo θ=35° e la si lascia libera di oscillare in un piano verticale.

b) Si determini la velocità della massa m quando passa per la verticale v= 1.33 m/s

c) Si determini la tensione massima del filo T_{max}= 6.67 N

d) Si dica se il corpo M si trova ancora in equilibrio statico giustificando la risposta.



Problema 5

$F_{att,max} = \mu_s mg = 6.86N$

$$\begin{cases} 0 = T - F_{att} \\ 0 = mg - T \end{cases} \qquad F_{att} = mg = 4.9N < F_{att,max}$$

Conservazione dell'energia meccanica:

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} = 1.33 \, m/s$$

Scegliendo per descrivere il moto un sistema ortogonale con un asse tangente alla traiettoria e l'altro orientato come la tensione l'equazione del moto lungo la normale diventa:

$$ma_N = m\frac{v^2}{L} = T - mg\cos\theta$$

La tensione è massima per θ=0 e $v=v_{max}$, quindi sulla verticale, da cui:

$$m\frac{v^2}{L} = T_{max} - mg \quad \Rightarrow \quad T_{max} = \frac{mv^2}{L} + mg = 6.67N$$

Essendo la tensione del filo ancora minore della forza di attrito statico massimo, il corpo di massa M si troverà ancora in equilibrio statico.

6. Un punto materiale di massa M=0.2 kg è in quiete all'interno di una calotta cilindrica liscia di raggio R=0.5 m. All'istante iniziale il punto materiale è fermo ad una quota R rispetto al fondo della calotta. In un istante successivo esso inizia a scivolare e, raggiunta la fine della calotta (vedi figura) prosegue il suo moto.

Si determinino

a) Il modulo della velocità che possiede il punto materiale quando abbandona la calotta
v= 2.91 m/s

b) A quale distanza da questo punto toccherà terra, x= 0.85 m

c) Il lavoro fatto dalle forze che agiscono sul punto materiale - dalla posizione iniziale a quella in cui lascia la calotta - in tutto il moto W_1=0.85 J W_2= 0.98 J

Conservazione dell'energia meccanica, ponendo lo zero dell'energia potenziale al minimo della calotta:

$$\mathrm{E} = \mathrm{cost.} \quad \mathrm{E_{in}} = \mathrm{mgR} \quad \mathrm{E_{fin}} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + \mathrm{mgR}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgR\left(1-cos\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{2gR\,cos\frac{\pi}{6}}=2.91m/s$$

Ora il punto materiale abbandona la calotta e inizia un moto parabolico con velocità iniziale v e angolo di alzo π/6. Le equazioni parametriche del moto sono:

$$\begin{cases} v_x=v\cos\frac{\pi}{6} \\ v_y=v\sin\frac{\pi}{6}-gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x=v\cos\frac{\pi}{6}\cdot t \\ y=h_0+v\sin\frac{\pi}{6}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La distanza dal punto iniziale si ottiene ponendo y=0 e tenendo conto che l'altezza iniziale $h_0=R(1-\cos\pi/6)=6.7\ 10^{-2}$ m

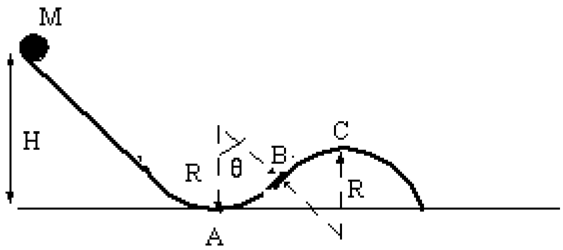
$$t=0.337s \qquad d=0.85m$$

Teorema dell'energia cinetica e lavoro della forza peso:

$$W=\Delta E_k \quad W_1=\frac{1}{2}mv^2=0.85J \quad W_2=-\Delta E_P=mgR=0.98J$$

7. Un punto materiale M di massa 0.2 kg può scendere senza attrito lungo la guida rappresentata in figura, costituita da un piano inclinato raccordato a due semicirconferenze di raggio R=0.5 m. Inizialmente il punto è fermo all'altezza H=1.5 m rispetto al suolo. Ad un certo istante inizia il moto.

1) Determinare la reazione vincolare nella posizione A; N=13.72 N
2) Si verifichi che il punto materiale M si stacca dalla guida nella posizione B di raccordo tra le due semicirconferenze (θ=45°);
3) Determinare l'altezza di M quando passa per la verticale del punto C durante il moto parabolico; h_1= 0.45 m



La guida è liscia, si conserva l'energia meccanica del punto materiale, per cui il punto avrà in A la velocità:

$$MgH=\frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad v_A=\sqrt{2gH}=5.42m/s$$

In A le forze che agiscono sul punto materiale sono tutte verticali: la forza peso diretta verso il basso e la reazione vincolare diretta verso il centro della traiettoria. La loro risultante deve dare la componente centripeta necessaria allo svolgimento del moto circolare:

$$-Mg+N=\frac{Mv_A^2}{R} \qquad \Rightarrow \quad N=\frac{Mv_A^2}{R}+Mg=13.72N$$

Quando il punto è in B possiede una velocità v_B che si può calcolare, ancora, dalla conservazione dell'energia meccanica.

