

1) Un recipiente contenente $n_0=2$ moli di gas ideale monoatomico, alla temperatura $T_0=300$ K e alla pressione $p_0=2 \cdot 10^5$ Pa, è munito di una valvola di sicurezza che provoca lo sfogo del gas nell'atmosfera circostante quando la pressione superi $p_1=3 \cdot 10^5$ Pa. L'atmosfera circostante si trova a $T=300$ K e alla pressione $p_e=10^5$ Pa. Il recipiente viene riscaldato a $T_1=600$ K; il gas fuoriuscito successivamente si porta all'equilibrio termico con l'ambiente circostante.

Quante moli di gas fuoriescono dal recipiente ?

$$n=0.5$$

Quale è la variazione di energia interna del gas che rimane nel recipiente?

$$\Delta U_1=5.61 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Quale è la variazione dell'energia interna del gas fuoriuscito?

$$\Delta U_2=0 \text{ J}$$

Alla fine della trasformazione nel recipiente deve rimanere la quantità di gas data dall'equazione di stato:

$$p_f V_f = n_f R T_f \quad n_f = \frac{p_f V_f}{R T_f}$$

Il volume finale è quello del recipiente, ancora dato dall'equazione di stato applicata allo stato iniziale:

$$V_i = V_f = \frac{n_0 R T_0}{p_0} = 2.49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \quad n_f = \frac{p_f V_i}{R T_f} = 1.5$$

Di conseguenza nel recipiente restano 1.5 moli e ne fuoriescono 0.5

$$\Delta U_1 = n_1 c_v (T_1 - T_0) = 5.61 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Il gas che fuoriesce dal contenitore ha temperatura finale uguale a quella iniziale, quindi la variazione di energia interna del gas fuoriuscito è nulla. ($\Delta U_2=0$)

2) Una bombola di volume incognito, inizialmente chiusa, contiene $n=2$ moli di He a temperatura ambiente ($\theta=20$ °C) ed alla pressione di $15 \cdot 10^5$ Pa. Essa è collegata, tramite un capillare, ad un recipiente a volume variabile e pressione costante (gasometro). Si apre la valvola, inizialmente chiusa, e il gas fluisce lentamente nel gasometro, in modo che la temperatura del gas possa ritenersi costantemente uguale a quella dell'ambiente. La pressione che agisce sul gasometro è $p_e=10^5$ Pa. Il gas He può essere trattato come ideale anche nello stato iniziale.

Si calcolino:

1) Il lavoro fatto dal gas e il calore ceduto **dall'**ambiente per la trasformazione descritta

$$W=4547 \text{ J}$$

$$Q_a= - 4547 \text{ J}$$

2) Il lavoro che si otterrebbe se la trasformazione avvenisse in maniera perfettamente reversibile

$$W_R=13189 \text{ J}$$

$$T=20+273=293\text{K}$$

Le coordinate degli stati iniziale e finale sono:

$$i \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ T = T_0 = 293K \\ p = 15 \cdot 10^5 Pa \\ V_i = \frac{nRT_0}{p} = 3.25 \cdot 10^{-3} m^3 \end{array} \right. \quad f \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ T = T_0 = 293K \\ p_e = 10^5 Pa \\ V_f = \frac{nRT_0}{p_e} = 48.7 \cdot 10^{-3} m^3 \end{array} \right.$$

La trasformazione è isoterma irreversibile contro la pressione esterna.

$$W = p_e \Delta V = 4547 J \quad Q_{gas} = W = 4547 J$$

Il calore ceduto dall'ambiente è $Q = -Q_{gas} = -4547 J$

Lungo una trasformazione isoterma reversibile il lavoro sarebbe stato:

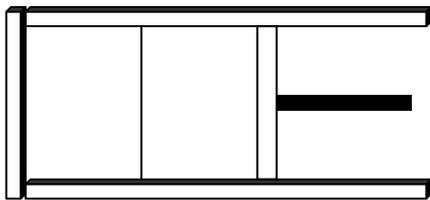
$$W_R = nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i} = 13189 J$$

3) Un recipiente contiene aria (da assimilare ad un gas ideale biatomico) a pressione $p_i = 3 \cdot 10^5 Pa$ e alla temperatura $T_i = 300 K$. Il recipiente è connesso, tramite una valvola inserita in un diaframma diatermico, ad un cilindro vuoto munito di pistone. Il recipiente e il pistone sono adiabatici e inizialmente il pistone è sul fondo del cilindro, a contatto col setto divisorio. La valvola viene aperta e l'aria fluisce nel cilindro finché la pressione interna non raggiunge il valore $p_0 = 10^5 Pa$.

