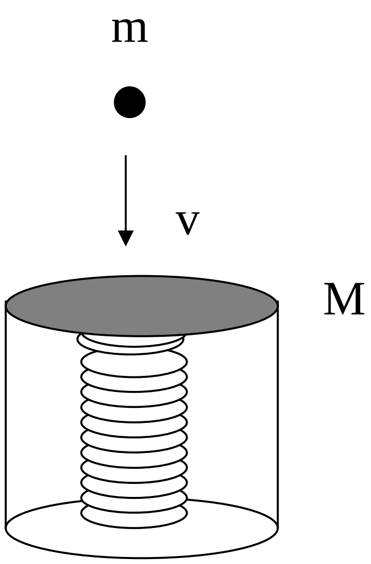
Esercizi sugli urti soluzioni

1. Una molla di costante elastica K=343 N/m è posta all'interno di un recipiente verticale. Sulla molla è appoggiato un disco di massa M=0.7 kg (vedi figura). Inizialmente il sistema è in equilibrio statico; su di esso urta in modo completamente anelastico un punto materiale che ha massa m=0.1 kg. Immediatamente prima dell'urto la velocità del punto materiale è verticale, diretta verso il basso e ha modulo v=20 m/s. Si determinino:

a) La compressione iniziale della molla , Δl= 0.02 m
b) L'energia dissipata nell'urto, ΔE= -17.5 J
c) La compressione massima della molla Δl_{max}= 0.14 m

(Ai fini della soluzione del problema si consideri trascurabile la massa della molla rispetto alle altre masse in gioco)



a) Equilibrio statico della molla e della massa M:

$$-Mg + K\Delta l = 0 \qquad \Delta l = \frac{Mg}{K} = 0.02m$$

b) L'urto è istantaneo, nell'urto si dissipa solo energia cinetica e vale la conservazione della quantità di moto:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 \qquad mv = (m+M)V \qquad V = \frac{m}{m+M}v = 2.5\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$\Delta E = -17.5J$$

c) Nell'istante immediatamente dopo l'urto l'energia del sistema è data dall'energia cinetica della massa col disco più l'energia potenziale elastica della molla (considerando come livello di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale quello della molla a riposo). Quando la molla ha raggiunto la sua massima compressione l'energia totale è somma delle energie potenziali elastica e gravitazionale:

$$E_0^{'} = \frac{1}{2}K\Delta l^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 - (m+M)g\Delta l = 2.57\,J \qquad E_0^{'} = \frac{1}{2}Kx^2 - (m+M)gx$$

$$x = 0.14m = 14.4cm$$

2. Un blocco di massa M=4.0 kg è sospeso, in equilibrio statico, ad una molla ideale di costante elastica K=500 N/m. Un proiettile di massa m=50 g viene sparato verticalmente dal basso (alla velocità di 150 m/s) contro il blocco, nel quale rimane incastrato.

Di quanto è, inizialmente , allungata la molla? $\Delta l = 7.84\ 10^{-2}$ m

Quale è la velocità del sistema immediatamente dopo l'urto? v= 1.85 m/s

Si trovi l'ampiezza del moto armonico semplice risultante A=0.167 m

Equazione dell'equilibrio per il sistema molla-corpo:

$$Ma = -Mg + Kx = 0 \Rightarrow x = \frac{Mg}{K} = 7.84 \cdot 10^{-2} m$$

Conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$$mv = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m + M} v = 1.85 m/s$$

Equazioni del moto armonico semplice con le condizioni iniziali date dal problema:

$$\begin{cases} x(t) = Asen(\omega t + \varphi_0) \\ v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = Asen(\varphi_0) = 0 \\ v(0) = A\omega\cos(\varphi_0) = V \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m + M}} \Rightarrow A = \frac{V}{\omega} = 0.167 m$$

3. Un corpo massa m=0.2 kg si muove su un piano orizzontale scabro. Il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piano é μ= 0.1. Inizialmente il corpo ha velocità v_0=3.21 m/s e dopo aver percorso uno spazio d la velocità del punto si è ridotta al 90% di quella iniziale.

a) Si determini lo spazio d. d= 1.0 m

In questo istante il corpo urta un respingente costituito da una molla di costante elastica k=163 N/m (inizialmente a riposo). Il corpo mantiene il proprio verso di moto fino alla massima compressione della molla e poi viene respinto e prosegue il suo moto fino a fermarsi.