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_B^2 + R(1-\cos 45°) \qquad v_B = \sqrt{2g\left(H - R\left(1-\sqrt{2/2}\right)\right)} = 5.15 m/s$$

In B cambia la curvatura della guida, per cui l'equazione delle forze che agiscono sul punto si scrive:

$$N - mg\cos 45° = -\frac{mv^2}{R}$$

La condizione per cui il punto si stacca dalla guida è data da $N \leq 0$ che è immediatamente verificata.

Il punto, allora, lascia la guida e prosegue in un moto parabolico in cui la componente orizzontale della sua velocità non varia, mentre quella verticale è sottoposta all'azione dell'accelerazione di gravità.

$$\begin{cases} v_x = v_B\cos 45° \\ v_y = v_B\sin 45° - gt \end{cases}$$

Prendendo come origine del sistema di riferimento il punto che sta al suolo sulla verticale di B si ha:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = y_B + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_C = R\sin 45° = v_B\cos 45° t \\ t_C = \frac{R}{v_B}tg 45° = 0.097 s \end{cases}$$

L'altezza sulla verticale è allora data da:

$$h_C = R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + v_B\sin 45° t_C - \frac{1}{2}gt^2 = 0.45 m$$

Il punto materiale passa sulla verticale al di sopra della guida.

8. Un punto materiale di massa *m* ruota su un piano orizzontale scabro attorno ad un punto O cui è connesso tramite una sbarretta ideale di lunghezza l=0.5 m.Il coefficiente di attrito dinamico tra punto e piano è μ_k=0.15. All'istante $t = 0$ il modulo della velocità del punto è v_0= 4 m/s. Sapendo che all'istante t_1=1.5 s la tensione della sbarretta è $T(t_1)$ = 5 N:

- determinare la massa del punto materiale. m= 0.78 kg
- che velocità avrà il punto dopo aver percorso un giro ? v=2.6 m/s
- Quanti giri percorre il punto materiale prima di fermarsi ? n= 1.73 giri

Moto circolare decelerato:

$$ma_T = m\frac{dv}{dt} = -\mu N = -\mu mg$$
$$ma_N = m\frac{v^2}{l} = T \qquad m = \frac{Tl}{v^2} = 0.77(6)kg$$

Teorema delle forze vive:

$$v = v_0 - \mu gt = 1.8 m/s$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -\mu gm2\pi l \qquad v^2 = v_o^2 - 4\pi\mu gl \Rightarrow v = 2.6 m/s$$

Ancora teorema dell'energia cinetica:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -m\mu gl\theta \qquad \theta = \frac{v_0^2}{2\mu gl} = 10.88 rad \qquad n = 1.73 giri$$

9. Un proiettile di massa m = 50 g viene lanciato da un punto P posto sull'asse y alla quota h = 45 m rispetto all'asse x, con velocità iniziale v = 37.5 m/s in direzione orizzontale. Dopo 2.5 s di volo il proiettile colpisce un corpo di massa M = 200 g in caduta verticale dopo essere partito da fermo da una quota h_1 = 65 m rispetto all'asse x e vi si conficca. Calcolare

1) la posizione in cui avviene la collisione; x= 93.75 m, y=14.37 m

2) l'energia cinetica persa nell'urto; ΔE= 29.10 J

3) la posizione in cui i due corpi uniti arrivano al suolo. x= 97.09 m

Equazioni del moto parabolico per il proiettile:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_o t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(2.5) = 93.75m \\ y(2.5) = 14.37m \\ v(2.5) = \sqrt{(37.5)^2 + (24.5)^2}\, m/s \end{matrix}$$

Equazione del moto di un corpo che cade partendo da un'altezza h con velocità nulla:

$$v' = -\sqrt{2g\Delta h} = -\sqrt{2g(65-14.37)} = -31.5m/s$$

Conservazione della quantità di moto lungo x e y e differenza tra le energie cinetiche finale e iniziale del sistema:

$$\begin{cases} mv_x = (m+M)V_x \\ mv_y + Mv'_y = (m+M)V_y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} V_x = 7.5m/s \\ V_y = -30.1m/s \end{matrix}$$

$$E_{k,i} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv'^2 = 149.39J \qquad E_{k,f} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = 120.28J$$

$$\Delta E = 29.10J$$

Il moto successivo è quello di un proiettile che parte dal punto di incontro con velocità V (secondo le sue componenti):

$$\begin{cases} x = x_1 + V_x t \\ y = y_1 + V_y t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Il tempo di impatto al suolo è quello corrispondente a y=0, sostituendo nella x si trova il punto di impatto:

$$\begin{matrix} t_1 = -6.59s \\ t_2 = 0.445s \end{matrix} \qquad x(t_2) = 97.09m$$