Si determini la temperatura finale dell'aria nelle due ipotesi seguenti:

1) la pressione esterna che agisce sul pistone è p_0 . $T = 243 K$

2) istante per istante la pressione esterna uguaglia quella interna al recipiente. $T' = 219.2 K$



La prima è un'espansione adiabatica irreversibile:

$$W = -\Delta U$$

$$p_0(V_f - V_i) = nc_v(T_i - T_f) \quad p_0 \left(\frac{nRT_f}{p_0} - \frac{nRT_i}{p_i} \right) = nc_v(T_i - T_f)$$

$$T_f = \frac{\frac{p_0}{p_i} R + c_v}{R + c_v} T_i = 243 K$$

La seconda è una trasformazione adiabatica reversibile:

$$p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T^\gamma = \text{cost.} \quad \gamma = 1.4 \quad \Rightarrow \quad T_f = \left(\frac{p_i}{p_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_i = 219.2 K$$

4) Un recipiente a pareti rigide ed adiabatiche è diviso in due parti uguali, A e B, da un setto (anch'esso adiabatico) fisso e di spessore trascurabile. Ciascuna delle due parti ha volume $V=5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Inizialmente A contiene $n_A=0.2$ moli di gas ideale monoatomico mentre B contiene $n_B=0.28$ moli di gas ideale biatomico alla temperatura $T_B=322 \text{ K}$. Inizialmente ciascuno dei due gas è in equilibrio termodinamico. Successivamente il setto si rompe e dopo un certo tempo viene di nuovo raggiunto l'equilibrio. La temperatura finale di equilibrio è $T_f=307 \text{ K}$.

Si determinino:

- 1) La pressione nello stato finale di equilibrio $p_f=1.225 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- 2) La temperatura iniziale del gas in A $T_A=272 \text{ K}$
- 3) Il calore assorbito (in valore e segno) dal gas inizialmente in B $Q=-87.3 \text{ J}$

- 1) equazione di stato per il gas in B ed equazione di stato per i due gas alla fine della trasformazione

$$p_B = \frac{n_B T_B R}{V_b} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (n_A + n_B) R T_f = (V_A + V_B) \cdot p_f$$

$$p_f = \frac{(n_a + n_b) R T_f}{V_{tot}} = 1.225 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

- 2) Non c'è lavoro e non c'è scambio di calore tra i due gas, essi variano solo la loro energia interna

$$\Delta U_B = -\Delta U_A \quad n_b \frac{5}{2} R (T_f - T_B) = -n_a \frac{3}{2} R (T_f - T_A)$$

$$T_A = \frac{(5n_B + 3n_A) T_f - 5n_B T_B}{3n_A} = 272 K$$

$$3) Q_B = \Delta U_B = n_B \frac{5}{2} R (T_f - T_b) = -87.3 J$$

5) Una mole di gas ideale biatomico, inizialmente in equilibrio alla pressione p_1 (incognita) e al volume $V_1=12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, si espande adiabaticamente contro la pressione esterna costante $p_0=10^5 \text{ Pa}$, fino al volume $V_2=25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Lo stato (p_0, V_2) è di equilibrio per il gas. Esso viene, poi, compresso isotermicamente e reversibilmente. In tale processo scambia il calore $Q_{23}= - 6280 \text{ J}$. Infine il gas torna allo stato iniziale tramite una trasformazione reversibile in cui compie un lavoro $W_{31}=6000 \text{ J}$.

Si determinino:

1) La temperatura T_1

$$T_1=363\text{K}$$

2) Il volume V_3

$$V_3=2.03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

3) Il calore scambiato nella trasformazione 3-1

$$Q_{31}=7300\text{J}$$

1-

$$Q_{12} = 0 \Rightarrow W_{12} = -\Delta U_{12} \Rightarrow p_0(V_2 - V_1) = nc_v(T_1 - T_2)$$

$$T_2 = \frac{p_0 V_2}{nR} = 300.7 \text{ K}$$

$$T_1 = 300.7 + \frac{p_0 \Delta V}{nc_v} = 363 \text{ K}$$

2- Trasformazione isoterma reversibile:

$$Q_{23} = W_{23} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -6280 \text{ J}$$

$$V_3 = .0811V_2 = 2.03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

3- La trasformazione 3-1 è una qualsiasi trasformazione reversibile, vale comunque il primo principio:

$$Q_{31} = W_{31} + \Delta U_{31} = 6000 + nc_v(T_1 - T_2) = 7300 \text{ J}$$

6) Un recipiente munito di un pistone mobile di massa trascurabile, contiene 500 litri di vapore saturo d'acqua a temperatura $T_H = 373 \text{ K}$. Utilizzando il recipiente come serbatoio termico a temperatura costante di una macchina ciclica che produce 13 kJ di lavoro utile per ciclo e che ha rendimento $\eta = 10\%$, si fa condensare una parte del vapore all'interno del recipiente.

