

Esercizi sugli urti tra punti materiali e corpi rigidi

Un'asta omogenea di massa $M=0.9$ kg e di lunghezza $L=0.2$ m è incernierata nel suo punto di mezzo in un piano orizzontale ed è inizialmente ferma. Un proiettile di massa $m=100$ g viene sparato con velocità v_0 , perpendicolare alla sbarra, contro un suo estremo. Il proiettile resta conficcato nella sbarra e il sistema si mette in moto con velocità angolare $\omega=300$ rad/s.

a) Si calcoli la velocità iniziale del proiettile, b) La cerniera esercita sull'asta un attrito di momento costante M_a e l'asta si ferma in 5 giri. Si calcoli il valore del momento di attrito.

Conservazione del momento angolare rispetto al vincolo:

$$I_{TOT} = I_a + I_p = \frac{ML^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = 0.004 \text{ kgm}^2$$

$$I_{TOT} \omega = \frac{mvL}{2} \Rightarrow v = \frac{2I_{TOT} \omega}{mL} = 120 \text{ ms}^{-1}$$

Lavoro delle forze dissipative:

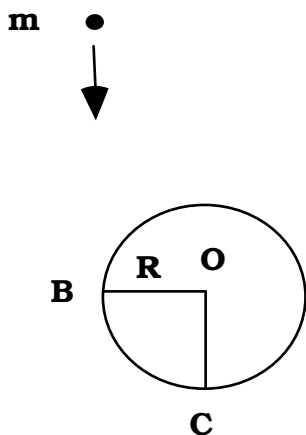
$$K\vartheta = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2 \Rightarrow K = \frac{I_{TOT} \omega^2}{20\pi} = 5.73 \text{ Nm}$$

Un disco omogeneo di massa $M=10$ kg e di raggio $R=0.3$ m è imperniato su un asse orizzontale fisso e senza attrito passante per il suo centro O . Un corpo di dimensioni piccole rispetto a R e di massa m è in quiete ad un'altezza h rispetto al punto B posto sulla periferia del disco, alla stessa quota di O . Si lascia cadere il corpo che, quando giunge in B possiede una velocità $v_1=4.45$ m/s. Esso viene frenato in un lasso di tempo brevissimo (si può quindi trascurare il movimento del disco durante il frenamento) e resta attaccato al disco in B . La velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto è $\omega=4.24$ s⁻¹. Calcolare:

a) Da quale altezza si è lasciata cadere la massa m , b) Il valore della massa m , c) L'impulso esercitato dal vincolo durante l'urto sulla particella di massa m

Supponendo che m si stacchi dal disco quando arriva in C , dopo aver ruotato con esso di un angolo $\pi/2$, si determinino:

d) La velocità lineare di m al distacco, e) La velocità angolare del disco dopo il distacco



Vale la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad h = \frac{v^2}{2g} = 1.01m$$

Si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$L = \text{cost} = L_i = L_f \quad L_i = mvR \quad L_f = mv_1R + I\omega = mv_1R + \frac{mR^2}{2}\omega$$

$$(v_1 = \omega R) \quad m = \frac{\frac{M}{2}R^2\omega}{v_1R - R^2\omega} = 2kg$$

$$\Delta p = m(v_1 - v) = 6.35Ns$$

Se la massa si stacca dopo un quarto di giro, essa nel frattempo ha acquisito energia cinetica col disco e ha diminuito la sua energia potenziale:

$$mgR + \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_i = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_f$$

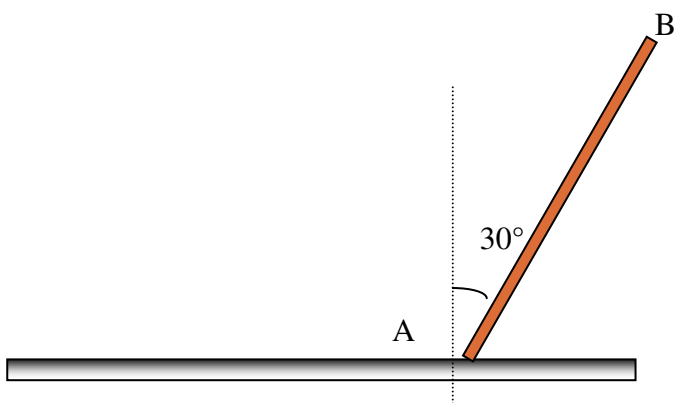
$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + \frac{2mgR}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2} = 36.6s^{-2} \quad \omega_f = 6.05rad/s$$