10. Un punto materiale P di massa m incognita può scorrere su un piano orizzontale OA di lunghezza L=5 m contiguo a una guida circolare liscia di raggio R=2 m, come in figura. Il punto P e' inizialmente fermo a contatto dell'estremità di una molla di lunghezza a riposo l_0=1 m e costante elastica K=150 N/m, inizialmente compressa della quantità d=0.5 m. Ad un certo istante, P viene lasciato libero di muoversi.

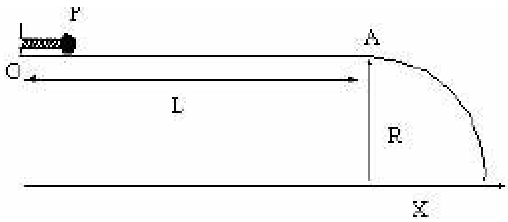
Determinare:

1) Il massimo valore di m affinché P si stacchi dal piano orizzontale, supposto liscio, nella posizione A di raccordo tra lo stesso e la guida circolare; m_{max}= 1.91 kg

Se la massa di P vale m=1.2 kg, calcolare:

2) L'angolo ϕ tra la velocità di P e l'asse delle x nell'istante in cui P giunge al suolo, se il piano orizzontale OA e' liscio; ϕ= -48.29°

3) Il massimo coefficiente di attrito dinamico μ_d tra P e il piano orizzontale OA, supposto scabro, affinché P si stacchi dalla guida circolare ancora nella posizione A; μ= 0.13



Se il punto si muove sulla guida circolare, risente di una forza normale.
L'equazione del moto del punto all'inizio della guida è:

$m\frac{v^2}{R} = mg - N$ Il punto si stacca dalla guida se non risente della forza normale, quindi se

$mv^2 = mgR$ Inizialmente l'energia meccanica del sistema molla-punto è solo dato dall'energia potenziale della molla, quando la molla si rilascia, trasferisce tutta la sua energia potenziale al punto materiale, sotto forma di energia cinetica:

$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$ Il massimo valore della massa affinché il punto lasci la guida in A è quindi dato dalla:

$$\frac{1}{2}Kd^2 \geq \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{Kd^2}{gR} = 1.91kg$$

Se il punto lascia la guida la sua velocità iniziale è orizzontale e poi prosegue il suo moto sotto l'azione della forza peso, quindi:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Kd^2}{m}} = 5.59m/s$$

$\begin{cases} v_x(t) = v \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = R - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ Il punto arriverà a terra quando la sua coordinata y sarà nulla.

$$y = 0 \quad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.64s \quad \Rightarrow \begin{cases} v_x(t_1) = 5.59m/s \\ v_y(t_1) = -gt_1 = -6.27m/s \end{cases} \quad tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = -1.122$$

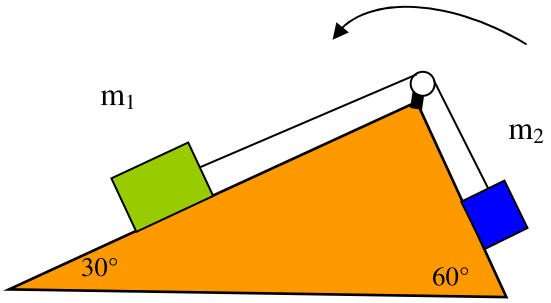
$\phi = -48.29°$

Il massimo coefficiente di attrito dinamico compatibile è quello che fa si che il punto materiale arrivi in A con la minima velocità per cui si stacca dalla guida.
Inizialmente la molla è compressa e trasferisce la sua energia potenziale al punto sotto forma di energia cinetica. La forza di attrito dinamico fa lavoro sul punto e dissipa energia.

$$\Delta E_k = W_{att} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mg(L - l_0 + d)$$

$$\frac{1}{2}mgR - \frac{1}{2}Kd^2 = -\mu_d mg(L - l_0 + d) =$$

$$\mu = \frac{Kd^2 - mgR}{2mg(L - l_0 + d)} = 0.13$$



Nel sistema rappresentato in figura i due corpi di massa m_1=1.5 kg e m_2=0.5 kg poggiano sui piani inclinati di θ_1=30° e θ_2=60°, rispetto all'orizzontale. Il filo che connette i due corpi è inestensibile e di massa trascurabile e la carrucola è senza massa. Il piano su cui poggia m_1 è liscio mentre quello su cui poggia m_2 è scabro con coefficienti di attrito statico e dinamico μ_s=0.7 e μ_d=0.6, rispettivamente. All'istante t=0 il sistema si mette in moto.
Si determinino:

