

Esercizi riassuntivi di Fisica Generale II
per il corso di laurea in Ingegneria Gestionale
dell'Università di Padova

Prof. Roberto Carlin – Dott. Mosè Mariotti

V 1.1
Padova 25 Maggio 2003

V1.1 25/5/03: Aggiunti esercizi 8,9,10,19
V1.0 12/5/03: Prima versione

Nb. Nonostante l'attenzione nella correzione nei testi, è più che probabile siano presenti alcuni errori, che invitiamo gli studenti a riportare prontamente.

© R.Carlin. M.Mariotti. E' vietata ogni forma di copia, che non sia per uso personale degli studenti del corso di Fisica Generale II di Ingegneria Gestionale.

Problema 1.

Due sfere conduttrici di raggio $R_1=1\text{cm}$ e $R_2=3\text{cm}$ sono poste con i centri ad una distanza $L=2\text{m}$. Inizialmente entrambe hanno una carica $Q_0=2*10^{-3}\text{C}$.



1. Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q_0=-2*10^{-6}\text{C}$ posta ad una distanza $2L$ dal centro della seconda sfera (vedi figura).
2. La carica q_0 viene portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?

In seguito le due sfere vengono connesse con un filo conduttore.

3. Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano sulle due sfere?
4. Quale è l'energia dissipata nel processo?

Soluzione:

La forza sulla carica q_0 è pari a q_0E , dove E è il campo elettrico generato dalle due sfere cariche, valutato nel punto in cui si trova q_0 . Le sfere sono molto distanti rispetto alle loro dimensioni, quindi si possono trascurare gli effetti di induzione reciproca (e a maggior ragione l'effetto di induzione di q_0 , le distribuzioni di carica si considerano uniformi sulle superfici. Ciascuna delle sfere uniformemente cariche genera un campo che è equivalente a quello di una carica puntiforme posta nel loro centro, quindi, nel punto in cui si trova q_0 :

$$E_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (2L)^2} \quad E_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (3L)^2} \quad (1.1)$$

$$F = q_0 \left(\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (2L)^2} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (3L)^2} \right) = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{4L^2} + \frac{1}{9L^2} \right) = -3.25 N \vec{u}_x \quad (1.2)$$

Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q_0 all'infinito è pari a q_0V , dove di nuovo il potenziale V delle due sfere cariche è equivalente a quello di due cariche puntiformi:

$$W = q_0 V = q_0 \left(\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 2L} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 3L} \right) = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2L} + \frac{1}{3L} \right) = -15 J \quad (1.3)$$

Quando le due sfere vengono connesse elettricamente, la loro carica si ridistribuisce, sempre sulle superfici, in modo che le due sfere si portino allo stesso potenziale. Sempre a causa della distanza tra le sfere, la distribuzione di carica su ciascuna sfera potrà ancora essere considerata uniforme. Si avrà quindi che, calcolando il potenziale sulle superfici delle sfere:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (1.4)$$

e quindi, considerando anche la conservazione della carica, le equazioni che determinano le cariche sono:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad Q_1 + Q_2 = 2Q_0 \quad (1.5)$$

da cui si ottiene:

$$Q_2 = \frac{2Q_0}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = 3 \cdot 10^{-3} C \quad (1.6)$$

$$Q_1 = 2Q_0 - Q_2 = 1 \cdot 10^{-3} C$$

L'energia dissipata nel processo sarà pari alla variazione dell'energia elettrostatica del sistema. Ciascuna sfera carica può essere considerata come un condensatore (con l'altra armatura all'infinito), di capacità pari a $4\pi\epsilon_0 R$ e quindi di energia $Q^2/2C$. Si ottiene lo ovviamente stesso risultato integrando la densità di energia elettrostatica nel volume in cui c'è campo elettrico:

$$U_E = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 4\pi R^2 dR = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.7)$$

L'energia elettrostatica iniziale è così:

$$U_{IN} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2.4 \cdot 10^6 J \quad (1.8)$$

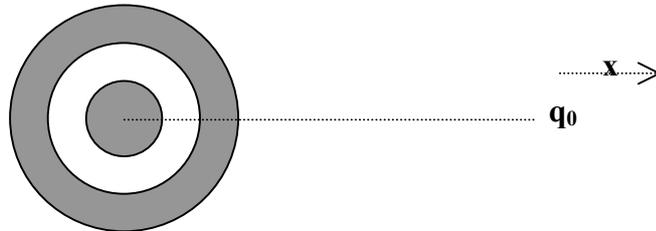
e quella finale:

$$U_{FIN} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right) = 1.8 \cdot 10^6 J \quad (1.9)$$

da cui $U_{DISS} = |U_{FIN} - U_{IN}| = 600 KJ$.

Problema 2.

Un conduttore sferico cavo di raggio interno $R_2=2\text{cm}$ e raggio esterno $R_3=3\text{cm}$ ha una carica pari a $Q_0=3\cdot 10^{-4}\text{C}$. All'interno viene posto un conduttore sferico di raggio $R_1=1\text{cm}$, con un'ulteriore carica pari a Q_0 . Ad una distanza $L=3\text{m}$ dal centro dei conduttori è posta una piccola carica puntiforme $q_0=-2\cdot 10^{-7}\text{C}$.



1. Calcolare la forza esercitata sulla carica q_0
2. La carica q_0 viene portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?

In seguito i due conduttori vengono connessi con un filo metallico.

3. Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano alla fine sulle sfere?
4. Quale è l'energia dissipata nel processo?

Soluzione:

La carica sulle superfici di raggio R_1, R_2 ed R_3 è rispettivamente $Q_0, -Q_0$ (indotta) e $2Q_0$ (composta da Q_0 indotta più Q_0 nativa). La distanza tra q_0 ed i conduttori è grande rispetto al loro diametro, e q_0 è piccola rispetto a Q_0 . L'effetto di induzione elettrostatica è perciò trascurabile e le distribuzioni di carica sui conduttori possono considerarsi in buona approssimazione sferiche uniformi. La carica q_0 vedrà il campo generato da una superficie sferica carica con carica $2Q_0$, equivalente a quello di una carica puntiforme:

$$F = q_0 \left(\frac{2Q_0}{4\pi\epsilon_0 L^2} \right) = -120\text{mN}\bar{u}_x \quad (2.1)$$

Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q_0 all'infinito è pari a q_0V , da cui:

$$W = q_0 \left(\frac{2Q_0}{4\pi\epsilon_0 L} \right) = -360\text{mJ} \quad (2.2)$$

Connettendo le due sfere, la carica si ridistribuisce portandosi tutta sulla superficie esterna (quella di raggio R_3). Quindi le cariche finali sulle due sfere saranno:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 \\ Q_2 &= 2Q_0 = 6\cdot 10^{-4}\text{C} \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'energia elettrostatica del sistema è costituita dall'energia del condensatore sferico (tra le due sfere interna ed esterna) e dall'energia del campo esterno. La capacità di un condensatore sferico è pari a:

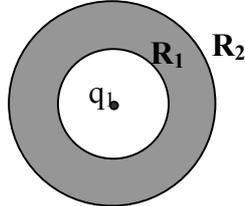
$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (2.4)$$

Poiché il campo elettrico esterno non varia cortocircuitando le due sfere, l'unica variazione è quella relativa al campo interno:

$$U_{IN} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad U_{FIN} = 0$$
$$U_{DISS} = \left| \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right| = 20.25 KJ \quad (2.5)$$

Problema 3.

Nel centro di un conduttore sferico cavo, di raggio interno $R_1 = 10$ cm e raggio esterno $R_2 = 20$ cm, è contenuta una carica puntiforme $q_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ C.



1. Scrivere le espressioni del campo e del potenziale nelle 3 regioni: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$.

Una carica $q_2 = 3q_1$ viene portata da distanza infinita fino al conduttore.

2. Scrivere le nuove configurazioni di campo e potenziale nelle tre regioni.
3. Scrivere il lavoro fatto per portare la carica q_2 dall'infinito al conduttore.

Soluzione:

Il campo elettrico nel conduttore ($R_1 < r < R_2$) è nullo, mentre è quello della carica q_1 nelle due regioni $r < R_1$ e $r > R_2$. Pertanto:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, E_2 = 0, E_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.1)$$

Il potenziale si può calcolare come somma dei potenziali delle tre distribuzioni di carica (q_1 e le due cariche indotte sulle superfici del conduttore, $-q_1$ e q_1), con la usuale assunzione di potenziale nullo all'infinito. Il potenziale risulterà costante dentro il conduttore:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}, V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}, V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.2)$$

La carica q_2 va a modificare solo la carica sulla superficie esterna del conduttore. Il campo elettrico sarà pertanto diverso solo all'esterno del conduttore, mentre varieranno i termini costanti del potenziale anche all'interno:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, E_2 = 0, E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.3)$$

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1}{\pi\epsilon_0 R_2} \quad (3.4)$$

$$V_2 = \frac{q_1}{\pi\epsilon_0 R_2}, V_3 = \frac{q_1}{\pi\epsilon_0 r}$$

Il lavoro fatto per portare la carica q_2 fino alla superficie del conduttore è pari alla variazione di energia elettrostatica del sistema (solamente quindi all'esterno del conduttore). Può essere calcolata agevolmente ricordando che la capacità di un conduttore sferico è $C = 4\pi\epsilon_0 R$ e che il lavoro necessario a caricare una capacità è

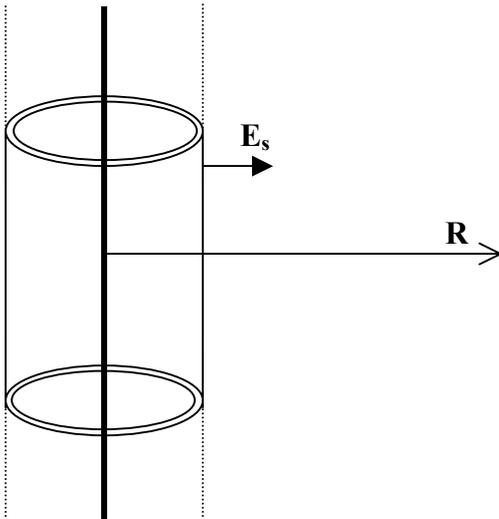
$W = Q^2/2C$. Si calcolerà quindi la differenza tra le energie elettrostatiche finale ed iniziale:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{(q_1 + q_2)^2}{R_2} - \frac{q_1^2}{R_2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{(4q_1)^2}{R_2} - \frac{q_1^2}{R_2} \right) = \frac{15q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = 303.3\text{J} \quad (3.5)$$

Problema 4.

Un cilindro conduttore ha diametro esterno D e lunghezza infinita. Sull'asse del cilindro è posto un filo con densità di carica lineare $\lambda = 6.67 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}$. Sapendo che il campo elettrico misurato sulla superficie esterna del cilindro è $E_s = 120 \text{ V/m}$, determinare:

1. Il diametro esterno D del cilindro
2. La forza che agisce su una carica di prova $q = 10^{-4} \text{ C}$ posta all'esterno del cilindro, ad una distanza $R = 88 \text{ cm}$ dall'asse.



Soluzione:

La carica indotta sulla superficie di un tratto di cilindro è la stessa che c'è nella sezione di filo all'interno:

$$Q = \lambda l = \sigma \pi D l \quad (4.1)$$

quindi si può scrivere:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi D} \quad (4.2)$$

Noto il campo elettrico sulla superficie si può determinare la densità di carica e quindi il diametro del cilindro:

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi D} \rightarrow D = \frac{\lambda}{\pi \epsilon E_s} = \frac{6.67 \cdot 10^{-10}}{\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 120} = 0.2 \text{ m} \quad (4.3)$$

Il campo elettrico all'esterno del cilindro conduttore è uguale a quello del filo rettilineo infinito:

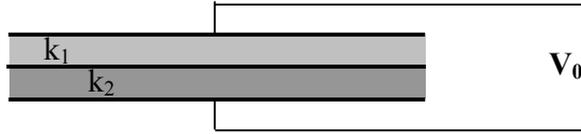
$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \quad (4.4)$$

E pertanto la forza su una carica di prova vale:

$$F = qE = q \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} = \frac{10^{-4} \cdot 6.67 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.88} = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (4.5)$$

Problema 5.