$$v_f = \omega_f R = 1.82m/s$$

Una sbarra omogenea di lunghezza $L=0.8$ m e massa $M=1.7$ kg viene lasciata cadere da un'altezza h , rispetto al piano di un tavolo. L'asse della sbarra forma un angolo $\theta=30^\circ$ con la verticale e non le viene impressa alcuna rotazione. Quando l'estremo A della sbarra colpisce il tavolo (vedi figura), il centro di massa ha una velocità $v_o=2.0$ m/s. L'urto è completamente anelastico e la sbarra inizia a ruotare mentre il punto A rimane in quiete.

Si determinino:

- a) l'altezza h , b) la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto, c) l'energia dissipata nell'urto d) la velocità dell'estremo B della sbarra quando passa per l'orizzontale, e) le componenti dell'impulso impresso alla sbarra durante l'urto



- a) Conservazione dell'energia meccanica, ponendo lo zero dell'energia potenziale sul piano del tavolo:

$$Mgh_{CM} = \frac{1}{2}Mv_o^2 + Mg \frac{L}{2} \cos 30$$

$$h_{CM} = \frac{v_o^2}{2g} + \frac{L}{2} \cos 30 = 0.55m$$

b) Conservazione del momento angolare rispetto al punto di contatto (sistema di riferimento levogiro):

$$L_i = -\frac{Mv_o L}{2} \sin 30 \quad L_f = I\omega \quad I = \frac{ML^2}{3}$$

$$\omega = -\frac{3}{2} \frac{v_o}{L} \sin 30 = -1.875 s^{-1}$$

La rotazione è oraria.

c) L'energia dissipata è:

$$\Delta E = E_{fin} - E_{in} = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} Mv_o^2 = \frac{1}{2} Mv_o^2 \left(\frac{3}{4} \sin^2(30) - 1 \right) = -2.76 J$$

d) Conservazione dell'energia meccanica nel moto di rotazione:

$$Mg \frac{L}{2} \cos 30 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega'^2$$

$$\omega'^2 = \frac{3g \cos 30}{L} + \omega^2 \quad \omega = 5.94 s^{-1} \quad v = \omega L = 4.75 m/s$$

e)

$$\Delta \bar{p} = \bar{J} = M \overline{v'_{CM}} - M \overline{v_{CM}} \quad J_x = M\omega \frac{L}{2} \cos 30 \quad J_y = -M\omega \frac{L}{2} \sin 30 + Mv_o$$

$$J_x = Mv_o \left(\frac{3}{4} \sin 30 \cos 30 \right) = 1.1 Ns \quad J_y = Mv_o \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 30 \right) = 2.76 Ns$$

Un'asta omogenea, di lunghezza $L=40$ cm e massa $M_a=90$ g, può ruotare senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo. L'asta è inizialmente in quiete, in posizione orizzontale. Essa viene lasciata libera ed inizia a muoversi per effetto della forza peso. Qual è la forza esercitata dal perno nell'istante in cui la sbarra inizia a muoversi? Qual è la velocità angolare dell'asta quando essa raggiunge la posizione verticale? Nell'istante in cui l'asta è verticale urta, con l'estremo libero, un corpo puntiforme di massa M_b . Dopo l'urto, perfettamente elastico, l'asta rimane in quiete. Qual è la massa M_b ? Dopo l'urto il corpo puntiforme si muove su una superficie priva di attrito e incontra un piano inclinato di altezza $H=15$ cm e inclinazione 30° . Con quale velocità il punto materiale arriva alla sommità della rampa? Qual è l'altezza massima raggiunta dal corpo?