Il calore latente di evaporazione dell'acqua a t_e è $\lambda = 2256 \text{ J/g}$, la pressione di vapore è uguale alla pressione esterna ed è $p = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Calcolare, in un ciclo di funzionamento della macchina:

la massa di liquido prodotto

$$m=57.6 \text{ g}$$

la densità del vapore acqueo, supponendo che si comporti come un gas ideale

$$\rho=0.586\text{kg/m}^3$$

il lavoro fatto dalla pressione esterna sul serbatoio a T_H ,

$$W= 9898 \text{ J}$$

La macchina assorbe calore dal serbatoio a $T=373 \text{ K}$ per cui si ha:

$$\eta = \frac{W}{Q_a} \quad Q_a = \frac{W}{\eta} = \frac{1.3 \cdot 10^4}{10^{-1}} = 1.3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Il calore ceduto dal serbatoio porta alla condensazione di vapore acqueo:

$$Q_a = m\lambda \quad m = \frac{Q_a}{\lambda} = 57.6g$$

Il calore ceduto dalla macchina termica al serbatoio a temperatura più bassa è dato da:

$$W = Q_a + Q_c \Rightarrow Q_c = W - Q_a = -117 \cdot 10^3 J$$

Si considera il vapore acqueo come un gas ideale e si applica l'equazione di stato, ricordando che la densità media di una sostanza è pari alla sua massa divisa per il suo volume. Per una mole di vapore si ha allora:

$$\rho = p_{mol} \frac{p}{RT_H} = 18 \cdot \frac{1.01 \cdot 10^5}{8.314 \cdot 373} = 586 g/m^3 = 0.586 kg/m^3 \quad (p_m = \text{peso molecolare dell'acqua})$$

Il volume del vapore acqueo rimasto è pari a quello iniziale meno quello occupato dal vapore condensato:

$$V_{liq} = \frac{m}{\rho} = 0.098 m^3 \quad V_{vap} = V - V_{liq} = 0.5 - 0.098 = 0.402 m^3$$

Il lavoro fatto dalla pressione esterna sul serbatoio è allora:

$$W = p \cdot \Delta V = 1.01 \cdot 10^5 \cdot (0.5 - 0.402) = 9898 J$$

7) Un cilindro isolante, chiuso alle due estremità da un coperchio e da un pistone, anch'essi isolanti, è diviso in due parti di uguale volume, $V_a = V_b = 1.5 \cdot 10^{-2} m^3$ da un setto fisso. In A è, inizialmente contenuto del gas ideale monoatomico alla pressione $p_0 = 2 \cdot 10^5 Pa$ e alla temperatura $T_0 = 300 K$. In B, con il pistone bloccato nella posizione estrema, viene fatto il vuoto. Il setto viene rimosso e il gas si espande fino ad occupare tutto il volume disponibile. Mantenendo il pistone bloccato si toglie l'isolamento dal coperchio e si mette il gas a contatto termico con una sorgente a temperatura $T_2 = 500 K$, fino al raggiungimento di un nuovo stato di equilibrio termodinamico. Successivamente, mantenendo il contatto termico con il serbatoio a temperatura T_2 , il gas viene compresso reversibilmente fino al volume iniziale. Infine, bloccato di nuovo il pistone, il gas viene riportato allo stato iniziale mantenendolo a contatto termico con una sorgente a temperatura T_0 . Si determinino:

1) La temperatura del gas dopo la prima trasformazione

$$T = 300 K$$

2) Il lavoro fatto sul sistema nel ciclo

$$W = 3466 J$$

La prima trasformazione è un'espansione libera nel vuoto, la temperatura del gas resta costante: $T_1 = 300 K$

Dall'equazione di stato si ottiene:

$$pV = nRT \quad nR = \frac{pV}{T} = 10 J/K$$

Il ciclo è costituito da quattro trasformazioni: un'espansione libera nel vuoto, un'isocora irreversibile, un'isoterma reversibile e infine un'altra isocora irreversibile. Il lavoro fatto sul sistema durante il ciclo è, quindi, solo quello dell'isoterma reversibile:

$$W_{gas} = nRT_2 \log \frac{V_3}{V_2} = nRT_2 \log \frac{1}{2} = -3466 J \quad W_{ext} = -W_{gas} = 3466 J$$

8) Una mole di gas ideale biatomico compie una trasformazione dallo stato A ($p_A = 2.02 \cdot 10^5 Pa$, $T_A = 300 K$) allo stato B ($p_B = p_A$, $T_B = 400 K$), producendo il lavoro $W_{AB} = 1014 J$. Dallo stato B il gas compie una trasformazione adiabatica reversibile fino allo stato di equilibrio C ($T_C = T_A$). Si determinino:

- a) il calore assorbito dal gas nella trasformazione totale da A a C. $Q = 3092.5 J$
- b) Il volume del gas nello stato C $V_C = 3.37 \cdot 10^{-2} m^3$
- c) Il lavoro totale compiuto dal gas nel ciclo, supponendo che da C si riporti il gas nello stato iniziale tramite una trasformazione isoterma reversibile. $W = 578.6 J$
- d) La capacità molare media del gas nella trasformazione AB $C_p = 30.92 J/K$

$$A \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ p_A = 2.02 \cdot 10^5 Pa \\ T_A = 300 K \\ V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 1.23 \cdot 10^{-2} m^3 \end{array} \right. \quad B \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ p_B = p_A = 2.02 \cdot 10^5 Pa \\ T_B = 400 K \\ V_B = \frac{nRT_B}{p_A} = 1.64 \cdot 10^{-2} m^3 \end{array} \right.$$