Tre lamine metalliche quadrate parallele, di lato $L=120\text{cm}$, sono poste a distanza $h=1.1\text{ cm}$ una dall'altra. Tra le lamine vi sono due sostanze dielettriche, con costanti dielettriche relative $k_1=2.1$ e $k_2=1.7$. Le due lamine esterne sono connesse ad un generatore che le mantiene alla tensione $V_0=120\text{V}$. Determinare:



1. Quale è la capacità totale del sistema.
2. Quanto vale il campo elettrico E_1 nel dielettrico 1.
3. Quale è la variazione di energia elettrostatica se i due dielettrici vengono estratti.

Soluzione:

Le due capacità C_1 e C_2 si possono considerare in serie. Hanno valori diversi a causa delle diverse costanti dielettriche:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\varepsilon_0 k_1 L}{h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2.1 \cdot 1.2^2}{0.011} = 2.433 \text{ nF} \\C_2 &= \frac{\varepsilon_0 k_2 L}{h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.7 \cdot 1.2^2}{0.011} = 1.97 \text{ nF} \\C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.089 \text{ nF}\end{aligned} \quad (5.1)$$

Le due capacità in serie hanno la stessa carica Q , che è anche la carica della serie dei due. Questo fatto può essere usato per calcolare le tensioni su ciascun condensatore e quindi i campi elettrici:

$$\begin{aligned}Q &= CV = 1.089 \cdot 10^{-9} \cdot 120 = 1.307 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\V_1 &= \frac{Q}{C_1} = \frac{1.307 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{2.433 \cdot 10^{-9}} = 53.7 \text{ V} \\E_1 &= \frac{V_1}{h} = 4.88 \text{ KV/m}\end{aligned} \quad (5.2)$$

L'energia elettrostatica iniziale vale:

$$U_I = \frac{1}{2} C_I V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.089 \cdot 10^{-9} \cdot 120^2 = 7.841 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (5.3)$$

Togliendo i dielettrici varia la capacità del sistema, mentre il generatore mantiene la tensione costante, e quindi varia l'energia accumulata:

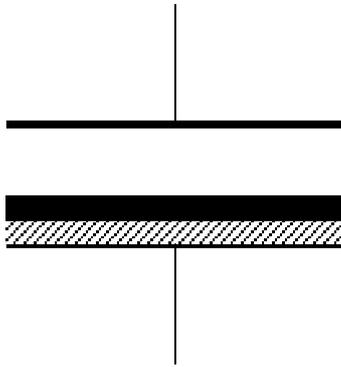
$$\begin{aligned}C_F &= \frac{\varepsilon_0 L^2}{2h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.2^2}{0.022} = 0.579 \text{ nF} \\U_F &= \frac{1}{2} C_F V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.58 \cdot 10^{-9} \cdot 120^2 = 4.171 \cdot 10^{-6} \text{ J} \\ \Delta U &= U_F - U_I = -3.67 \cdot 10^{-6} \text{ J}\end{aligned} \quad (5.4)$$

Problema 6.

Un condensatore piano di superficie quadrata $S=200 \text{ cm}^2$ e distanza tra le armature $h=5\text{mm}$ viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di $V_0=1000\text{V}$, e quindi isolato.

Successivamente viene introdotto un blocco a forma di parallelepipedo con la superficie della stessa forma e dimensione di quella del condensatore. Il blocco è costituito da due strati entrambi di altezza $h_1=1\text{mm}$, ma di materiale dielettrico con costante dielettrica $k=3$ il primo dal basso, e di materiale conduttore il secondo. Si chiede in tali condizioni:

1. La carica depositata sulle armature del condensatore
2. La capacità del condensatore
3. Il lavoro necessario ad estrarre il blocco



Soluzione:

La carica iniziale rimane invariata poiché il condensatore viene isolato:

$$Q = C_0 V = \frac{\epsilon_0 S V}{h} = 35.4 \cdot 10^{-9} \text{ C}, C_0 = 35.4 \text{ pF} \quad (6.1)$$

Il condensatore può essere visto come la somma di due condensatori in serie, con costanti dielettriche diverse:

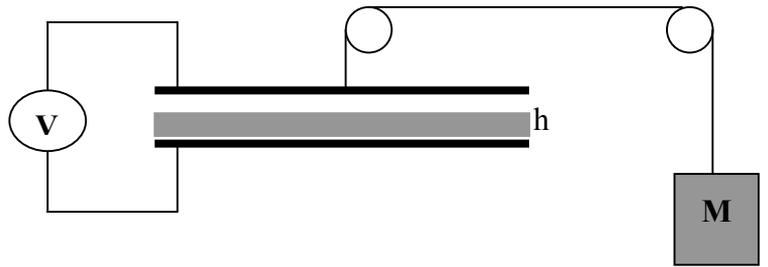
$$1/C = 1/C_a + 1/C_b, C_b = \frac{k \epsilon_0 S}{h_1} = 531 \text{ pF}, C_a = \frac{\epsilon_0 S}{h - 2h_1} = 59 \text{ pF}, C = 53.4 \text{ pF} \quad (6.2)$$

Il lavoro per estrarre il blocco è pari alla differenza tra l'energia accumulata nel condensatore senza e con il blocco inserito:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = 17.7 \mu\text{J}, E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 11.7 \mu\text{J}, W = 6 \mu\text{J} \quad (6.3)$$

Problema 7.

Due lastre metalliche piane, di superficie pari a 0.8 m^2 , sono affacciate alla distanza $h = 4\text{mm}$ e formano quindi un condensatore piano. Le due armature sono connesse ad un generatore di tensione con differenza di potenziale V . L'armatura inferiore è fissa, quella superiore è mantenuta in equilibrio meccanico da una massa $M = 0.8\text{Kg}$, come da figura. Inizialmente non vi è dielettrico tra le armature.



1. Calcolare, trascurando gli effetti di bordo, la capacità del condensatore.
2. Considerando trascurabili le masse delle lastre, della fune e della carrucola, calcolare la tensione V alla quale il sistema è in equilibrio.
3. Se tra le lastre viene successivamente inserito un dielettrico di spessore $d = 2\text{mm}$ e costante dielettrica relativa $k = 2.5$, calcolare la nuova capacità.
4. In questa nuova condizione, determinare se è variata, e di quanto, la forza tra le armature.

Soluzione

Il condensatore ha capacità pari a:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} = 1.77 \text{ nF} \quad (7.1)$$

La tensione deve bilanciare la forza di attrazione elettrostatica, che si calcola nota la pressione elettrostatica $P = \epsilon_0 E^2 / 2$:

$$F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \Sigma = \frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma = Mg = 7.95 \text{ N} \quad (7.2)$$

$$V = \sqrt{\frac{2h^2 Mg}{\epsilon_0 \Sigma}} = 5.95 \text{ KV}$$

Una volta inserito il dielettrico il condensatore si considera la serie di due condensatori:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h-d}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{d}{\epsilon_0 k \Sigma} \quad (7.3)$$

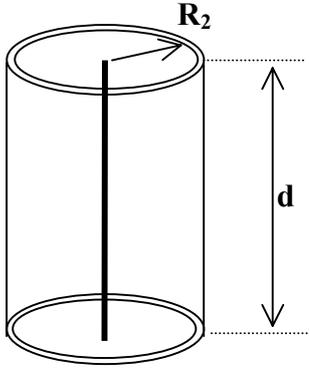
$$C = 2.53 \text{ nF}$$

A potenziale costante la carica aumenta al crescere della capacità, e quindi aumenta anche la forza:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma = \frac{Q^2}{2\Sigma\epsilon_0} = \frac{C^2 V^2}{2\Sigma\epsilon_0} = 14.1 \text{ N} \quad (7.4)$$

Problema 8.

Un elettrodo formato da un filo metallico di raggio $R_1 = 100\mu\text{m}$ è teso sull'asse di un cilindro conduttore cavo di raggio interno $R_2 = 11.0\text{mm}$. Il cilindro, lungo $d=10\text{ cm}$, è riempito di un gas con rigidità dielettrica pari a 2.2MV/m .



Considerando trascurabili gli effetti di bordo, determinare:

1. Il lavoro compiuto per caricare gli elettrodi fino a 1000V ;
2. La differenza di potenziale V_M che si può applicare tra i due elettrodi per non avere scariche nel gas.

Soluzione:

Il sistema è un condensatore cilindrico, che ha capacità pari a:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 1.18\text{pF} \quad (8.1)$$

Il lavoro fatto per caricarlo è pertanto:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = 0.59\mu\text{W} \quad (8.2)$$

Il campo elettrico all'interno del condensatore è quello di un filo rettilineo infinito con una densità di carica $\lambda = Q/d$:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (8.3)$$

Quindi E ha il valore più intenso sulla superficie del filo: $E_1 = \lambda/2\pi\epsilon_0 R_1$. Perché non ci siano scariche il campo elettrico massimo non dovrà superare i 2.2MV/m :

$$E_1 \leq E_{MAX} = 2.2\text{MV/m} \quad (8.4)$$

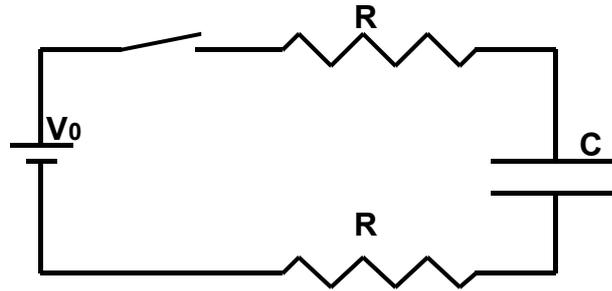
La differenza di potenziale ai capi del condensatore (integrale del campo elettrico) vale:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (8.5)$$

E' immediato quindi mettere in relazione la differenza di potenziale con il campo elettrico massimo, eliminando λ dalle (8.3) e (8.5). Si ottiene così la massima tensione applicabile al condensatore per non avere scariche:

$$\Delta V_{\max} = E_{\max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = 1034\text{V} \quad (8.6)$$

Problema 9.



Nel circuito in figura, con $V_0=100\text{V}$, $R=5\text{M}\Omega$, $C=10\mu\text{F}$, il condensatore è inizialmente scarico e l'interruttore è aperto. Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore):

1. L'energia dissipata su una delle resistenze R.
2. L'energia accumulata sul condensatore C.
3. L'energia fornita dal generatore.