Si determinino:

b) la massima compressione della molla Δl_{max}=0.1 m

c) il lavoro fatto dalla forza di attrito dall'istante iniziale a quello finale. W= 1.03 J

Dal teorema dell'energia cinetica si ottiene:

$$W = \Delta E_k \qquad \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{att} = -\mu dmg \qquad v_1 = 0.9v_0 \quad d = -\frac{v_0^2(0.9^2 - 1)}{2\mu g} = 1.0m$$

Il corpo urta il respingente, prosegue il suo moto, contemporaneamente la molla si comprime. Durante la fase di compressione della molla la forza di attrito continua a fare lavoro. Sempre dal teorema dell'energia cinetica si ha:

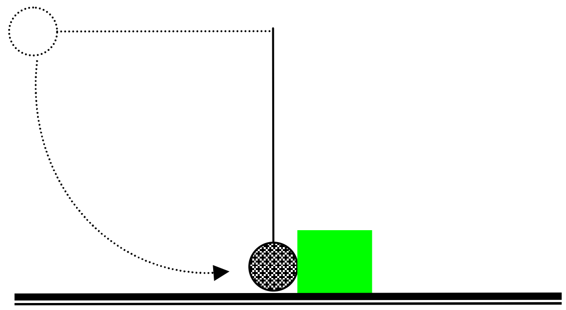
$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu mgx \qquad x = \frac{-\mu mg +/- \sqrt{(\mu mg)^2 + kmv_1^2}}{k} = 0.1m$$

Considerando che l'urto con il respingente sia istantaneo, il lavoro delle forze esterne durante tutto il moto coincide con quello della forza di attrito. Il lavoro della forza di attrito è quindi pari alla differenza di energia cinetica dall'istante finale a quello iniziale.

$$W_{att} = \Delta E_k \qquad |W_{att}| = \frac{1}{2}mv_1^2 = 1.03J$$

4. Un palla rigida di massa m=0.5 kg è agganciata ad una fune lunga L=0.8 m., fissata all'altra estremità. La palla viene abbandonata quando la fune è tesa e orizzontale. Giunta nel punto più

basso della traiettoria, la palla colpisce elasticamente e istantaneamente un blocco rigido di massa M=3 kg, inizialmente fermo su una superficie scabra. Si calcolino:

	a) la velocità della palla immediatamente dopo l'urto. $v_{1,f}$= -2.83 m/s b) la velocità del blocco immediatamente dopo l'urto $v_{2,f}$= 1.13 m/s Supponendo che il blocco si metta in moto con velocità v_{2f}: c) quanto deve valere il coefficiente di attrito dinamico tra piano e corpo affinché quest' ultimo si arresti dopo aver percorso una distanza d=74cm. μ=0.13

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene la velocità della palla immediatamente prima dell'urto:

$$mgL = \frac{1}{2} m v_{1,i}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{1,i} = \sqrt{2gL} = 3.96\, m/s$$

Nell'urto elastico si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica del sistema per cui:

$$\begin{aligned} m v_{1,i} &= m v_{1,f} + M v_{2,f} \\ \frac{1}{2} m v_{1,i}^2 &= \frac{1}{2} m v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} M v_{2,f}^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_{1,f} &= \frac{m-M}{m+M} v_{1,i} = -2{,}83\, m/s \\ v_{2,f} &= \frac{2m}{m+M} v_{1,i} = 1.13\, m/s \end{aligned}$$

L'equazione di secondo grado fornisce anche la soluzione banale in cui il corpo M resta fermo e la palla mantiene la sua velocità. Questa soluzione corrisponde al non verificarsi dell'urto e si deve scartare. Dai dati ottenuti si vede che la massa parte verso destra, mentre la palla inverte il suo moto.