Il calore assorbito nelle trasformazioni da A a C è la somma di quelli assorbiti nelle trasformazioni singole:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 1014 + n c_V (T_B - T_A) = 3092.5 J \quad Q_{BC} = 0$$

$$Q_{AC} = Q_{AB} = 3092.5 J$$

La trasformazione da B a C è adiabatica reversibile per cui:

$$TV^{\gamma-1} = cost \quad \gamma = \frac{7}{5} \quad V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3.37 \cdot 10^{-2} m^3$$

Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori parziali:

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -n c_V (T_C - T_B) = 2078.5 J \quad W_{CA} = nRT_A \log \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -2513.9 J$$

$$W_{tot} = 578.6 J$$

Per definizione la capacità molare media è data dalla relazione:

$$C = \frac{Q}{n\Delta T} \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$C_{AB} = \frac{Q_{AB}}{1 \cdot 100} = 30.92 \text{ J/K}$$

Confrontando questo dato con quello che si avrebbe se la trasformazione AB fosse isobara ($C_p = 7/2R = 29.1 \text{ J/K}$) si può trarre che la trasformazione **non** è isobara, bensì solamente caratterizzata da stati iniziale e finale con la stessa pressione.

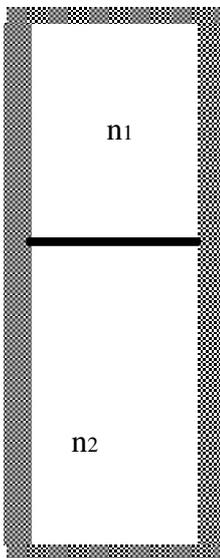
9) Un cilindro verticale di base $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ e altezza $H = 1 \text{ m}$, è diviso da un setto isolante che ha massa m . Il setto può scorrere senza attrito. Nella parte superiore del cilindro si trovano $n_1 = 0.1$ moli di gas ideale monoatomico, mentre nella parte inferiore ci sono $n_2 = 0.2$ moli dello stesso gas. Si trascuri il volume occupato dal setto mobile. Inizialmente tutto il sistema è in equilibrio alla temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$ e l'altezza del setto rispetto alla base inferiore è $h = 0.6 \text{ m}$.

1) Si determini la massa del setto divisorio $m = 21.2 \text{ kg}$.
Successivamente si effettua una trasformazione reversibile che porta la temperatura del gas nella parte inferiore al valore $T_1 = 200 \text{ K}$, mentre il gas nella parte superiore viene mantenuto, tramite un termostato, a T_0 . Si determinino:

2) la nuova altezza di equilibrio del setto $h' = 0.482 \text{ m}$

3) Il calore assorbito dal gas nella parte superiore del cilindro $Q_0 = 64.36 \text{ J}$

4) Il calore totale ceduto dal gas nella parte inferiore $Q_1 = -338.25 \text{ J}$.



La condizione di equilibrio sul pistone comporta che:

$$F_1 + mg - F_2 = 0$$

Da cui si trae:

$$p_2 = p_1 + \frac{mg}{S}$$

Considerando che il volume totale occupato dai due gas è quello complessivo del cilindro e che nello stato iniziale vale per ambedue i gas l'equazione di stato si ha:

$$V_{tot} = V_1 + V_2 = SH = 10^{-2} \text{ m}^3 \quad \Rightarrow \quad V_2 = Sh = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad V_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m = \frac{S}{g}(p_2 - p_1) = \frac{S}{g} \left(\frac{n_2 RT_0}{V_2} - \frac{n_1 RT_0}{V_1} \right) = 21.2 \text{ kg}$$

Della trasformazione successiva si sa solo che è reversibile e che non viene scambiato calore attraverso il setto divisorio. Si sa, ancora, che il volume totale occupato dai gas è quello del cilindro e che gli stati finali sono di equilibrio per ambedue i gas. Per cui, riscrivendo l'equazione di stato e considerando gli stati finali si ha:

$$\frac{mg}{S} = (p_2' - p_1') = \left(\frac{n_2 RT_1}{V_2'} - \frac{n_1 RT_0}{V_1'} \right) \quad V = Sh \quad \Rightarrow \quad mg = \left(\frac{n_2 RT_1}{h'} - \frac{n_1 RT_0}{(H - h')} \right)$$

Risolvendo in h' si trova un'equazione di secondo grado che dà $h' = 0.482 \text{ m}$

La trasformazione effettuata dal gas in 1 è isoterma reversibile, per cui, non variando l'energia interna, il calore assorbito dal gas è:

$$Q_0 = W = n_1 RT_0 \ln \left(\frac{V_1'}{V_1} \right) = 64.36 \text{ J}$$

Il gas nella parte inferiore del cilindro effettua una trasformazione in cui varia la sua energia interna e contemporaneamente su di esso viene fatto lavoro sia dal gas in 1 che dalla forza peso del setto divisorio.