- l'accelerazione del sistema e la tensione delle fune, a= 0.82 m/s^2 T= 6.12 N
- il lavoro fatto dalla forza di attrito quando la velocità della massa m_1 è v_1=0.74 m/s, W= 0.49 J
- il valore massimo che potrebbe avere la massa m_1 perché il sistema restasse in equilibrio stabile. $m_{1,max}$ = 1.22 kg

Si scelga un sistema di riferimento che vede positivo il verso in cui la massa m_1 scende:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin 30° - T \\ m_2 a = -m_2 g \sin 60° + T - m_2 g \mu_d \cos 60° \end{cases}$$

$$a = g \frac{m_1 \sin 30° - m_2 \sin 60° - m_2 \mu_d \cos 60°}{m_1 + m_2} = 0.818 m/s^2$$

$$T = m_1 (a - g \sin 30°) = 6.12 N$$

Il lavoro della forza di attrito uguaglia la variazione di energia meccanica del sistema:

$$W_{att} = \Delta E$$

$$E_i = 0$$

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2$$

$$\Delta h_1 = l \sin 30° \qquad \Delta h_2 = l \sin 60° \qquad l = \frac{v^2}{2a} = 0.33 m$$

$$-W_{att} = \Delta E_k - gl(m_1 \sin 30° - m_2 \sin 60°) = 0.49 J$$

La massa massima compatibile con l'equilibrio statico del sistema si trova assumendo che la forza di attrito statico eguagli la forza di attrito statico massimo:

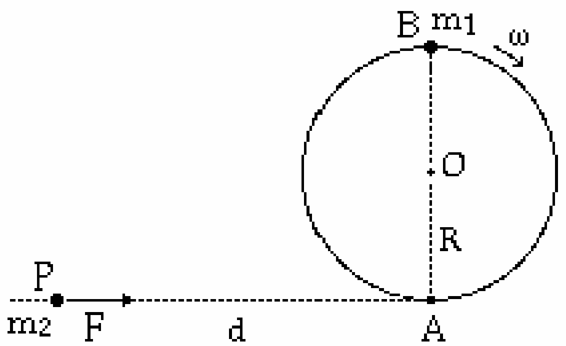
$$m_{max} = \frac{m_2(\sin 60° - \mu_s \cos 60°)}{\sin 30°} = 1.216 kg$$

12. Un punto materiale di massa m_1 = 60 g è in moto circolare uniforme con velocità angolare ω= 1.5 rad/s in senso orario lungo una circonferenza di raggio R = 35 cm che giace in un piano orizzontale, come in figura. Un secondo punto materiale di massa m_2 = 95 g è inizialmente fermo nel punto P, esterno alla circonferenza. A partire dall'istante t = 0 la massa m_2 viene sottoposta ad una forza costante F = 1.4 x 10^{-2} N che la mette in moto lungo una retta orizzontale tangente alla circonferenza, fino a che, giunta nel punto A, alla distanza d da P, urta elasticamente e frontalmente la massa m_1. Sapendo che all'istante t = 0 la massa m_1 si trovava nella posizione B, diametralmente opposta ad A, e che l'urto avviene dopo che la massa m_1 ha compiuto un giro e mezzo, calcolare:

- La distanza d. d= 2.9 m

Dopo l'urto m_2 rimbalza indietro e ritorna verso il punto P senza essere più sottoposta a nessuna forza. Calcolare:

- Il tempo trascorso fra l'istante iniziale t = 0 e l'istante in cui la massa m_2 raggiunge nuovamente il punto P; t= 20.93 s
- la velocità di m_1 dopo l'urto. v= 1.25 m/s



Il punto m_1 ruota con velocità angolare costante e dal tempo t_0 percorre 1.5 giri , nello stesso tempo il punto m_2 percorre la distanza d, per cui:

$$\frac{3}{2}2\pi = \omega t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 6.28s \qquad d = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m_2}t_1^2 = 2.9m$$

L'urto è non vincolato ed elastico, si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto del sistema. Posto il verso positivo delle velocità verso destra si ha:

$$v_{1,i} = -\omega R = -0.525m/s \qquad v_{2,i} = at_1 = 0.923m/s$$

Dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema si trova che:

$$v_{2,f} = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{(m_1 + m_2)} = -0.198m/s \qquad t_2 = \frac{d}{|v_{2,f}|} = 14.65s \qquad t_{tot} = t_1 + t_2 = 20.93s$$

$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{(m_1 + m_2)} = 1.25m/s$$

Il punto m_1 dopo l'urto si muove verso destra.