CAPITOLO 9

- Il rounding off
- Metodo di integrazione Runge-Kutta
- Integratori simplettici

Il problema dell'errore nella soluzione numerica delle equazioni differenziali.

- Errore dovuto all'approssimazione del metodo
- Errore di arrotondamento numerico

Rappresentazione di un numero floating-point

Segno	Esponente	Mantissa

32 bit

1 segno

1,7 seg,exp ($2^{2^7} \sim 10^{38}$)

23 mantissa 7ª cifra

64 bit

1 segno

1,10 seg,exp $2^{2^{10}} \sim 10^{308}$

52 mantissa 15ª cifra

Rounding-off: ogni operazione porta un errore $\varepsilon \sim 10^{-15}$
Dopo N operazioni l'errore è proporzionale a $\sim N^{1/2}\,\varepsilon$.
Spesso il segno + domina nell'errore (non è random la distribuzione di + o $-\varepsilon$) e quindi l'errore diventa $N\varepsilon$

Soluzione numerica di equazioni differenziali del 2° ordine

Un sistema di Eq. Differenziali del II° ordine può essere ridotto al I° ordine aumentando la dimensione N:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0$$
$$\dot{\bar{x}}(t=0) = \dot{\bar{x}}_0$$

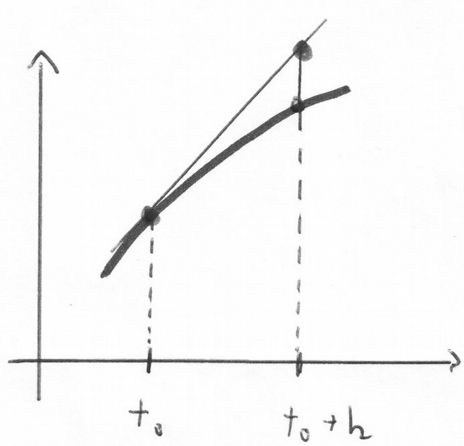
$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{y} \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0 \qquad \bar{y}(t=0) = \dot{\bar{x}}_0 = \bar{y}_0$$

- SOLUZIONE di tipo EULERIANO (I° ordine in h)

Sia h uno step temporale "piccolo".

$$\bar{x}(t+h) = \bar{x}_0 + h\,\bar{y}_0 + O(h^2)$$
$$\bar{y}(t+h) = \bar{y}_0 + h\,\bar{f}_0 + O(h^2)$$



con $\bar{f}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0)$

• METODO di RUNGE-KUTTA (ordine superiore)

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 + O(h^3)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + h\bar{f}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}'_0 + O(h^3)$$

$$\text{con} \quad \bar{f}'_0 = \left.\frac{d\bar{f}}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}}\right|_{x=x_0} \cdot \left.\frac{d\bar{x}}{dt}\right|_{t=0} = \bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0$$

<u>BISOGNA CALCOLARE $\bar{F}_0$</u>, CON APPROSSIMAZIONE ALMENO $O(h)$ per mantenere $O(h^3)$ nello sviluppo di $\bar{x}, \bar{y}$.

Sappiamo che.

$$\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0) = \bar{f}_0 + hp\bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0 + O(h^2)$$

dove p è un numero arbitrario ≤ 1. Allora

$$\bar{F}_0\bar{y}_0 = \frac{\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0) - \bar{f}_0}{hp} + O(h^2)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + h\bar{f}_0 + \frac{1}{2}h^2\,\frac{\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0) - \bar{f}_0}{hp} + O(h^3) =$$

$$= y_0 + h\left(1 - \frac{1}{2p}\right)\bar{f}_0 + \frac{1}{2p}h\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0) + O(h^3)$$

NON COMPARE PIÙ $\bar{f}'$! CON 2 VALUTAZIONI di $\bar{f}$, cioè $\bar{f}(\bar{x}_0)$ e $\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0)$, SI PROPAGA LA SOLUZIONE da $t=0$ a $t=t_0+h=h$. Se SCEGLIAMO $p=\frac{1}{2}$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0$$
$$\bar{y} = \bar{y}_0 + h\bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{h y_0}{2}\right)$$