Se la massa parte con la velocità che ha immediatamente dopo l'urto e si ferma dopo aver percorso un determinato tratto, ciò significa che tutta l'energia si è trasformata in lavoro delle forze di attrito da cui:

$$0 - \frac{1}{2} M v_{2,f}^2 = W_{att} = -\mu g M d \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{v_{2,f}^2}{2gd} = 0.13$$

5. Su un piano scabro, inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale, è posto in quiete un corpo (assimilabile ad un punto materiale) di massa m_1=1 kg. Il coefficiente di attrito statico tra corpo m_1e piano è μ_{1s}=0.7, il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è μ_{1d}=0.4. Un altro corpo di massa m_2=m_1 viene lanciato dalla sommità del piano con velocità v_0=0.05 m/s (parallela al piano stesso). Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo m_2 e il piano è μ_{2d}=0.3. Dopo un tempo t=0.9 s il corpo 2 urta in modo completamente anelastico il corpo 1.
Si determinino:
a) La forza di attrito statico tra corpo m_1 e piano F_{att}= 4.9 N
b) La distanza percorsa lungo il piano da m_2 prima di urtare m_1 d= 1 m
c) L'accelerazione del sistema dopo l'urto a= 1.93 m/s^2

a-Il corpo m_1 è in equilibrio statico, la sua equazione del moto è:

$$0 = m_1 a_1 = m_1 g sen\alpha - F_{att} \Rightarrow F_{att} = m_1 g sen\alpha = 4.9N$$

$$F_{\max} = \mu_{1s} g \cos\alpha = 5.94N$$

La forza di attrito è minore della forza di attrito statico massimo.

b- L'accelerazione con cui scende il corpo 2 è data da:

$$m_2 a_2 = m_2 g sen\alpha - \mu_{2d} m_2 g \cos\alpha \Rightarrow a_2 = g sen\alpha - \mu_{2d} g \cos\alpha = 2.35 m/s^2$$

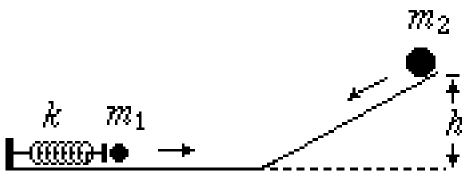
$$\Rightarrow d = v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 = 0.998m = 1m$$

c- La forza F, tra i due corpi, è interna al sistema, e l'accelerazione con cui i corpi scendono è quella del CM del sistema. Le equazioni del moto di 1 e 2 si possono scrivere:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g sen\alpha - \mu_{1d} m_1 g \cos\alpha + F \\ m_2 a = m_2 g sen\alpha - \mu_{2d} m_2 g \cos\alpha - F \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = g sen\alpha - g\cos\alpha \dfrac{\mu_{2d} + \mu_{1d}}{2} = 1.93 m/s^2 \\ F = m_1(\mu_{1d} g \cos\alpha - g sen\alpha + a) = 0.42(5)N \end{matrix}$$

6. Una molla ideale di costante elastica k = 500 N/m, inizialmente compressa di una quantità d = 22 cm rispetto alla sua posizione a riposo, spinge una massa puntiforme m_1 = 67 g inizialmente ferma, su un piano orizzontale senza attrito nella direzione indicata in figura. Un'altra massa puntiforme m_2 = 125 g, inizialmente ferma su una rampa inclinata di un angolo θ = 30 ° rispetto all'orizzontale, ad una quota h_0 dal livello del piano, è lasciata libera di scendere e, una volta raggiunto il piano, subisce un urto completamente anelastico contro la precedente, che si è staccata dalla molla. Dopo l'urto il centro di massa del sistema delle due particelle si muove sul piano con velocità v = 4.6 m/s, diretta verso la rampa. Calcolare:

1) la velocità della massa m_1 al momento dell'urto; v_1= 19 m/s
2) la quota iniziale h_0 da cui è scesa la massa m_2; h_0= 0.50 m
3) quale distanza percorreranno le due masse lungo il piano inclinato prima di fermarsi. d= 2.16 m



Conservazione dell'energia meccanica per le due masse

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \qquad v_1 = \sqrt{\frac{kd^2}{m_1}} = 19 m/s$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Conservazione della quantità di moto del sistema nell'urto:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \qquad v_2 = \frac{m_1 v_1 - (m_1 + m_2) v}{m_2} = 3.12 m/s \qquad h = \frac{v_2^2}{2g} = 0.496m$$

Conservazione dell'energia meccanica del sistema dopo l'urto:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g h = (m_1 + m_2) g l \sin\theta \qquad l = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = 2.16m$$