$$Q_1 = -W - mg\Delta h + n_2 c_v (T_1 - T_0) = -338.25 \text{ J}$$

10) Una macchina termica reversibile funziona con un gas ideale ($\gamma=1.4$). Lo stato iniziale A è caratterizzato da $p_A=10^5 \text{ Pa}$, $V_A=10^{-1} \text{ m}^3$, $T_A=200 \text{ K}$. La trasformazione AB è isocora, la trasformazione BC è isobara, la trasformazione CD è isocora e, infine, la trasformazione DA è isobara. Sapendo che nella trasformazione AB la pressione triplica e nella trasformazione BC il volume del gas raddoppia, si disegni il ciclo in un diagramma pV e si determinino:

1) il lavoro fatto dal gas nel ciclo,

$$W=20 \text{ kJ}$$

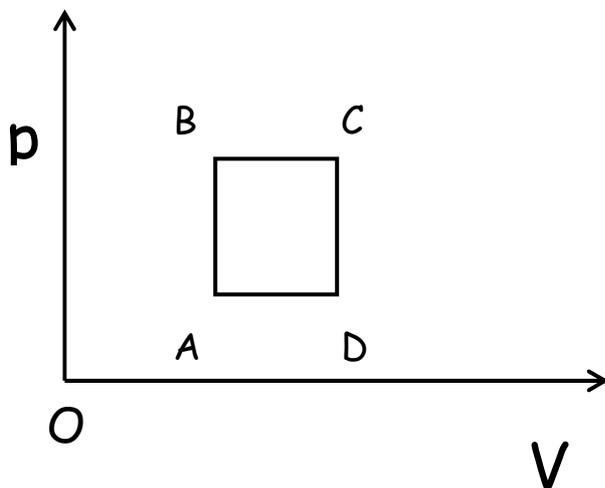
2) la quantità di calore scambiata dal gas nelle trasformazioni CD e DA,

$$Q_{CD}=-100 \text{ J}$$

$$Q_{DA}=-35 \text{ J}$$

3) il rendimento del ciclo.

$$\eta=0.129$$



Il lavoro fatto nel ciclo è pari all'area in esso contenuta:

$$W = (p_B - p_A)(V_C - V_A) = 20 \text{ kJ}$$

Il numero di moli di gas che effettuano il ciclo è dato dall'equazione di stato:

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 6.014 \quad T_B = \frac{3p_A V_A}{nR} = 3T_A \quad T_C = \frac{3p_A 2V_A}{RT_A} = 6T_A \quad T_D = \frac{p_A 2V_A}{RT_A} = 2T_A$$

Il gas è biatomico, per cui, nelle trasformazioni CD e DA si ha:

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} = n c_v (T_D - T_C) = \frac{p_A V_A}{RT_A} \frac{5}{2} R (2T_A - 6T_A) = -10 p_A V_A = -100 \text{ kJ}$$

$$Q_{DA} = n c_p (T_A - T_D) = \frac{p_A V_A}{RT_A} \frac{7}{2} R (T_A - 2T_A) = -\frac{7}{2} p_A V_A = -35 \text{ kJ}$$

Il calore scambiato nelle trasformazioni AB e BC è quindi:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = n c_v (T_B - T_A) = 50 \text{ kJ} \quad Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = 105 \text{ kJ}$$

Il rendimento del ciclo è quindi dato da:

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 0.129$$

11) Una quantità $n = 0.85$ moli di gas ideale biatomico si trova nello stato A ($V_A = 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $T_A = 315 \text{ K}$). Con una compressione isoterma reversibile in cui scambia il calore $Q_{AB} = -1580 \text{ J}$ il gas viene portato nello stato B.

1. Calcolare il volume V_B .

$$V_B = \dots\dots\dots$$

La stessa quantità di gas può passare dallo stato A ad uno stato C ($V_C = V_B$) con una trasformazione adiabatica reversibile e poi dallo stato C allo stato B con una trasformazione isocora. Calcolare:

2. la temperatura T_C

$$T_C = 418.4 \text{ K}$$

3. il calore scambiato e il lavoro (fatto o subito) nella trasformazione A->C->B.

$$Q_{ACB} = -1927.1 \text{ J}$$

$$W_{ACB} = -1927.1 \text{ J}$$

La trasformazione AB è isoterma reversibile, per cui il primo principio si può scrivere:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow V_B = V_A \exp\left(\frac{Q_{AB}}{nRT_A}\right) = 2.95 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Nella seconda parte del problema si passa dallo stato iniziale A a quello finale B tramite uno stato intermedio C.