Soluzione:

Si tratta della carica di un condensatore attraverso una resistenza totale pari a $2R$, quindi con la costante di tempo $\tau = 2RC$. La corrente durante la fase di carica vale:

$$i = \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{t}{2RC}} \quad (9.1)$$

e quindi l'energia dissipata su di una resistenza si calcola integrando la potenza Ri^2 nel tempo:

$$W = \int_0^{50} Ri^2 dt = \int_0^{50} R \frac{V_0^2}{4R^2} e^{-\frac{2t}{2RC}} dt = \frac{V_0^2}{4R} \int_0^{50} e^{-\frac{t}{RC}} dt = \left[-\frac{CV_0^2}{4} e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{50} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (9.2)$$

L'energia accumulata sul condensatore è pari a $CV^2/2$. Nota che negli istanti intermedi non vale la relazione che vede l'energia dissipata essere esattamente uguale a quella accumulata nel condensatore. Si tratta pertanto di calcolare quale è la tensione sul condensatore dopo 50 secondi di carica:

$$V_C = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) \quad (9.3)$$

$$W = \frac{1}{2} CV_C^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 \left(1 + e^{-\frac{50}{RC}} - 2e^{-\frac{50}{2RC}} \right) = 7.7 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad (9.4)$$

Alternativamente si può scrivere:

$$W = \int_0^{50} iV_C dt = \int_0^{50} \frac{V_0}{2R} \left(e^{-\frac{t}{2RC}} - e^{-\frac{2t}{2RC}} \right) dt \quad (9.5)$$

$$W = \frac{V_0^2}{2R} \int_0^{50} e^{-\frac{t}{2RC}} dt - \frac{V_0^2}{2R} \int_0^{50} e^{-\frac{t}{RC}} dt = \left[\frac{CV_0^2}{2} e^{-\frac{t}{2RC}} \right]_0^{50} - \left[CV_0^2 e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{50}$$

ottenendo lo stesso risultato. Infine, per l'energia fornita dal generatore, si dovrà scrivere:

$$W_{gen} = \int_0^{50} V_0 i dt = \int_0^{50} \frac{V_0^2}{2R} e^{-\frac{t}{2RC}} dt = \left[-CV_0^2 e^{-\frac{t}{2RC}} \right]_0^{50} = 3.93 \cdot 10^{-2} J \quad (9.6)$$

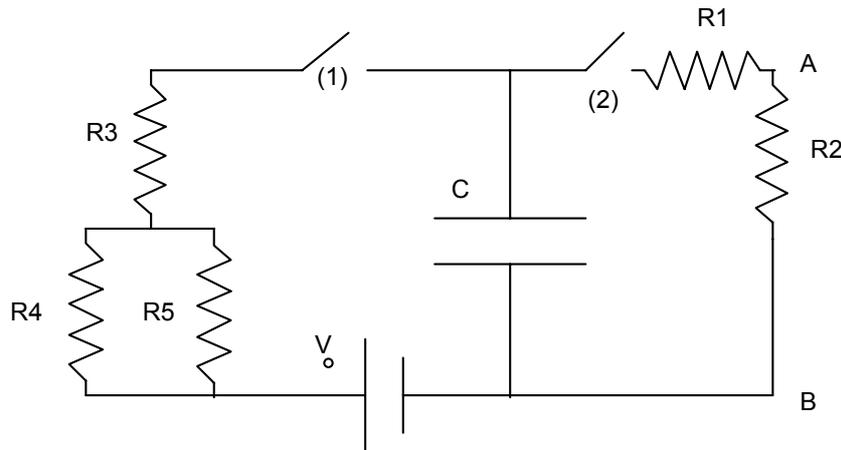
E' chiaro che varrà sempre la relazione $W_{GEN} = 2W_R + W_C$.

Problema 10.

Un condensatore piano di superficie $\Sigma = 1m^2$, le cui armature distano tra loro $d = 8.82mm$ si trova in vuoto ed è connesso ad un generatore di forza elettromotrice $V_0 = 10V$ attraverso un interruttore (1) che rimane chiuso solo per un tempo $t = 1\mu s$ e da 3 resistenze uguali $R_3 = R_4 = R_5 = 2K\Omega$, disposte come in figura.

Calcolare:

- 1) la tensione V e la carica Q del condensatore dopo il processo di carica
- 2) Il lavoro W fatto dal generatore durante la carica e l'energia elettrostatica U immagazzinata nella capacità
- 3) Il campo elettrico E nel condensatore



Il condensatore, così caricato, viene successivamente connesso tramite l'interruttore (2) ad un secondo circuito formato da 2 resistenze uguali $R_1 = R_2 = 1K\Omega$ e disposte come in figura.

Calcolare:

- 4) la corrente sulle 2 resistenze quando $t = 3.5\mu s$
- 5) la differenza di potenziale $V(A)-V(B)$ nell'istante $t = 3.5\mu s$
- 6) l'energia totale dissipata durante la scarica fino a $t = 3.5\mu s$
- 7) la potenza dissipata su ciascuna delle 2 resistenze quando $t = 3.5\mu s$

Soluzione:

La capacità del condensatore è:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} = 1nF \quad (10.1)$$

Poichè il ramo (2) del circuito è aperto, questo non entra nella fase di carica; la resistenza in fase di carica è:

$$R_{EQ} = R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 3K\Omega \rightarrow \tau_1 = R_{EQ} C = 3\mu s \quad (10.2)$$

Dopo $1\mu s$ il condensatore non è quindi completamente carico:

$$V_{C,1} = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) = 2.83V, Q_1 = C V_{C,1} = 2.83nC \quad (10.3)$$

Il lavoro fatto dal generatore, visto che attraverso di esso è fluita la carica Q_1 , è semplicemente:

$$W_{GEN} = Q_1 V_0 = 28.3 nJ \quad (10.4)$$

Mentre l'energia accumulata nella capacità è:

$$U_e = \frac{1}{2} C V_{C,1}^2 = \frac{Q_1^2}{2C} = 4 nJ \quad (10.5)$$

Nota bene che $W_{GEN} = Q_1 V_0 = C V_{C,1} V_0$ è diverso da $2U_e = C V_{C,1}^2$. Il campo elettrico nel condensatore vale:

$$E = \frac{V_{C,1}}{d} = 320.9 V / m \quad (10.6)$$

Durante la fase di scarica l'interruttore (1) è aperto mentre (2) è chiuso. Entrano quindi in gioco solo le resistenze R_1 e R_2 . Si avrà una nuova costante di tempo:

$$\tau_2 = (R_1 + R_2) C = 2 \mu s \quad (10.7)$$

e dopo un tempo $t = 3.5 \mu s$ varrà:

$$V_{C,2} = V_{C,1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}, i = \frac{V_{C,1}}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 246 \mu A \quad (10.8)$$

Nota la corrente, è immediato calcolare la differenza di tensione ai capi di una delle resistenze:

$$V_A - V_B = R_2 i = 246 mV \quad (10.9)$$

L'energia dissipata in questa fase del processo si può calcolare dalla variazione dell'energia accumulata nel condensatore:

$$E_{DISS} = \frac{1}{2} C V_{C,1}^2 - \frac{1}{2} C V_{C,2}^2 = \frac{1}{2} C V_1^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau_1}} \right) = 3.88 nJ \quad (10.10)$$

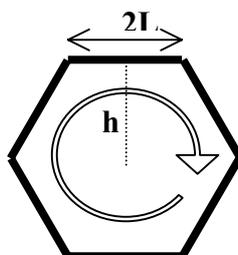
Infine la potenza dissipata sulla resistenza, nota la corrente all'istante t , vale:

$$P_1 = P_2 = R i^2 = 60 \mu W \quad (10.11)$$

Problema 11.

Una spira conduttrice, a forma di esagono regolare di lato $2L=20$ cm, è percorsa da una corrente $i=12$ A. Determinare:

1. la FEM necessaria a mantenere la corrente, sapendo che la spira è composta da un filo di rame di diametro $d=1$ mm
2. Il campo magnetico B generato al centro della spira.



Soluzione:

La resistenza del filo è proporzionale alla resistività ed alla lunghezza, ed inversamente proporzionale alla sezione:

$$R = \rho \frac{6 \cdot 2L}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1.67 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 0.2}{\pi \cdot 0.0005^2} = 25.5 m\Omega \quad (11.1)$$

Nota la corrente, dalla legge di Ohm si ricava la tensione ai capi della spira:

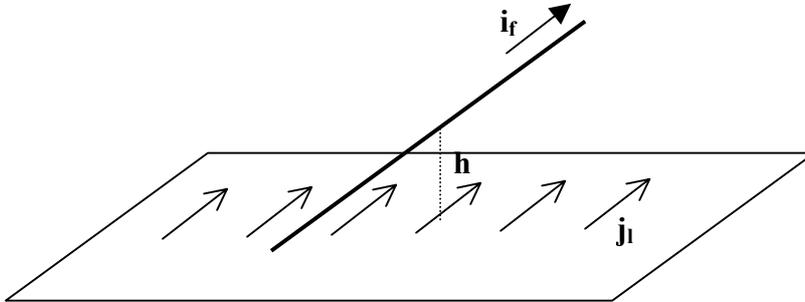
$$V = RI = 25.5 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 306 mV \quad (11.2)$$

E' noto il campo magnetico generato da un elemento di filo rettilineo, a distanza h dal centro del filo. I sei lati della spira producono al centro un campo magnetico (entrante nel foglio) che è la somma delle 6 componenti:

$$B = 6 \frac{\mu_0 i L}{2\pi h \sqrt{h^2 + L^2}} = \frac{\mu_0 6iL}{2\pi L \sqrt{3} \sqrt{3L^2 + L^2}} = \frac{\mu_0 6iL}{4\pi L^2 \sqrt{3}} \quad (11.3)$$
$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{3} i}{2\pi L} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{3} i}{2L} = 4.16 \cdot 10^{-5} T$$

Problema 12.

Una sottile lamina conduttrice infinita è percorsa da una densità di corrente $j_L=1.2\text{A/m}$. Lungo un filo rettilineo infinito, disposto parallelamente alla lamina ad una distanza $h=1.5\text{m}$, passa una corrente $i_F=2\text{A}$, nella stessa direzione e verso della corrente sulla lamina.



Calcolare:

1. La forza esercitata sul filo per unità di lunghezza.
2. La distanza y dalla lamina in cui il campo magnetico totale è nullo.

Soluzione:

È nota la formula per il campo magnetico generato da una lamina infinita percorsa da una densità di corrente ($B_L = \frac{\mu_0 j_L}{2}$). Poiché il campo magnetico generato dalla lamina è ortogonale al filo, la forza esercitata su un elementino di filo si può scrivere:

$$dF = i_F B_L ds \quad (12.1)$$

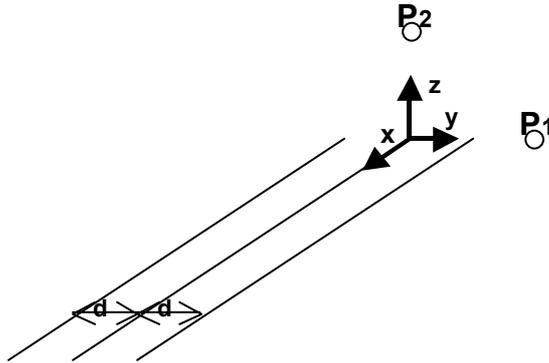
e quindi la forza per unità di lunghezza vale:

$$\frac{dF}{ds} = i_F B_L = \frac{\mu_0 j_L i_F}{2} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1.2 \cdot 2}{2} = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N/m} \quad (12.2)$$

I campi magnetici generati da filo ($B_F = \frac{\mu_0 i_F}{2\pi r}$) e lamina sono discordi tra filo e lamina, sono invece concordi al di sopra del filo, ed al di sotto della lamina. Il punto in cui si annullano sarà pertanto tra il filo e la lamina. Uguagliando i moduli dei campi, si ottiene:

$$B_L = \frac{\mu_0 j_L}{2} = \frac{\mu_0 i_F}{2\pi r} = B_F \rightarrow r = \frac{i_F}{\pi j_L} = 0.53\text{m} \quad (12.3)$$
$$y = h - r = 1.5 - 0.53 = 0.97\text{m}$$

Problema 13.



Tre conduttori rettilinei paralleli e di lunghezza infinita giacciono sullo stesso piano xy , con il conduttore centrale che coincide con l'asse x . La distanza tra i conduttori contigui è $d=10$ cm. Il conduttore centrale è percorso da una corrente costante $i_1=1$ A, nel verso delle x crescenti, mentre i due conduttori laterali sono percorsi ciascuno da una corrente $i_2=5/4$ A nel verso opposto. Determinare:

1. Il campo magnetico generato dai conduttori nel punto P_1 di coordinate $(0,2d,0)$.
2. Il campo magnetico generato dai conduttori nel punto P_2 di coordinate $(0,0,2d)$.
3. La forza per unità di lunghezza agente sul conduttore centrale.