Momento angolare rispetto al polo e prima legge della dinamica:

$$\tau = M_a g \frac{L}{2} = I\alpha \quad I = \frac{M_a L^2}{3}$$

$$M_a a_{cm} = F + M_a g$$

$$F = -\frac{M_a g}{4} = -0.22 N$$

Conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = 0 \quad E_f = \frac{I}{2} \omega^2 - M_a g \frac{L}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 8.57 s^{-1}$$

Conservazione del momento angolare rispetto al polo e conservazione dell'energia cinetica

$$I\omega = M_b v_b L \quad \frac{I\omega^2}{2} = \frac{M_b v_b^2}{2} \quad v_b = \frac{I\omega}{M_b L} \quad M_b = \frac{M_a}{3} = 30 g$$

Conservazione dell'energia meccanica nel moto lungo la rampa

$$\frac{1}{2} M_b v_b^2 = \frac{1}{2} M_b v^2 + M_b g H \quad v_b = 3.43(3.428) m/s \quad v = \sqrt{v_b^2 - 2gH} = 2.97 m/s$$

moto sotto l'azione della forza peso con velocità iniziale inclinata di un angolo alfa rispetto all'orizzontale

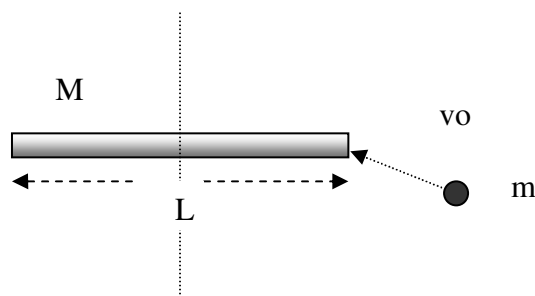
$$v_y = v \sin 30 = 1.486 m/s \quad h = H + \frac{v_y^2}{2g} = .26 m = 26 cm$$

Un'asta omogenea di massa $M=0.8$ kg e lunghezza $L=0.3$ m può ruotare in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale che passa per il suo centro di massa. Inizialmente l'asta è ferma. Su un suo estremo incide una massa $m=0.15$ kg che ha velocità orizzontale $v_0=100$ m/s. La massa resta conficcata nell'asta e il sistema inizia a ruotare.

Si determinino:

a) La velocità angolare del sistema dopo l'urto, b) L'impulso subito dalla massa m nell'urto

Se sull'asse agisce un momento di attrito $M_{att}=10.75$ Nm in quanti giri si fermerà il sistema ?



Nell'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione:

$$L_i = m v_0 \frac{l}{2} = L_f = I_{tot} \omega \quad I_{tot} = \frac{ML^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = 9.38 \cdot 10^{-3} kgm^2 \quad \omega = \frac{m v_0 L}{2 I_{tot}} = 240 rad/s$$

L'impulso impartito alla particella di massa m è:

$$i = \Delta p = m v_{fin} - m v_{in} = m \left(\omega \frac{L}{2} - v_0 \right) = -9.6 Ns$$

Il sistema si ferma per effetto del lavoro del momento di attrito:

$$W = \int M_{att} d\theta = \Delta E_k \quad W = M_{att} \theta_{max} = \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 \quad \theta_{max} = \frac{I_{tot} \omega^2}{2M_{att}} = 25.11 rad$$

$$n = \frac{\theta_{max}}{2\pi} = 4 \text{ giri}$$

Un'asta sottile e uniforme di massa $M=0.73 \text{ kg}$ e lunghezza $L=1 \text{ m}$ è sospesa verticalmente ad un perno senza attrito, posto alla sua estremità superiore. Una massa $m=20 \text{ g}$, di stucco, che si muove orizzontalmente con velocità $v=30 \text{ m/s}$ colpisce l'asta nel suo centro di massa e vi resta attaccata. Determinare:

a) La velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto b) L'impulso impresso all'asta dalla massa di stucco c) La variazione massima di quota dell'estremo libero dell'asta

a) Conservazione del momento angolare rispetto al vincolo

$$L = cost = mv \frac{L}{2} = I\omega \quad I = \frac{ML^2}{3} + \frac{mL^2}{4} = 0.248 \text{ Kgm}^2 \quad \Rightarrow \omega = \frac{mv}{2L \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right)} = 1.21 \text{ rad/s}$$

b) Si chiede l'impulso impresso dalla massa m all'asta:

$$J = \Delta p = Mv_{CM} = M \frac{L}{2} \omega = 0.44 \text{ N/s}$$

c) Conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = (M+m)g \Delta h_{CM} \quad \Delta h_{CM} = \frac{I \omega^2}{2(m+M)g} = 0.025 \text{ m} \quad \Delta h = 2 \Delta h_{CM} = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$