La trasformazione AC è adiabatica reversibile per cui:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 418.4 \text{ K}$$

Un'ulteriore considerazione che si può fare è che, essendo l'energia interna una funzione di stato, la sua variazione sarà la stessa nella trasformazione diretta AB e in quella ACB. Si avrà, perciò, $\Delta U_{AB} = 0 = \Delta U_{ACB}$. Tenendo in considerazione quanto scritto si avrà:

$$Q_{AC} = 0 = W_{AC} + \Delta U_{AC} \quad Q_{CB} = W_{CB} + \Delta U_{CB} = 0 + \Delta U_{CB} \quad \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = 0$$

$$W_{AC} = -\Delta U_{AC} = n c_v (T_A - T_C) = W_{ACB} = -1827.1 \text{ J}$$

$$Q_{CB} = n c_v (T_B - T_C) = n c_v (T_A - T_C) = Q_{ACB} = -1827.1 \text{ J}$$

12) Un certo numero di moli di gas ideale sono contenute in un cilindro a pareti rigide, chiuso da un pistone di massa trascurabile libero di scorrere senza attrito. Sul pistone è posta una massa $M = 60$ kg. La sezione del cilindro è $S = 10^{-2} \text{ m}^2$. Tutte le pareti del cilindro ed il pistone sono isolati termicamente, tranne il fondo che è un buon conduttore del calore e si trova a contatto termico con una miscela costituita da una grande quantità di acqua e ghiaccio alla temperatura di fusione. Inizialmente il sistema si trova in equilibrio termodinamico a contatto con la pressione atmosferica $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ e con volume $V_A = 31.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Si toglie la massa M e si lascia che il sistema raggiunga un nuovo stato di equilibrio.

Successivamente il sistema viene riportato allo stato iniziale tramite una trasformazione isoterma reversibile. Si determinino:

1. il calore scambiato dal gas nella prima trasformazione. $Q_1 = 1840 \text{ J}$
2. il calore scambiato dal gas nella seconda trasformazione. $Q_2 = -2297 \text{ J}$
3. la quantità di ghiaccio(acqua) che complessivamente cambia fase nel ciclo ($\lambda_{\text{fus}} = 335 \text{ J/g}$).
 $m = 1.36 \text{ g}$

La prima trasformazione è isoterma irreversibile contro la pressione esterna p_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = ? \\ T_A = 273 \text{ K} \\ p_A = p_0 + \frac{Mg}{S} = 1.588 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_A = 31.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right. \quad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 2.2 \text{ moli} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 2.2 \\ T_B = 273 \text{ K} \\ p_B = p_0 = 10^5 \text{ Pa} \\ V_B = \frac{nRT_B}{p_0} = 49.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right.$$

$$Q_1 = W_1 = p_0 \Delta V = 10^5 (49.9 - 31.5) \cdot 10^{-3} = 1840 \text{ J}$$

La seconda trasformazione è un'isoterma reversibile:

$$Q_2 = W_2 = nRT \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = -2297 \text{ J}$$

Complessivamente il gas assorbe dal serbatoio una quantità di calore $Q_1 + Q_2$ e il serbatoio assorbe la stessa quantità cambiata di segno:

$$Q_1 + Q_2 = -457 \text{ J} \quad Q_{\text{serb}} = 457 \text{ J} \quad m = \frac{Q_{\text{serb}}}{\lambda} = 1.36 \text{ g}$$

13) Un cilindro con 2.2 moli di un gas ideale monoatomico è chiuso da un pistone ed è in equilibrio termico con un contenitore entro il quale è posta inizialmente una miscela refrigerante alla temperatura $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, costituita da una massa $M = 1.8 \text{ kg}$ di acqua contenente una quantità $m = 80 \text{ g}$ di ghiaccio. All'istante $t = 0$, mentre il gas si trova alla pressione atmosferica, viene bloccato il movimento del pistone e viene attivato un dispositivo riscaldante che, mediante una corrente che fluisce in una resistenza elettrica immersa nella miscela di acqua e ghiaccio, trasferisce lentamente calore al sistema con potenza $P = 4.0 \text{ W}$ per un tempo $\Delta t = 10$ ore. Sapendo che durante la trasformazione il gas si mantiene in equilibrio termico con il contenitore, calcolare:

- 1) dopo quanto tempo dall'accensione del dispositivo riscaldante si sarà fuso tutto il ghiaccio

$$t=6600 \text{ s}$$

2) la temperatura e la pressione finale del gas nello stato di equilibrio raggiunto dal sistema allo spegnimento del dispositivo riscaldante; $T_f=288.11 \text{ K}$ $p_f=1.069 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

3) il rapporto fra il calore assorbito dal gas e quello assorbito dall'acqua dal momento in cui il ghiaccio è tutto fuso fino all'istante finale.

$$Q_g/Q_{H_2O}=3.49 \cdot 10^{-3}$$

(Per la soluzione assumere i seguenti valori: pressione atmosferica $p_0 = 1.013 \times 10^5$, $\lambda = 3.3 \times 10^5 \text{ J/kg}$, calore specifico dell'acqua $c_A = 4186.8 \text{ J/(kg } ^\circ\text{K)}$).