Soluzione:

Il campo magnetico in P_1 ha sole componenti z , positiva quella generate dal filo centrale e negative le altre due:

$$B_z = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(d)} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(3d)} = -\frac{7}{12} \frac{\mu_0}{\pi d} = -2.3 \cdot 10^{-6} T \quad (13.1)$$

$$B_x = B_y = 0$$

Invece in P_2 il capo generato dal filo centrale è orizzontale (in direzione $-y$), gli altri hanno sia componenti y che z , essendo tangenti a circonferenze centrate sui fili. Le componenti z hanno peraltro somma nulla:

$$B_y = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 i_2 \cos \vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2d)} + \frac{2\mu_0 i_2 \frac{2}{\sqrt{5}}}{2\pi(\sqrt{5}d)} = -\frac{\mu_0}{4\pi d} + \frac{2\mu_0}{4\pi d}$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi d} = 10^{-6} T \quad (13.2)$$

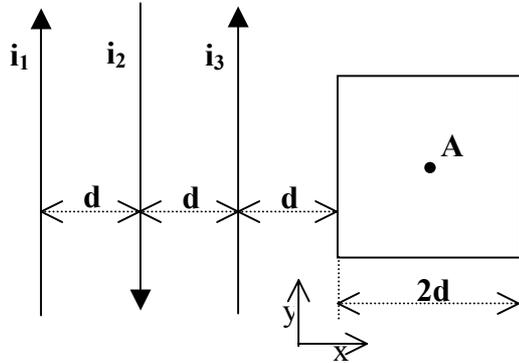
$$B_x = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 i_2 \sin \vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} - \frac{\mu_0 i_2 \sin \vartheta}{2\pi(\sqrt{5}d)} = 0$$

La forza sul conduttore centrale non può che essere nulla data la simmetria del problema.

Problema 14.

Tre fili conduttori rettilinei paralleli e nello stesso piano sono disposti a distanza $d=10\text{cm}$. Una spira quadrata di lato $L=20\text{cm}$ giace nel piano dei fili, anch'essa a distanza $d=10\text{cm}$ (vedi figura). La spira ha una resistenza R . I tre fili sono percorsi dalle correnti i_1, i_2, i_3 definite nella figura.



$$i_1 = 100A$$

$$i_2 = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ con } i_0 = 300A \text{ e } \tau = 10s$$

$$i_3 = 200A$$

$$d = 10\text{cm}$$

$$L = 2d = 20\text{cm}$$

Calcolare:

1. Il campo magnetico nel punto A (centro spira) dovuto ai tre fili al tempo $t=0$.
2. La forza per unità di lunghezza sul filo 3, al tempo $t=0$ (l'apporto della spira è trascurabile).
3. La resistenza della spira, sapendo che al tempo $t=0$ la corrente indotta vale $i_s = 5.5 \times 10^{-7}A$.
4. La carica che è circolata nella spira da $t=0$ a $t=\infty$
5. La risultante delle forze sulla spira a $t=\infty$

Soluzione:

Consideriamo l'asse z uscente dal foglio. Le correnti sui fili 1 e 3 generano un campo magnetico entrante, quelle sul filo 2 un campo uscente dal foglio. Il campo magnetico in A è dato da:

$$B_A = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi 4d} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi 3d} - \frac{\mu_0 i_3}{2\pi 2d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{4i_2 - 3i_1 - 6i_3}{12d} \right) \vec{u}_z \quad (14.1)$$

$$B_A = 2 \cdot 10^{-7} \left(\frac{1200 - 300 - 1200}{1.2} \right) = -5 \cdot 10^{-5} T \vec{u}_z$$

Per calcolare la forza sul filo 3 è necessario calcolare il campo sul filo, generato da 1 e 2 (il testo dell'esercizio afferma che il campo magnetico generato dalle correnti indotte sulla spira è trascurabile a questo riguardo).

$$B_3 = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi 2d} \vec{u}_z + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{2i_2 - i_1}{2d} \right) \vec{u}_z \quad (14.2)$$

$$B_3 = 2 \cdot 10^{-7} \left(\frac{600 - 100}{0.2} \right) = 5 \cdot 10^{-4} T \vec{u}_z$$

La forza sul filo, ortogonale al filo ad al campo, è data quindi da:

$$\vec{F}_3 = \vec{i}_3 \times \vec{B}_3 = i_3 B_3 \vec{u}_x = 200 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0.1 \frac{N}{m} \vec{u}_x \quad (14.3)$$

L'unico campo magnetico variabile è quello generato dal filo 2, solo questo contribuisce alla variazione del flusso attraverso la spira e quindi alla FEM indotta. I campi dovuti ai fili 1 e 3 si possono quindi omettere. E' importante notare che il campo magnetico varia attraverso la spira, il flusso va quindi calcolato come integrale sulla spira:

$$\phi(B_2) = 2d \int_{2d}^{4d} \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} dr = \frac{2d \mu_0 i_2 \ln(2)}{2\pi} \quad (14.4)$$

La FEM sulla spira si calcola dalla legge di Faraday-Lenz: $FEM = -\frac{d\phi_B}{dt}$, ed infine, nota la corrente indotta, la resistenza sarà:

$$R = -\frac{1}{i_s} \frac{d\phi}{dt} = \frac{2d \mu_0 i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \ln(2)}{2\pi i_s \tau} = \frac{2 \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot \ln(2)}{5.5 \cdot 10^{-7} \cdot 10} = 1.5 \Omega \quad (14.5)$$

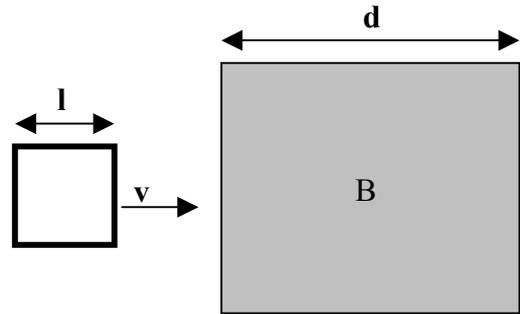
La carica che e' circolata nella spira può essere calcolata integrando la corrente indotta sulla spira nel tempo. L'andamento temporale della FEM indotta, e quindi anche della corrente indotta, è pari a $e^{-\frac{t}{\tau}}$, essendo noto il valore iniziale della corrente è immediato scrivere $i_s(t) = i_s(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Si ottiene:

$$Q = \int_0^{\infty} i_{s0} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau i_{s0} = 5.5 \cdot 10^{-6} C \quad (14.6)$$

In alternativa, noto il flusso iniziale, ed osservando che per $t \rightarrow \infty$ il flusso si annulla (sempre omettendo i termini costanti dovuti ai fili 1 e 3) si può utilizzare la legge di Felici. Infine, visto l'andamento esponenzialmente decrescente della corrente i_2 , per $t \rightarrow \infty$ la corrente indotta sulla spira si annulla, e quindi anche la forza sulla spira vale $F=0$.

Problema 15.

Una spira quadrata rigida, di lato $l = 12 \text{ cm}$ e resistenza $R = 25 \text{ Ohm}$, viene trascinata con velocità orizzontale, che rimane sempre costante, $v=3 \text{ m/s}$. La spira entra in una zona di larghezza $d>h$ in cui vi è un campo magnetico $B = 4.5 \text{ T}$, ortogonale alla spira ed entrante nel piano del disegno.



Determinare:

1. Il verso della corrente indotta nella spira nelle varie fasi del moto.
2. In quali regioni agisce una forza sulla spira, il suo verso ed intensità.
3. L'energia totale dissipata nella resistenza dopo che la spira è completamente uscita dalla zona con campo magnetico.
4. Quale è la carica che globalmente ha fluito lungo la spira.

Soluzione

La corrente indotta dovrà generare un campo magnetico opposto a quello dato quando la spira sta entrando (per opporsi all'aumento di flusso) e di verso opposto quando la spira esce. Quindi il verso è antiorario prima e orario poi, la corrente indotta vale:

$$i = \frac{Blv}{R} \quad (15.1)$$

La forza agisce quando la spira entra ed esce, sempre opposta alla velocità:

$$\vec{F} = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \vec{u}_v = 35 \text{ mN} \quad (15.2)$$

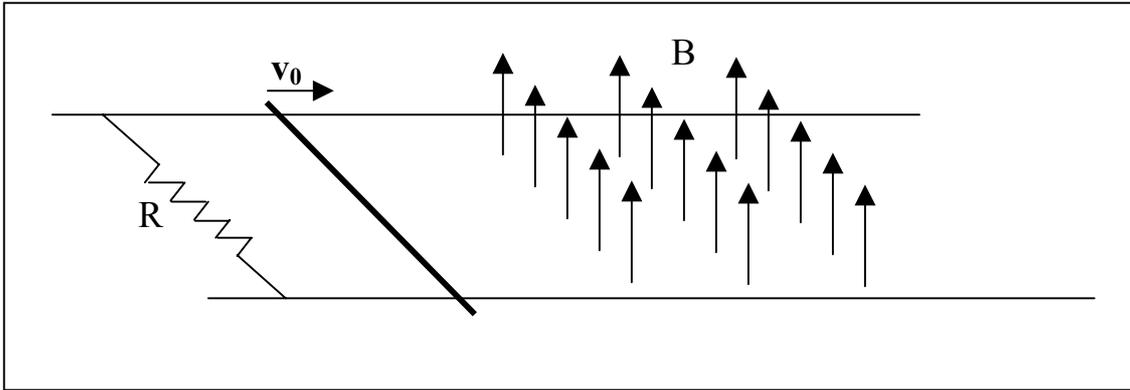
L'energia dissipata è uguale al lavoro fatto dalle forze esterne che bilanciano la forza (15.2) per mantenere costante la velocità:

$$W = -2\vec{F} \cdot \vec{h} = 2 \frac{B^2 l^2 v}{R} h = 8.4 \text{ mJ} \quad (15.3)$$

Il flusso di B iniziale e finale sono nulli (spira fuori dal campo magnetico) e perciò, secondo la legge di Faraday, l'integrale della carica è uguale a 0.

Problema 16.

Una sbarretta conduttrice di massa $m=5g$ e di lunghezza $l=25cm$ scorre liberamente su due binari orizzontali ai quali è elettricamente connessa. I due binari sono connessi tra di loro da una resistenza $R=15\Omega$. Per un tratto di lunghezza $L=40cm$ i binari sono attraversati da un campo magnetico $B=2.5T$ diretto verticalmente. La sbarretta arriva al tempo $t=0$ nella zona con campo magnetico con una velocità $v_0=2.5m/s$.



1. Quanta corrente fluisce nella barretta subito dopo tale istante?
2. Quanta carica è fluita nel circuito sbarretta-rotaie-resistenza quando la sbarretta esce dalla zona con campo magnetico?
3. Quale è la velocità di uscita della barretta?

Soluzione:

La FEM generata nel circuito è pari a Bv_0l , pertanto la corrente indotta è:

$$I_0 = \frac{Blv_0}{R} = 0.104A \quad (16.1)$$

Quando la sbarra ha superato la zona con campo magnetico, il flusso di B attraverso il circuito è variato di una quantità $\Delta\phi = L \cdot l \cdot B$. Utilizzando la legge di Faraday si ottiene:

$$Q_{TOT} = \left| \frac{\Delta\phi}{R} \right| = 0.017C \quad (16.2)$$

La forza di frenamento che agisce sulla barretta vale:

$$F = m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} v \quad (16.3)$$

che è pertanto funzione della velocità. Conviene scrivere la forza in funzione della posizione:

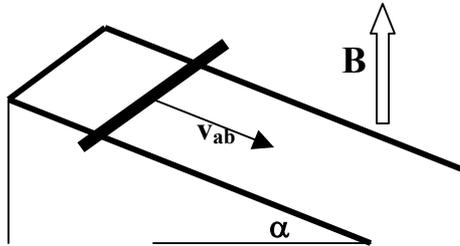
$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -\frac{B^2 l^2}{R} v \\ \frac{dv}{dx} &= -\frac{B^2 l^2}{mR} \\ v &= v_0 - \frac{B^2 l^2}{mR} x \end{aligned} \quad (16.4)$$

La velocità di uscita si ottiene quando la sbarretta ha percorso tutta la zona ove è presente il campo magnetico: $v_L = v_0 - \frac{B^2 l^2}{mR} L = 0.42 m / s$.

