

## Esercizi sul Lavoro

1. Una cassa di massa  $m=3$  kg è ferma su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra la cassa e la superficie è  $\mu_d=0.5$ . Una forza orizzontale spinge la cassa che si muove con velocità costante per 10 cm.

Quanto lavoro ha fatto la forza orizzontale?

$$W_F = 1.47 \text{ N}$$

Quanto la forza di attrito?

$$W_{F_{att}} = -1.47 \text{ N}$$

Quanto la forza risultante?

$$W_{Tot} = 0$$

Se il corpo si muove con velocità costante la risultante delle forze agenti su di esso è nulla, per cui:

$$0 = ma = F - F_{att} = F - \mu_d mg \quad F = \mu_d mg = 14.7 \text{ N}$$

Sia la forza  $F$  che quella di attrito sono costanti e dirette come il moto per cui il lavoro è semplicemente il prodotto della forza per lo spostamento:

$$W_F = Fx = \mu_d mgx = 1.47 \text{ N} \quad W_{F_{att}} = -\mu_d mgx = -1.47 \text{ N} \quad W_{tot} = W_F + W_{F_{att}} = 0$$

2. Per comprimere una molla di 10 cm è necessario compiere un lavoro di 8.0 J.

Quanto vale la costante elastica della molla?

$$K = 1600 \text{ N}$$

$$W_m = \int F(x) dx = -\int Kx dx = -\frac{1}{2}Kx^2 = -W_e \quad K = \frac{2W}{x^2} = 1600 \text{ N/m}$$

Si noti che il lavoro fatto dalla molla è negativo. Infatti non è la molla che fa lavoro bensì l'esterno che fa lavoro su di essa.

3. Una forza costante orizzontale,  $F=8$  N, è applicata ad un carrello di massa  $m=16$ kg, inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio.

Che velocità ha il carrello dopo aver percorso 9 m?

$$v = 3 \text{ m/s}$$

Dal teorema dell'energia cinetica si ha:

$$W = \Delta E_k \quad \int F \cdot dx = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \quad v = \sqrt{\frac{2F \cdot x}{m}} = 3 \text{ m/s}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare utilizzando l'equazione del moto. Il procedimento, come si può vedere, è molto più laborioso di quello offerto dal teorema dell'energia cinetica.

$$F = ma \quad a = \frac{F}{m} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{F}{2m}t^2 \\ v = at \end{cases} \Rightarrow x = \frac{mv^2}{2F} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2F \cdot x}{m}}$$

4. Un proiettile di massa  $m=7$  g ha una velocità di 800 m/s. Esso penetra in un grande blocco di legno e percorre una distanza di 20 cm prima di fermarsi. (Si assuma che il blocco non si muova).

Quale è la forza media che agisce sul proiettile?

$$F = -11.2 \text{ kN}$$

$$W_{ext} = \int F \cdot dx = \Delta E_k = -\frac{1}{2}mv^2 \quad F = -\frac{mv^2}{2x} = -11200 \text{ N} = -11.2 \text{ kN}$$

La forza è negativa perché frena il moto del proiettile.

5. Un corpo di massa  $m=15$  kg si muove con velocità costante  $v=1.2$  m/s lungo un asse orizzontale sotto l'azione di una forza costante  $F=10$  N, parallela e concorde alla velocità. Calcolare:

a) il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piano

$$\mu_d = 6.8 \cdot 10^{-2}$$

b) il lavoro compiuto dalla forza  $F$  in un intervallo di tempo  $t=30$  s

$$W_F = 360 \text{ N}$$

c) il lavoro compiuto dalla forza di attrito nello stesso intervallo di tempo.

$$W_{att} = -360 \text{ N}$$

Si supponga che ad un certo istante  $t_0$  il corpo, sempre sotto l'azione della forza  $F$ , entri in una regione in cui il coefficiente di attrito dinamico ha un valore doppio di quello sopra calcolato.

- d) si scriva l'espressione quantitativa della velocità del corpo a partire dall'istante  $t_0$ .  
 $v = 1.2 - 0.66t \text{ m/s}$

Il corpo si trova in equilibrio dinamico per cui:

$$0 = ma = F - \mu_d mg \Rightarrow \mu_d = \frac{F}{mg} = 6.8 \cdot 10^{-2}$$

Il moto è traslatorio uniforme, sia la forza F che la forza di attrito sono costanti per cui si ha:

$$s = vt \quad W_F = Fvt = 360N \quad W_{att} = -\mu_d mgvt = -Fvt = -360N$$

Il risultato è ovvio. Infatti i due lavori devono essere uguali ed opposti in segno in quanto, non variando la velocità del corpo non può variare neppure la sua energia cinetica.

Se sul corpo agisce, oltre alla forza F, una forza d'attrito doppia che nel caso precedente, il moto sarà accelerato con accelerazione:

$$a = \frac{F}{m} - 2\mu_d g = -0.66 \frac{m}{s^2}$$

Da cui si tra che l'espressione della velocità è:

$$v = v_0 + at = 1.2 - 0.66t \frac{m}{s}$$

6. La cabina di un ascensore avente massa  $M=450 \text{ kg}$  si muove verticalmente per un'altezza  $h = 15 \text{ m}$ . Determinare il lavoro fatto dalla tensione della fune che sorregge l'ascensore nelle seguenti situazioni:

- a) l'ascensore si muove in discesa con velocità costante  $v = 1 \text{ m/s}$   $W = -66150 \text{ J}$   
 b) l'ascensore scende con accelerazione costante  $a = 0.5 \text{ m/s}^2$   $W = 62275 \text{ J}$

L'ascensore parte da fermo e per 5 secondi mantiene un' accelerazione costante in salita  $a = 0.5 \text{ m/s}^2$ .

- c) quale accelerazione uniforme deve avere per fermarsi ad altezza h dal punto di partenza?  $a = 0.36 \text{ m/s}^2$   
 d) Qual è in questo caso il lavoro fatto dalle forze che lo frenano  $W = 1406 \text{ J}$   
 e) E il lavoro totale nello spostamento fino ad altezza h?  $W_{tot} = 0 \text{ J}$

a)

$$v = \text{cost.} \Rightarrow \Delta E_k = 0 \Rightarrow W_{tot}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} = 0 \quad mg - T = 0 \quad T = mg$$

$$W_p = mgh = -W_T \quad W_T = -66150 \text{ J}$$

b)  $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad ma = mg - T \quad T = m(g - a) \quad |W_T| = m(g - a)h = 62775 \text{ J}$

$$h_1 = \frac{1}{2} at_1^2 = 6.25 \text{ m} \quad v_1 = at_1 = 2.5 \text{ m/s} \quad h - h_1 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \quad 0 = v_1 - a_2 t_2$$

c)

$$h - h_1 = \frac{v_1^2}{2a_2} \quad a_2 = 0.357 \text{ m/s}^2$$

d)  $W_{tot} = \Delta E_k = W_{frenanti} = 0 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad |W_{fr}| = 1406 \text{ J}$

e)  $W_{tot} = \Delta E_k = 0$

Infatti l'ascensore parte da fermo e si ritrova fermo all'altezza h.