La trasformazione avviene a volume costante. Il lavoro totale erogato dall'esterno è dato da:

$$W = Pt = 4.0 \cdot 3600 \cdot 10 = 144 \cdot 10^3 \text{ J} = 144 \text{ kJ}$$

Dal momento che il sistema che eroga la potenza non fa lavoro, tutto il lavoro va in calore trasferito al sistema acqua-ghiaccio+gas ($W=Q_{tot}$).

Il sistema complessivo non può variare la sua temperatura fintantoché non si sia sciolto tutto il ghiaccio. Per sciogliere tutto il ghiaccio è necessario somministrargli una quantità di calore $Q=m\lambda$ $Q=26.4 \text{ kJ}$.

Quindi il tempo necessario per sciogliere il ghiaccio sarà:

$$t = \frac{Q}{P} = 6600 \text{ s}$$

Di conseguenza alla fine della trasformazione tutto il ghiaccio sarà stato sciolto e il sistema complessivo avrà raggiunto una temperatura di equilibrio maggiore di T_0 .

$$Q_{tot} = Q + Q_{H_2O} + Q_{gas} \quad Q_{H_2O} = (m_{H_2O} + m_{ghiaccio}) c_A (T_f - T_0) \quad Q_{gas} = nC_V (T_f - T_0)$$

$$T_f = T_0 + \frac{Q_{tot} - Q}{[(m_{H_2O} + m_{ghiaccio}) c_A + nC_V]} = 273 + 15.11 = 288.11 \text{ K}$$

$$p_f = \frac{nRT_f}{V_0} = \frac{nRT_f}{nRT_0} p_0 = 1.069 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{Q_{gas}}{Q_{H_2O}} = \frac{nC_V (T_f - T_0)}{(m_{H_2O} + m_{ghiaccio}) c_A (T_f - T_0)} = \frac{nC_V}{(m_{H_2O} + m_{ghiaccio}) c_A} = 3.49 \cdot 10^{-3}$$

14) Un recipiente contiene del gas che si pensa essere azoto ($A=28$ biatomico) o Argon ($A=39.9$ monoatomico). Per identificare il gas, viene fatto espandere con una trasformazione adiabatica reversibile un campione del gas di volume $V_0=5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ a temperatura iniziale $T_0=298 \text{ K}$. Dopo l'espansione il gas si trova a $T_1=277 \text{ K}$ e occupa un volume $V_1=6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Considerando il gas ideale si chiede:

- il rapporto tra le pressioni finale e iniziale del gas $p_B/p_A=0.776$
- se il gas sia azoto o argon

Viene misurata la massa del campione di gas ed essa risulta essere $m=7 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

- si determini il lavoro del gas nell'espansione. $W= 109 \text{ J}$

Equazione di stato del gas e trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_A = n = ? \\ p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = n4.95 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ T_A = T_0 = 298 \text{ K} \\ V_A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} n_A = n = ? \\ p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = n3.84 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ T_B = 277 \text{ K} \\ V_B = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right. \quad \frac{p_B}{p_A} = 0.776$$

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \quad p_A = p_B \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma \quad \gamma = \frac{7}{5}$$

Il gas è biatomico, quindi è N_2 . Le moli sono allora:

$$n = \frac{m}{A} = 0.25$$

Il lavoro fatto dal gas nella trasformazione è:

$$W = -\Delta U = -nc_V(T_B - T_A) = 109 \text{ J}$$

15) $n=0.5$ moli di gas ideale biatomico si trovano in uno stato di equilibrio termodinamico caratterizzato dalla temperatura $T_A=433 \text{ K}$ e dalla pressione $p_A=4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Tramite una trasformazione isoterma reversibile il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio termodinamico B in cui $p_B=10^5 \text{ Pa}$. In seguito il gas raggiunge, tramite una trasformazione isobara un nuovo stato C. $Q_{BC} = -2081 \text{ J}$. Dallo stato C il gas ritorna in A con una trasformazione adiabatica reversibile.

Si determinino:

- il volume nello stato B, $V_B = 18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
- il volume nello stato C, $V_C = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
- il rendimento del ciclo. $\eta = 0.166$

(solo vecchio ordinamento : Si determini la variazione di entropia dell'universo a seguito del ciclo)

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0.5 \text{ mol} \\ T_A = 433 \text{ K} \\ p_A = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 0.5 \\ T_B = T_A = 433 \text{ K} \\ p_B = 10^5 \text{ Pa} \\ V_B = \frac{nRT_B}{p_B} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{array} \right.$$

Il calore assorbito nell'isobara è dato da:

$$Q_{BC} = nc_p \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{Q_{BC}}{nc_p} = -143 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad T_C = 290 \text{ K}$$

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_B} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Il calore assorbito nella prima trasformazione isoterma è:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 2495.3J$$

Da cui il lavoro totale compiuto nel ciclo, che è uguale alla somma dei calori assorbiti è:

$$Q = W = Q_{AB} + Q_{BC} = 2495.3 - 2081 = 414.3J$$

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 0.166$$

16) Una mole di gas ideale biatomico si trova in uno stato di equilibrio termodinamico A caratterizzato da $p_A=p_0=1.01 \cdot 10^5$ Pa e $T_A=273K$. Tramite una trasformazione isocora reversibile passa allo stato B. Nella trasformazione AB l'energia interna del gas varia della quantità $\Delta U=3118J$. In seguito il gas, a contatto termico con un serbatoio ideale alla temperatura T_B , esegue una trasformazione isoterma reversibile fino allo stato C. Da C ritorna in A tramite una trasformazione isobara.