Problema 17.

In un piano inclinato di angolo $\alpha=30^\circ$ sono poste due rotaie parallele, distanti $l=10\text{cm}$, di resistenza elettrica trascurabile e connesse elettricamente tra loro alla sommità. Su di esse può scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice ab , di massa $m=10\text{g}$ e resistenza elettrica $R=0.1\Omega$. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, diretto verticalmente, di modulo $B=0.5\text{T}$. Ad un certo istante la sbarretta ab viene lasciata libera di scivolare lungo il piano inclinato. Calcolare:

1. La forza elettromotrice indotta nella sbarretta ab , e a corrente indotta nella spira individuata dal sistema rotaie-sbarretta, in funzione della velocità della sbarretta.
2. La velocità limite (se esiste) della sbarretta nel suo moto di scivolamento.



Soluzione:

Il moto di discesa della sbarretta determina una variazione di flusso del campo magnetico attraverso la spira, e quindi una FEM indotta. Nel calcolo del flusso occorre osservare che il campo magnetico non è normale al piano della spira:

$$\phi_B = lBx \cos \alpha \rightarrow FEM = -\frac{d\phi_B}{dt} = lBv \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{40}v = -0.0433v[V] \quad (17.1)$$

La corrente indotta (si trascurano come usuale gli effetti di autoinduzione) è pertanto:

$$i = \frac{FEM}{R} = -\frac{\sqrt{3}}{4}v[A] \quad (17.2)$$

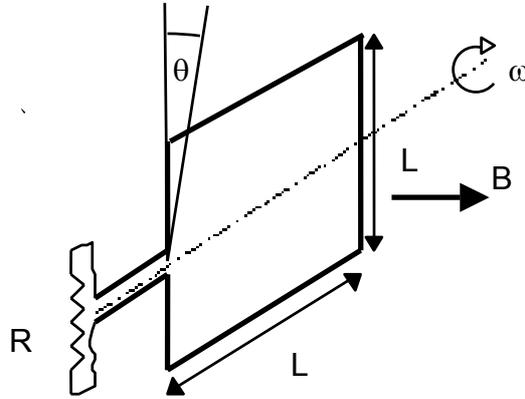
La velocità limite si otterrà quando la componente lungo il piano della forza di frenamento elettromagnetico bilancerà la componente lungo il piano della forza peso:

$$ma = mg \sin \alpha + ilB \cos \alpha = 0 \rightarrow mg \sin \alpha = \frac{l^2 B^2 v_{\text{lim}} \cos^2 \alpha}{R} \quad (17.3)$$

$$v_{\text{lim}} = \frac{gmR}{l^2 B^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 3.03 \text{ m/s}$$

Problema 18.

Una spira di forma quadrata di lato $L=1\text{m}$ ruota attorno ad un asse orizzontale con una velocità angolare $\omega = 2\pi \text{ rad/sec}$ (vedi figura). La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $B=2\text{Tesla}$ diretto lungo l'asse z , ortogonale all'asse della spira. La spira, di resistenza trascurabile è connessa ad una resistenza di carico $R=0.2 \Omega$.



Calcolare:

1. La corrente che circola nella spira in funzione del tempo.
2. Il momento massimo che agisce sulla spira.
3. L'energia dissipata sulla resistenza in 10 secondi.
4. La carica (in modulo) che circola nella spira in 10 secondi.

Soluzione

Il flusso di B attraverso la spira è $\Phi(B) = BL^2 \cos(\alpha) = BL^2 \cos(\omega t)$. La corrente indotta è pertanto:

$$i = \frac{FEM}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = \frac{\omega B L^2 \sin \omega t}{R} = 62.83 \cdot \sin(2\pi t) \quad (18.1)$$

Ricordiamo che il lavoro fatto dal momento che agisce sulla spira è $dW = Md\vartheta$, e quindi la potenza spesa è pari a $M \frac{d\vartheta}{dt} = M\omega$. Poiché la potenza si ritrova in potenza elettrica (spesa sulla resistenza) si scriverà:

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{Ri^2}{\omega} = \frac{\omega B^2 L^4 \sin^2 \omega t}{R} \quad M_{\max} = \frac{\omega B^2 L^4}{R} = 125.6 \text{ Nm} \quad (18.2)$$

L'energia dissipata è l'integrale della potenza nei 10 secondi. L'integrale di $\sin^2(\omega t)$ in un periodo è pari a $T/2$, e poiché il periodo di rotazione della spira è di un secondo vale:

$$W = \int_0^{10} Ri^2 dt = \frac{\omega^2 B^2 L^4}{R} \int_0^{10} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\omega^2 B^2 L^4}{R} \cdot 5 = 3.95 \text{ KJ} \quad (18.3)$$

In assoluto, dopo un numero intero di giri la carica totale che è circolata è nulla. Dalla legge di Faraday, visto che il moto è periodico e quindi il flusso finale è uguale a quello iniziale:

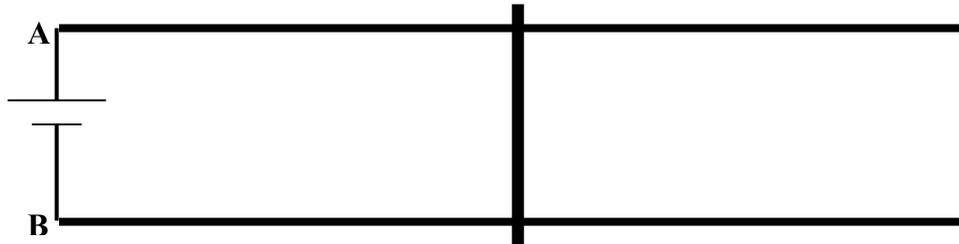
$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = 0 \quad (18.4)$$

Il problema intende però chiedere quale è il la somma delle cariche fluite, prese in valore assoluto. Ogni mezzo giro, il flusso si inverte, quindi usando ancora Felici si può scrivere:

$$Q = 10 \cdot \left(\left| \frac{Bl^2 - (-Bl^2)}{R} \right| + \left| \frac{(-Bl^2) - Bl^2}{R} \right| \right) = 40 \frac{Bl^2}{R} = 400C \quad (18.5)$$

Problema 19.

Una barra conduttrice, di massa $m=100\text{g}$ e resistenza $R=500\Omega$, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l=40\text{cm}$ e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B=0.8\text{T}$, perpendicolare ai binari ed alla barra (entrante nel foglio, vedi figura). All'istante $t=0$ la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore ($V_A-V_B>0$).



Se il generatore fornisce una corrente costante $i_0=0.2\text{A}$ calcolare:

1. In che direzione si muove la sbarra
2. La velocità della sbarra al tempo $t_1=15\text{s}$
3. Il lavoro fatto dal generatore fino al tempo t_1

Se invece il generatore fornisce una FEM costante pari a $V_0=8\text{V}$ calcolare

4. La velocità limite della sbarra
5. La potenza fornita dal generatore alla velocità limite

Soluzione:

La corrente gira in senso orario, quindi è diretta verso il basso lungo la barretta mobile. Il campo magnetico è entrante nel foglio, e quindi la forza $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ è diretta verso destra. A corrente costante la forza è costante, e quindi si tratta di un moto uniformemente accelerato:

$$F = ilB = m \frac{dv}{dt} \rightarrow v = \frac{ilB}{m} t = \frac{0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.8}{0.1} 15 = 9.6 \text{ m/s} \quad (19.1)$$

Il lavoro fatto dal generatore sarà pari all'energia cinetica acquistata dalla sbarretta, più l'energia dissipata sulla resistenza. Essendo la corrente costante, la potenza dissipata è costante (Ri^2), si otterrà:

$$W = Ri^2 t + \frac{1}{2} mv^2 = 305 \text{ J} \quad (19.2)$$

Se invece di una corrente costante il generatore fornisce una tensione costante, il moto non sarà più uniformemente accelerato poiché al crescere della velocità della sbarretta cresce la FEM indotta nel circuito. La FEM indotta è pari a:

$$FEM = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -lB \frac{dx}{dt} = -lBv \quad (19.3)$$

La velocità limite si avrà quando la FEM indotta raggiunge la tensione del generatore, da quel momento infatti non circola più corrente nel circuito, e quindi la sbarretta non è più soggetta a forze esterne:

$$V_0 - v_{LIM} lB = 0 \rightarrow v_{LIM} = \frac{V_0}{lB} = \frac{8}{0.4 \cdot 0.8} = 25 \text{ m/s} \quad (19.4)$$

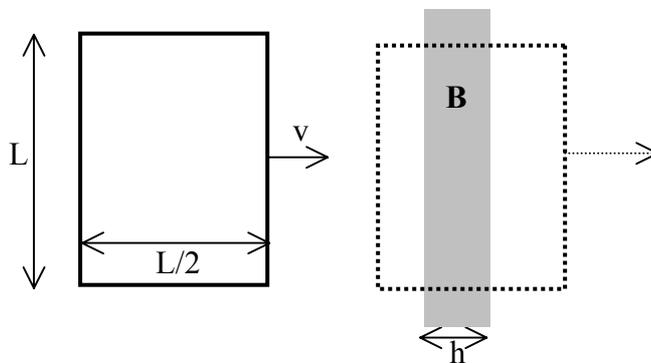
Alla velocità limite non circola più corrente, quindi la potenza fornita dal generatore è:

$$P_{GEN} = V_0 i = 0 \quad (19.5)$$

Problema 20.

Una spira rettangolare di altezza $L=160\text{cm}$ e larghezza $L/2$ si muove con velocità costante $v=12\text{m/s}$, entra in una regione in cui è presente un campo magnetico $B=6\text{T}$, ortogonale alla spira, la attraversa completamente ed esce. La regione con campo magnetico è profonda $h=30\text{cm}$. Determinare:

1. La corrente indotta mentre la spira entra nella regione con campo magnetico, se la resistenza è $R=20\Omega$.
2. Il lavoro fatto dalla forza che trascina la spira fino che questa è uscita completamente.
3. Il valore assoluto della carica che ha percorso la spira quando la spira è a cavallo della regione con campo magnetico.