Si determinino:

- Il volume in C

$$V_C = 34.8 \cdot 10^{-2} m^3$$

- La variazione di energia interna del serbatoio a seguito della trasformazione BC, $\Delta U_S = -1551.5 J$

- Il rendimento del ciclo

$$\eta = 0.065$$

La prima trasformazione è un'isocora reversibile, per definizione in questa trasformazione il gas non fa lavoro, per cui:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 3118J = nC_V(T_B - T_A) \Rightarrow T_B = T_A + \frac{\Delta U_{AB}}{nC_V} = 423K$$

Nello stato C il gas ha la stessa pressione che in A e la stessa temperatura che in B, quindi:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{nRT_B}{p_A} = 34.8 \cdot 10^{-2} m^3$$

Nella trasformazione BC il gas non varia la sua energia interna e compie un lavoro:

$$W_{BC} = Q_{BC} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 1551.5J$$

Il gas assorbe il calore Q_{BC} dalla sorgente che quindi cede una quantità di calore $-Q_{BC}$. Una sorgente scambia calore e non compie lavoro per cui il primo principio scritto per la sorgente dà:

$$Q_S = W_S + \Delta U_S \quad W_S = 0 \Rightarrow \Delta U_S = Q_S = -Q_{BC} = -1551.5J$$

Il calore scambiato dal gas nella trasformazione CA (isobara) è:

$$Q_{CA} = nC_p(T_A - T_C) = -4364.9J$$

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}}{(Q_{AB} + Q_{BC})} = 0.065 = 6.5\%$$

17) Una massa $M=0.355$ kg di acqua liquida a $t_0=45^\circ C$ e alla pressione $p_0 = 1.01 \cdot 10^5$ Pa viene portata allo stato di vapore alla temperatura $t_F=110^\circ C$ con una trasformazione a pressione costante. Determinare (utilizzando i dati sotto riportati):

a) la densità del vapore d'acqua a $t_F=110^\circ C$ (si supponga valida l'equazione di stato dei gas perfetti)

$$\rho = \dots\dots\dots$$

b) il lavoro totale fatto nella trasformazione .

$$W = \dots\dots\dots$$

c) la variazione della funzione di stato energia interna dell' acqua tra lo stato iniziale a $t_0=45^\circ\text{C}$ e quello finale a $t_F=110^\circ\text{C}$ $\Delta U=.....$

Dati :

Calore specifico acqua liquida tra t_0 e t_F $c_p = 4.186 \times 10^3 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$

Calore latente di evaporazione a 100°C $\lambda = 2256 \times 10^3 \text{ J/kg}$

Capacità termica a pressione costante del vapore d'acqua tra 100°C e 110°C $C_p = 34.32 \text{ J/gmole K}$

Grammo-mole di acqua $M_{\text{acq}}=18 \text{ g}$

Si trascuri la dilatazione termica dell'acqua liquida

18) Una macchina termica descrive un ciclo utilizzando una certa quantità di sostanza con **capacità termica**, a volume costante, data dalla relazione:

$$C_V = 17.19 + 13.62 \cdot 10^{-3} T \text{ J/K}$$

(T temperatura assoluta della sostanza).

Le trasformazioni che compongono il ciclo sono:

AB: espansione adiabatica irreversibile

BC: isocora reversibile

CD: compressione adiabatica reversibile

DA: isocora reversibile.

Siano inoltre $T_A=900 \text{ K}$, $T_B=600 \text{ K}$, $T_C=300 \text{ K}$ e $T_D=522 \text{ K}$, le temperature di equilibrio dei vari stati finali delle singole trasformazioni.

Si determinino:

1) il rendimento del ciclo

$$\eta = 0.311$$

2) il lavoro fatto dalla macchina nel ciclo

$$W = 3162.6 \text{ J}$$

$$C_V = a + bT$$

$$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$$

$$Q_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} C_V(T) dT = a(T_C - T_B) + \frac{b}{2}(T_C^2 - T_B^2) = -6995.7 \text{ J}$$

$$Q_{DA} = \int_{T_D}^{T_A} C_V(T) dT = a(T_A - T_D) + \frac{b}{2}(T_A^2 - T_D^2) = 10158.3 \text{ J}$$

$$W = Q_{BC} + Q_{DA} = 3162.6 \text{ J}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_{DA}} = 0.311$$