Soluzione:

La forza motrice indotta, calcolabile dalla variazione del flusso, vale:

$$FEM = vBL \quad (20.1)$$

La corrente indotta è quindi:

$$i = \frac{FEM}{R} \rightarrow i = \frac{vBL}{R} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 1.6}{20} = 5.76\text{A} \quad (20.2)$$

La forza che agisce sulla spira, quando vi è variazione di flusso e quindi corrente indotta, è:

$$F = iBL = \frac{vB^2L^2}{R} \quad (20.3)$$

Essa agisce essenzialmente sul ramo verticale della spira che si trova immerso nel campo magnetico. Ciò avviene due volte, quando il primo dei tratti verticali entra nel campo magnetico e quando il secondo ne esce. In tutte le altre posizioni (spira a sinistra o a destra della regione con campo magnetico, ed anche spira a cavallo della stessa regione) il flusso di B è costante e non vi né FEM indotta né forza. La forza fa perciò lavoro per due tratti di lunghezza pari ad h :

$$W = 2 \cdot Fh = \frac{2vB^2L^2}{R} h = \frac{2 \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 1.6^2 \cdot 0.3}{20} = 33.178\text{J} \quad (20.4)$$

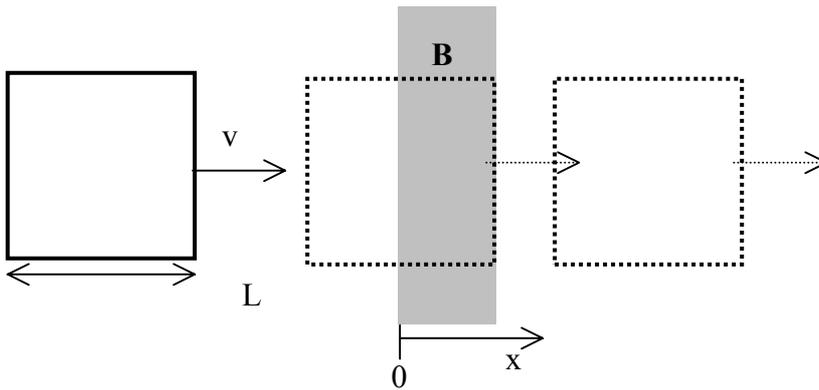
La carica si calcola con la legge di Faraday, dalla variazione di flusso:

$$Q = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} \right| = \left| \frac{0 - BhL}{R} \right| = \frac{6 \cdot 0.3 \cdot 1.6}{20} = 0.144\text{C} \quad (20.5)$$

Problema 21.

Una spira quadrata di lato $L=120\text{cm}$ si muove con velocità costante $v=10\text{m/s}$, entra in una regione in cui è presente un campo magnetico $B=Kx$, con $K=11\text{T/m}$, ortogonale alla spira, la attraversa completamente ed esce. La regione con campo magnetico è lunga la metà della spira ($h=60\text{cm}$). Determinare:

1. La resistenza della spira se la corrente indotta quando il primo lato della spira ha percorso completamente la zona con campo magnetico ($x=60\text{cm}$) è di 1.2A .
2. Il lavoro totale fatto dalla forza che trascina la spira.
3. Il valore totale della carica che ha percorso la spira dopo che questa è uscita.



Soluzione:

Il problema è analogo al precedente, con la differenza che il campo magnetico non è costante, pertanto la FEM indotta dipende dalla posizione della spira. In ogni caso l'unico tratto su cui si genera una differenza di potenziale è quello verticale quando transita all'interno del campo magnetico ($\Delta V = vBL$). Perciò:

$$FEM = vBL = vkxL \quad (21.1)$$

Nella posizione indicata nella domanda ($x = h$) si ottiene pertanto:

$$i = \frac{FEM}{R} \rightarrow R = \frac{vkhL}{i} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 0.6 \cdot 1.2}{1.2} = 66\Omega \quad (21.2)$$

Nell'espressione della forza, sia la corrente indotta che il campo magnetico dipendono da x :

$$F = iBL = \frac{vkxL \cdot kx \cdot L}{R} = \frac{vk^2 L^2 x^2}{R} \quad (21.3)$$

e pertanto

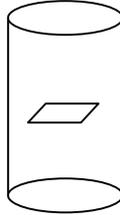
$$W = 2 \int_0^h \frac{vk^2 L^2 x^2}{R} dx = \frac{2vk^2 L^2 h^3}{3R} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 11^2 \cdot 1.2^2 \cdot 0.6^3}{3 \cdot 66} = 38\text{J} \quad (21.4)$$

Infine, il flusso finale (dopo che la spira è uscita completamente) è nullo come quello iniziale. Dalla legge di Faraday:

$$Q = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = 0 \quad (21.5)$$

Problema 22.

Un solenoide superconduttore (\rightarrow di resistenza nulla) cilindrico, di altezza $h=10\text{m}$ e di raggio $r=2.5\text{cm}$, è costruito con $n=1000$ spire per metro. Il rapporto lunghezza/diametro è tale che il campo B nel solenoide può essere considerato con ottima approssimazione quello di un solenoide infinito. Il solenoide viene acceso con una corrente $i=i_0t$, con $i_0=12\text{ A/s}$, fino a raggiungere la corrente di 120 A .



Calcolare:

1. La FEM del generatore necessaria a fornire la corrente i al solenoide
2. L'energia fornita in totale dal generatore

All'interno del solenoide è posta una piccola spira quadrata di lato $l=1.3\text{cm}$, giacente in un piano ortogonale all'asse del solenoide, di resistenza $R=0.004\ \Omega$. L'effetto di questa piccola spira è del tutto trascurabile per le risposte ai punti 1 e 2.

Determinare:

1. Il coefficiente di mutua induzione spira-solenoide
2. La corrente indotta nella spira durante l'accensione del solenoide
3. La carica che ha circolato nella spira in tutto il processo
4. L'energia dissipata in totale nella spira

Soluzione:

Si può utilizzare l'approssimazione a solenoide infinito per calcolare l'induttanza del solenoide:

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h = \mu_0 n^2 \pi r^2 \cdot h = 24.74\text{mH} \quad (22.1)$$

Nota l'induttanza, la FEM è direttamente calcolabile con la legge di Faraday-Lenz:

$$FEM = L \frac{di}{dt} = \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h \cdot i_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 \cdot \pi \cdot 0.025^2 \cdot 10 \cdot 12 = 297\text{mV} \quad (22.2)$$

L'energia fornita dal generatore è pari all'energia magnetica accumulata nel solenoide (nota che non vi è energia dissipata essendo nulla la resistenza):

$$E_G = \int_0^t P dt = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h \cdot i^2 \quad (22.3)$$

$$E_G = \frac{1}{2} 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 \cdot \pi \cdot 0.025^2 \cdot 10 \cdot 120^2 = 178\text{J}$$

Il coefficiente di mutua induzione è facilmente calcolabile considerando che il campo magnetico generato dal solenoide è costante sulla superficie della spira:

$$M = \frac{\phi}{i} = \frac{\mu_0 n i l^2}{i} = \mu_0 n l^2 = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 0.013^2 = 2.1 \cdot 10^{-7}\text{ H} \quad (22.4)$$

Conoscendo il flusso del campo magnetico che attraversa la spira, la corrente indotta ne segue direttamente (trascurando come usuale l'autoinduzione della spira):

$$i_s = \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d(\mu_0 n i_0 t l^2)}{dt} = \frac{\mu_0 n i_0 l^2}{R} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 12 \cdot 0.013^2}{0.004} = 0.64 \text{ mA} \quad (22.5)$$

La carica che ha circolato nella spira si può calcolare direttamente dalla corrente indotta, essendo questa costante:

$$Q = i_s t = 6.4 \text{ mC} \quad (22.6)$$

In alternativa utilizzando la legge di Faraday:

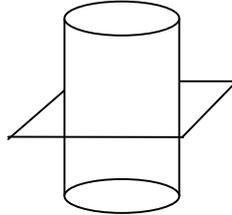
$$Q = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{\mu_0 n i_0 t l^2}{R} = 6.4 \text{ mC} \quad (22.7)$$

Infine l'energia dissipata si ricava dalla potenza dissipata, anch'essa costante:

$$E_s = R i_s^2 t = 0.004 \cdot (0.64 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 = 1.64 \cdot 10^{-8} \text{ J} \quad (22.8)$$

Problema 23.

Un solenoide superconduttore (\rightarrow di resistenza nulla) cilindrico, di altezza $h=12\text{m}$ e di raggio $r=3\text{cm}$, è costruito con $n=500$ spire per metro. Il rapporto lunghezza/diametro è tale che il campo B nel solenoide può essere considerato con ottima approssimazione quello di un solenoide infinito. Il solenoide viene acceso con una corrente $i=i_0t$, con $i_0=18\text{ A/s}$, fino a raggiungere la corrente di 360 A .



Calcolare:

1. La FEM del generatore necessaria a fornire la corrente i al solenoide
2. L'energia fornita in totale dal generatore

All'esterno del solenoide è posta una piccola spira quadrata, giacente in un piano ortogonale all'asse del solenoide, di resistenza $R=0.006\ \Omega$. L'effetto di questa piccola spira è del tutto trascurabile per le risposte ai punti 1 e 2.

Determinare:

1. Il coefficiente di mutua induzione spira-solenoide
2. La corrente indotta nella spira durante l'accensione del solenoide
3. La carica che ha circolato nella spira in tutto il processo
4. La potenza dissipata nella spira

Soluzione:

Il problema è del tutto analogo al precedente, a cui rimandiamo per i commenti alla soluzione:

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h = 10\text{mH} \quad (23.1)$$
$$FEM = L \frac{di}{dt} = \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h \cdot i_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 \cdot \pi \cdot 0.03^2 \cdot 12 \cdot 18 = 192\text{mV}$$

$$E_G = \int_0^t P dt = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma \cdot h \cdot i^2 \quad (23.2)$$

$$E_G = \frac{1}{2} 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 \cdot \pi \cdot 0.03^2 \cdot 12 \cdot 360^2 = 693\text{J}$$

In questo caso il campo magnetico è presente solo all'interno del solenoide, nel calcolo del flusso concatenato alla spira va quindi considerata solo la superficie di intersezione tra la spira ed il solenoide:

$$M = \frac{\phi}{i} = \frac{\mu_0 n i \Sigma}{i} = \mu_0 n \Sigma = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot \pi \cdot 0.03^2 = 1.78 \cdot 10^{-6}\text{H} \quad (23.3)$$

$$i_s = \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d(\mu_0 n i_0 t \Sigma)}{dt} = \frac{\mu_0 n i_0 \Sigma}{R} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 18 \cdot \pi \cdot 0.03^2}{0.006} = 5.3\text{mA} \quad (23.4)$$

$$Q = i_s t = 107 \text{ mC}$$
$$Q = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{\mu_0 n i_0 t \Sigma}{R} = 107 \text{ mC} \quad (23.5)$$

$$P_s = R i_s^2 = 0.006 \cdot (5.3 \cdot 10^{-3})^2 = 1.68 \cdot 10^{-7} \text{ W} \quad (23.6)$$

Problema 24.

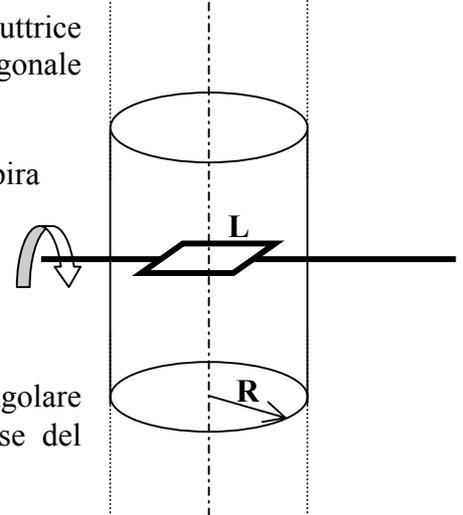
Un solenoide infinito ha raggio $R=15$ cm e numero di spire per unità di lunghezza $n=1200$ spire/m.

1. Determinare la corrente i_0 necessaria a generare nel solenoide un campo magnetico $B_0=0.12$ T

All'interno del solenoide è disposta una piccola spira conduttrice quadrata, di lato $L=5$ cm, inizialmente disposta in un piano ortogonale all'asse del solenoide.

2. Calcolare il coefficiente di mutua induzione solenoide-spira
3. Se la resistenza della spira è $R=12\Omega$, determinare la carica che ha percorso la spira nel processo di accensione del solenoide fino al raggiungimento del campo B_0

Successivamente la spira viene fatta ruotare con velocità angolare costante $\omega=600$ rad/s, attorno al suo asse, ortogonale all'asse del solenoide.



4. Calcolare la FEM massima indotta nella spira.
5. Determinare la potenza media dissipata sulla spira.

Soluzione:

Il campo magnetico in un solenoide infinito è noto:

$$B = \mu_0 n i_0 \rightarrow i_0 = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{0.12}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1200} = 79.6 A \quad (24.1)$$

Essendo il campo costante all'interno del solenoide, è immediato calcolarne il flusso attraverso la spira e quindi il coefficiente di mutua induzione:

$$\Phi = BL^2 = \mu_0 n i_0 L^2$$
$$M = \frac{\Phi}{i_0} = \mu_0 n L^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1200 \cdot 0.05^2 = 3.77 \cdot 10^{-6} H \quad (24.2)$$

L'accensione del solenoide genera una corrente indotta nella spira, la carica totale si calcola con la legge di Felici:

$$|Q| = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{BL^2}{R} = \frac{0.12 \cdot 0.05^2}{12} = 2.5 \cdot 10^{-5} C \quad (24.3)$$

La spira ruota nel campo magnetico costante generato dal solenoide, il flusso del campo magnetico attraverso la spira varia sinusoidalmente, e così la corrente indotta:

$$\Phi = BL^2 \cos(\omega t)$$
$$FEM = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = BL^2 \omega \sin(\omega t) \rightarrow FEM_{MAX} = BL^2 \omega = 0.12 \cdot 0.05^2 \cdot 600 = 0.18 V \quad (24.4)$$

La potenza istantanea dissipata nella spira è:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{B^2 L^4 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{R} \quad (24.5)$$

La potenza media si calcola ricordando che il valor medio di $\text{sen}^2\alpha$ è pari a $1/2$:

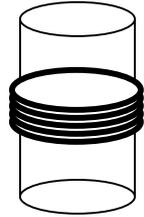
$$P_M = \frac{B^2 L^4 \omega^2}{2R} = \frac{0.12^2 \cdot 0.05^4 \cdot 600^2}{2 \cdot 12} = 1.35 \cdot 10^{-3} W \quad (24.6)$$

Problema 25.

Un solenoide di altezza $h=2\text{m}$ e diametro $2r=10\text{cm}$ e' percorso da una corrente variabile $i_s=i_0\cos(\omega t)$, con $i_0=10\text{ A}$ e $\omega=2\pi\cdot 100\text{ s}^{-1}$. Il solenoide, costituito da $n=2800$ spire/metro, ha resistenza trascurabile; il campo magnetico è approssimabile a quello di un solenoide infinito

Calcolare:

1. Il campo magnetico di picco B_0 all'interno del solenoide
2. L'induttanza L del solenoide
3. L'ampiezza V_0 della forza elettromotrice sinusoidale necessaria a generare la corrente i_s
4. L'energia massima immagazzinata nel solenoide



Attorno al solenoide sono avvolte altre 10 spire di rame, di resistenza totale $R=120\Omega$. Calcolare:

5. Il coefficiente di mutua induzione M spire-solenoide
6. L'ampiezza della FEM indotta ai capi delle spire
7. L'energia dissipata nelle spire in 10s

Soluzione:

Il campo magnetico all'interno del solenoide varia sinusoidalmente come la corrente che lo genera. Il suo valore di picco è:

$$B = \mu_0 n i_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2800 \cdot 10 = 35.2 \text{ mT} \quad (25.1)$$

L'induttanza, nota l'induttanza del solenoide infinito, è pari a:

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma h = \mu_0 n^2 \pi r^2 h = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2800^2 \cdot \pi \cdot 0.05^2 \cdot 2 = 154.8 \text{ mH} \quad (25.2)$$

La resistenza del solenoide è trascurabile, pertanto il generatore dovrà fornire una tensione per bilanciare la FEM autoindotta, in questo caso certamente non trascurabile:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= Li = Li_0 \cos(\omega t) \\ -\frac{d\Phi}{dt} &= Li_0 \omega \sin(\omega t) \\ V_0 &= Li_0 \omega = L \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 100 = 972.4 \text{ V} \end{aligned} \quad (25.3)$$

L'energia magnetica accumulata ha il valore massimo al picco della corrente, e nota l'induttanza vale:

$$E = \frac{1}{2} Li_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 154.8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 7.74 \text{ J} \quad (25.4)$$

Il campo magnetico nel solenoide è costante, e pertanto il suo flusso attraverso una singola spira vale:

$$\Phi_1 = \mu_0 n i \cdot \pi r^2 \quad (25.5)$$

Tenendo conto del numero di spire dato si ha:

$$\Phi_N = N \cdot \mu_0 n i \cdot \pi r^2$$

$$M = \frac{\Phi_N}{i} = 10 \mu_0 n \pi r^2 = 10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2800 \cdot \pi \cdot 0.05^2 = 276.4 \mu H \quad (25.6)$$

Noto il flusso attraverso le spire, la FEM indotta ai capi delle spire si calcola dalla sua variazione:

$$\Phi_B^1 = M = M i_o \cos(\omega t)$$

$$V^1 = -\frac{d\Phi^1}{dt} = M i_o \omega \sin(\omega t) \quad (25.7)$$

$$V_0^1 = M i_o \omega = M \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 100 = 1.74V$$

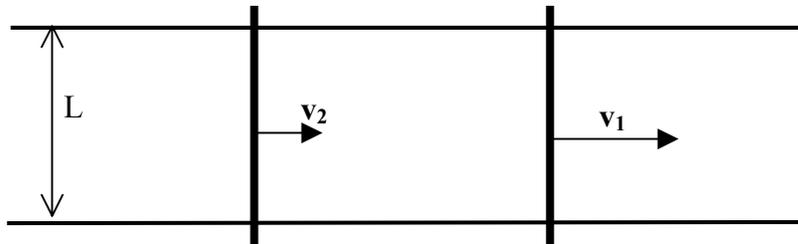
La potenza dissipata nella resistenza delle spire varia nel tempo come V^2/R , l'energia dissipata si calcola come integrale nel tempo della potenza. L'integrale di $\sin^2 \alpha$ in un periodo vale $1/2T$, dove T è il periodo. Poiché il tempo di integrazione corrisponde ad un numero intero (grande) di periodi si ha:

$$E = \int_0^{10} \frac{V^2}{R} dt = \int_0^{10} \frac{(V_0^1)^2}{R} \sin^2(\omega t) dt = \frac{(V_0^1)^2}{R} \frac{10}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot T =$$

$$E = \frac{(V_0^1)^2}{R} 10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1.74^2}{120} 10 \cdot \frac{1}{2} = 0.126J \quad (25.8)$$

Problema 26.

Due barre conduttrici, ciascuna di resistenza R , appoggiano senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $L=40\text{cm}$ e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B=1.2\text{ T}$, perpendicolare ai binari ed alla barra, uscente dal foglio. Le sbarrette si muovono con velocità $v_1=10\text{m/s}$ e $v_2=1/2v_1$.



Calcolare:

1. La resistenza di ciascuna sbarretta, se la corrente indotta nel circuito è di 0.24A
2. La forza che agisce sulle sbarrette 1 e 2
3. La carica che ha percorso il circuito dopo $t=10$ secondi

Soluzione:

Poiché le barrette si muovono a velocità diverse, la superficie tra di esse e le rotaie varia e quindi varia il flusso del campo magnetico:

$$\phi(B) = BL(x_1 - x_2) \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = BL(v_1 - v_2) = BL \frac{v_1}{2} \quad (26.1)$$

Pertanto vi è una FEM indotta, e nota la corrente indotta la resistenza di ciascuna barretta vale:

$$R + R = \frac{FEM}{i} = \frac{BL}{i} \frac{v_1}{2} = \frac{1.2 \cdot 0.4}{0.24} \frac{10}{2} = 10\Omega \rightarrow R = 5\Omega \quad (26.2)$$

La forza che agisce su ciascuna barretta dipende dalla corrente indotta e dal campo magnetico. Poiché le barrette sono percorse da correnti in verso opposto, le forze sono in verso opposto (tendono a frenare la barretta più veloce e ad accelerare quella più lenta, per opporsi alla variazione del flusso):

$$\begin{aligned} F_1 &= -iBL\vec{u}_x = -0.24 \cdot 1.2 \cdot 0.4 = -115\text{mN} \\ F_2 &= iBL\vec{u}_x = 115\text{mN} \end{aligned} \quad (26.3)$$

La carica che ha percorso il circuito si può calcolare con la legge di Faraday, nota la variazione del flusso e la resistenza del circuito:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= LB(x_1 - x_2) \\ \phi_2 &= LB\left(x_1 + v_1 t - \left(x_2 - \frac{v_1}{2} t\right)\right) \\ |Q| &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{R} = \frac{BL}{R} \frac{v_1}{2} t = \frac{1.2 \cdot 0.4 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 2} = 2.4\text{C} \end{aligned} \quad (26.4)$$

Ma molto più semplicemente, dato che la corrente indotta è costante:

$$|Q| = it = 0.24 \cdot 10 = 2.4\text{C} \quad (26.5)$$

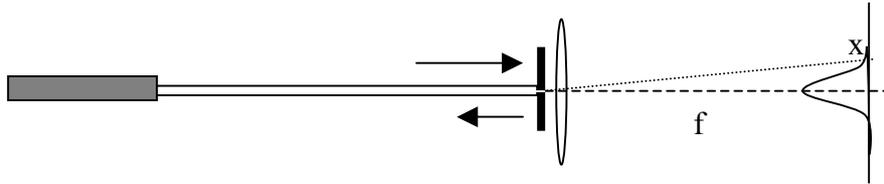
Problema 27.

Una superficie metallica è investita da un fascio di luce proveniente da un laser di diametro $\phi=3\text{mm}$. Si osserva che il 25% dell'energia viene assorbita, il restante 75% è riflessa.

1. Sapendo che l'intensità incidente è pari a $14 \times 10^6 \text{ W/m}^2$, calcolare la potenza del laser.
2. Determinare il valore dell'ampiezza del campo elettrico incidente e il valore dell'ampiezza del campo magnetico riflesso.
3. Calcolare la forza esercitata dalla radiazione sulla superficie.

Sulla superficie è praticata una sottile fenditura di spessore $a=20\mu\text{m}$, che è seguita da una lente simmetrica di focale $f=1.5\text{m}$, costruita con un vetro con indice di rifrazione $n=1.5$. Sapendo che il laser emette ad una lunghezza d'onda $\lambda=0.533\mu\text{m}$, determinare:

4. Il raggio della lente
5. La posizione x , su uno schermo posto sul piano focale della lente, del primo minimo della figura di diffrazione.



Soluzione

La superficie illuminata è pari alla sezione del fascio del laser $\Sigma = \pi \left(\frac{\phi}{2} \right)^2$, nota l'intensità incidente la potenza emessa dal laser è:

$$P = I_I \Sigma = I_I \pi \left(\frac{\phi}{2} \right)^2 = 14.15 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0.0015^2 = 99 \text{ W} \quad (27.1)$$

Il campo elettrico incidente si calcola direttamente dall'intensità incidente:

$$E_I = \sqrt{\frac{2I_I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 14 \cdot 10^6}{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 1.03 \cdot 10^5 \text{ V/m} \quad (27.2)$$

Per calcolare il campo magnetico riflesso basta tener conto che l'energia (e quindi l'intensità) riflessa è pari al 75% di quella incidente, e che vale $B = E/c$:

$$I_R = 0.75 \cdot I_I \rightarrow B_R = \frac{E_R}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2 \cdot 0.75 \cdot I_I}{c\epsilon_0}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad (27.3)$$

Ricordiamo che l'intensità riflessa contribuisce il doppio di quella assorbita al calcolo della pressione di radiazione:

$$P_{Rad} = \frac{2 \cdot I_R}{c} + \frac{I_A}{c} = \frac{2 \cdot 0.75 \cdot I_I}{c} + \frac{0.25 \cdot I_I}{c} = \frac{1.75 \cdot I_I}{c} \quad (27.4)$$

E' poi sufficiente tener conto della sezione del fascio per calcolare la forza risultante:

$$F = P_{Rad} \Sigma = \frac{1.75 \cdot I_I \Sigma}{c} = \frac{1.75 \cdot P}{c} = \frac{1.75 \cdot 99}{3 \cdot 10^8} = 5.8 \cdot 10^{-7} \text{ N} \quad (27.5)$$

Il raggio della lente sottile simmetrica, data la lunghezza focale e l'indice di rifrazione, vale:

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R}{2} \rightarrow R = 2(n-1)f = 2(1.5-1) \cdot 1.5 = 1.5m \quad (27.6)$$

Infine, la posizione del primo minimo della figura di diffrazione è data da:

$$a \sin \theta = \lambda \rightarrow a \frac{x}{f} = \lambda \rightarrow x = \frac{\lambda f}{a} = \frac{0.533 \cdot 1.5}{20} = 0.04m \quad (27.7)$$

Problema 28.

Un satellite artificiale, dotato di pannelli fotovoltaici per l'alimentazione della strumentazione, orbita attorno al sole nei pressi di Venere. Sapendo che:

- l'intensità della luce solare sulla terra è pari a $1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$
- la distanza Sole-Terra è di $150 \cdot 10^9 \text{ m}$
- la distanza Sole-Venere è di $108 \cdot 10^9 \text{ m}$

Determinare:

1. La superficie minima che devono avere i pannelli fotovoltaici per fornire i 200W necessari all'alimentazione, supponendo che i pannelli siano disposti ortogonalmente alla radiazione e che tutta la radiazione venga assorbita e il 10% convertita in elettricità.
2. L'ampiezza del campo magnetico della radiazione sui pannelli.
3. La forza dovuta alla radiazione sui pannelli, se questi hanno in realtà una superficie di 2 m^2

Soluzione:

L'intensità della radiazione solare varia con il quadrato della distanza dal sole. Su Venere vale pertanto:

$$I_V = I_T \cdot \left(\frac{R_T}{R_V} \right)^2 = 1.4 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{150}{108} \right)^2 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \quad (28.1)$$

Per ottenere una potenza elettrica di 200W, data l'intensità, l'efficienza e la superficie dei pannelli, si scriverà:

$$P = I_V \cdot \text{Eff} \cdot \Sigma \quad (28.2)$$

e quindi:

$$\Sigma = \frac{P}{I_V \cdot \text{Eff}} = \frac{200}{2.7 \cdot 10^3 \cdot 0.1} = 0.74 \text{ m}^2 \quad (28.3)$$

L'ampiezza del campo magnetico si ricava immediatamente nota l'intensità della radiazione:

$$I_V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.7 \cdot 10^3}{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 1426 \text{ V/m} \quad (28.4)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 4.75 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

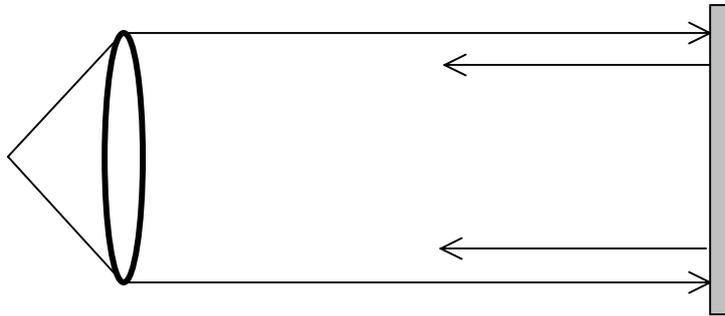
Infine la forza sui pannelli (che sono sovradimensionati rispetto alla superficie minima sopra calcolata) si determina in base alla pressione di radiazione. Nota che tutta la radiazione è assorbita, anche se solo il 10% trasformata in elettricità:

$$F = \frac{I_V}{c} \Sigma' = \frac{2.7 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \cdot 2 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (28.5)$$

Problema 29.

Una sorgente di luce, posta nel fuoco di una lente convergente sottile simmetrica di diametro $D=20$ cm e raggio di curvatura $R=80$ cm, proietta un fascio di luce che colpisce uno specchio disposto ortogonalmente al fascio, la luce viene completamente riflessa. Sapendo che la costante dielettrica relativa del vetro che compone la lente è $k_e=2.25$, e che l'ampiezza del campo elettrico della luce incidente sulla superficie dello specchio è $E_0=1.5$ KV/m determinare:

1. La lunghezza focale della lente
2. La forza che la luce esercita sullo specchio



Soluzione:

L'indice di rifrazione del vetro si ricava dalla costante dielettrica.

$$n = \sqrt{k_e} = \sqrt{2.25} = 1.7 \quad (29.1)$$

Nota questo ed il raggio di curvatura la distanza focale è:

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R}{2} = 0.8m \quad (29.2)$$

Sapendo il campo elettrico della luce incidente se ne ricava l'intensità:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad (29.3)$$

e da questa la pressione di radiazione, considerando il fatto che la luce viene completamente riflessa:

$$P = \frac{2I}{c} = \varepsilon_0 E_0^2 \quad (29.4)$$

Poiché la sorgente è nel fuoco della lente, il fascio di luce emesso è cilindrico, e quindi il diametro del fascio sullo schermo è uguale al diametro della lente (trascurando effetti di diffrazione). Da questo la forza:

$$F = P\Sigma = P\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \pi D^2}{4} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 1500^2 \cdot 0.2^2}{4} = 6.26 \cdot 10^{-7} N \quad (29.5)$$

Problema 30.

Uno scout cerca di accendere il fuoco usando una lente sottile simmetrica di diametro $D=16\text{cm}$, raggio di curvatura $R=80\text{cm}$ e indice di rifrazione $n=1.7$. Sapendo che l'intensità della luce solare sulla superficie terrestre è 1.4 Kw/m^2 determinare:

1. A che distanza deve porre la lente?
2. Quanto tempo deve attendere per accumulare un'energia pari a 100J ?

Se la lente concentra la luce in una regione di diametro $d=50\mu\text{m}$ dove viene completamente assorbita:

3. Quale è la pressione dovuta alla radiazione sul materiale posto nel fuoco delle lente? (trascurando il piccolo angolo dei raggi focalizzati)

Soluzione:

L'intensità massima si ottiene nel fuoco della lente. Utilizzando la legge delle lenti sottili simmetriche:

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{r}{2} = \frac{1}{1.7-1} \frac{0.8}{2} = 57.1429\text{cm} \quad (30.1)$$

Nota l'intensità, si calcola la potenza attraverso la superficie della lente, e quindi il tempo:

$$P = I_s \Sigma_L = I_s \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = 1.4 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0.08^2 = 28.149\text{W} \quad (30.2)$$
$$t = \frac{U}{P} = \frac{100}{28.1} = 3.553\text{s}$$

Poiché la potenza trasportata dalla luce non varia, l'intensità aumenterà in proporzione inversa alla superficie del fascio. Nota l'intensità, e sapendo che la radiazione è completamente assorbita, si ha:

$$P_{RAD} = \frac{I_f}{c} = \frac{I_s \frac{\Sigma_L}{\Sigma_f}}{c} = I_s \frac{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2}{\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2} \frac{1}{c} = I_s \left(\frac{D}{d} \right)^2 \frac{1}{c} \quad (30.3)$$
$$P_{RAD} = 1.4 \cdot 10^3 \left(\frac{16 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-6}} \right)^2 \frac{1}{c} = 47.787 \text{ N/m}^2$$

Problema 31.

Una coppia di fenditure molto sottili, distanti $d=30\mu\text{m}$, e' illuminata da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda=433\text{nm}$. A valle delle fenditure vi è una lente sottile simmetrica con raggio di curvatura $R=1.2\text{m}$ e indice di rifrazione $n=1.55$

Calcolare:

1. A che distanza dalla lente va posto lo schermo su cui si focalizza la figura di interferenza
2. Quale e' la distanza sullo schermo tra i massimi di interferenza

Se chiudendo una delle fenditure si misura che l'intensità della luce al centro dello schermo è $I_0=12\text{W/m}^2$

3. Quanto vale l'ampiezza del campo elettrico nella posizione del massimo centrale, quando entrambe le fenditure sono aperte?

Soluzione:

Il fuoco della lente vale:

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R}{2} = \frac{1}{1.55-1} \frac{1.2}{2} = 1.09\text{m} \quad (31.1)$$

La posizione dei massimi della figura di interferenza sullo schermo è :

$$d \sin \theta = n \lambda \rightarrow d \frac{x}{f} = n \lambda \quad (31.2)$$

pertanto la distanza tra massimi successivi è:

$$\Delta x = \frac{\lambda f}{d} = \frac{433 \cdot 10^{-9} \cdot 1.09}{30 \cdot 10^{-6}} = 15.7\text{mm} \quad (31.3)$$

Nel massimo centrale, l'ampiezza delle due onde si somma e quindi l'intensità è pari a quattro volte quella dovuta alla singola fenditura. Nota l'intensità, il calcolo del campo elettrico è immediato:

$$I = 4I_0$$
$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{8I_0}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 12}{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 190\text{V/m} \quad (31.4)$$

Problema 32.

In un dispositivo di Young in aria ($n=1$) la distanza tra le fenditure è $d=0.1$ mm e lo schermo dista $L=20$ cm. Illuminando con luce monocromatica (onda piana parallela alla superficie del dispositivo) si osserva che la distanza tra i due massimi di ordine $k=10$ è di 24 mm. Calcolare:

1. La lunghezza d'onda della luce incidente,
2. La larghezza delle frange luminose (distanza due minimi).

Il dispositivo viene successivamente immerso in acqua ($n=1,33$). Sapendo che la lente è costruita con vetro di indice di rifrazione $n_v=1.7$, calcolare:

3. A che distanza deve essere posto lo schermo.
4. Le nuove posizioni dei massimi di ordine k .

Soluzione:

La posizione dei massimi della figura di Young è data da:

$$\text{sen}\vartheta = \frac{x}{L} = \frac{k\lambda}{d} \quad (32.1)$$

La distanza tra i due massimi di ordine 10 (simmetrici rispetto al centro) è quindi:

$$x_{\text{max}} = \frac{\lambda L}{d} k (k = \pm 10) \rightarrow \Delta x = \frac{2\lambda L}{d} k \quad (32.2)$$

da cui noti gli altri fattori si ricava la lunghezza d'onda della luce:

$$\lambda = \frac{\Delta x d}{2Lk} = 600 \text{ nm} \quad (32.3)$$

La distanza tra due minimi successivi (come tra due massimi) della figura di interferenza di Young è:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = 1.2 \text{ mm} \quad (32.4)$$

La distanza focale di una lente sottile simmetrica è data da $f = \frac{n}{n_v - n} \frac{R}{2}$. Il rapporto

tra le focali della stessa lente in acqua ed in aria è:

$$\frac{f_{H_2O}}{f_{Aria}} = \frac{n_{H_2O}}{n_v - n_{H_2O}} \frac{n_v - 1}{1} \quad (32.5)$$

pertanto

$$L' = f_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}(n_v - 1)}{n_v - n_{H_2O}} f_{Aria} = \frac{1.33 \cdot (1.7 - 1)}{1.7 - 1.33} 0.2 = 0.503 \text{ m} \quad (32.6)$$

La posizione dei massimi non varia solo a causa della diversa posizione dello schermo, in quanto in acqua è necessario utilizzare la lunghezza d'onda della luce nel mezzo: $\lambda' = \lambda/n$. La posizione dei massimi di ordine $k=10$ è quindi:

$$x' = \frac{\lambda L'}{n_{H_2O} d} k = 22.7 \text{ mm} \quad (32.7)$$