- Si può ulteriormente ottimizzare usando una sola valutazione di $\bar{f}$. Infatti:

$$\frac{1}{2}h^2\bar{f}(\bar{x}_0 + hp\bar{y}_0) = \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 + \frac{1}{2}h^3 p\bar{F}_0\cdot\bar{y}_0 + O(h^4) =$$
$$= \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 + O(h^3)$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{1}{2}h\bar{y}_0\right) \\ \bar{y} = \bar{y}_0 + h\bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{1}{2}h\bar{y}_0\right) \end{cases} + O(h^3)$$

- RUNGE - KUTTA 3° ORDINE:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{4}h^2(\bar{K}_0 + \bar{K}_1)$$
$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \frac{1}{4}h(\bar{K}_0 + 3\bar{K}_1) \qquad + O(h^4)$$

$$\bar{K}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0)$$
$$\bar{K}_1 = \bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{2}{3}h\bar{y}_0 + \frac{2}{9}h^2\bar{K}_0\right)$$

METODO PIÙ USATO: <u>4° ORDINE CON CONTROLLO SUL PASSO di INTEGRAZIONE h.</u> Se la variazione di $\bar{f}$ è troppo grande durante un passo h, si torna indietro e si utilizza $\frac{h}{2}$. Poi si ripete controllo etc... $\frac{h}{4}$ ...

Introduzione agli integratori simplettici

1) OPERATORE SOLUZIONE: $\phi_H(t, t_0)$

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \phi_H(t, t_0)\,(\bar{p}_0, \bar{q}_0)$$

Ex:

$$H = p q^2 \qquad \begin{cases} \dot{p} = -2pq \\ \dot{q} = q^2 \end{cases} \quad \text{Eq. Hamilton}$$

$$\phi_H(t, t_0)(p_0, q_0) = \left(p_0 \left(1 - (t - t_0)\, q_0\right)^2 ,\ \frac{q_0}{\left(1 - (t - t_0) q_0\right)} \right)$$

verifica:
$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{(-1)^2 q_0^2}{\left(1 - (t - t_0) q_0\right)^2} = q^2 \\[2ex] \dot{p} = -2 q_0 p_0 \left(1 - (t - t_0) q_0\right) = -2pq \end{cases}$$

$$\phi_H(t_2, t_0) = \phi_H(t_2, t_1)\, \phi_H(t_1, t_0)$$

2) PARENTESI di POISSON:

$$\{f, g\} = \nabla_{\bar{q}} f \cdot \nabla_{\bar{p}}\, g - \nabla_{\bar{p}} f \cdot \nabla_{\bar{q}}\, g =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Con le parentesi di Poisson si può calcolare $\frac{df}{dt}$ lungo la soluzione $p(t)$, $q(t)$:

$$\frac{df}{dt} = \nabla_{\bar{q}} f \cdot \dot{\bar{q}} + \nabla_{\bar{p}} f \cdot \dot{\bar{p}} = \{f, H\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

3) SERIE di LIE:

si calcola la serie di Taylor di f:

$$f(t) = f(0) + \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} \cdot t + \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=0} \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots =$$

$$= f(0) + \{f, H\}_{t=0} \cdot t + \{\{f, H\}, H\} \frac{t^2}{2} + \cdots =$$

$$= f(0) \cdot I + \mathcal{L}_H \cdot f(0) \cdot t + \mathcal{L}_H^2 f(0) \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots$$

$$= e^{t \cdot \mathcal{L}_H} f(0) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathcal{L}_H^i f(0)$$

Dove $e^{t \cdot \mathcal{L}_H} = I + \mathcal{L}_H t + \mathcal{L}_H^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \mathcal{L}_H^3 \frac{t^3}{6} + \cdots$

SERIE di LIE espressa tramite un operatore esponenziale

Con la serie di Lie possiamo riscrivere la soluzione delle equazioni del moto

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \qquad \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \{ \bar{\xi}, H \}$$

$$\bar{\xi}(t) = e^{\tau \mathcal{L}_H} \xi(t_0) = \phi_H(t, t_0)\, \xi(t_0)$$

con $\tau = t - t_0$

SE L'HAMILTONIANO È SEPARABILE IN DUE PARTI $H = H_A + H_B$ ALLORA LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$\bar{\xi}(t) = e^{\tau(A+B)} \xi(t_0) \qquad \text{con} \qquad A = \mathcal{L}_{H_A}, \quad B = \mathcal{L}_{H_B}$$

POSSIAMO APPLICARE PRIMA $e^{\tau B}$ E POI $e^{\tau A}$?

In altre parole $e^{\tau(A+B)} = e^{\tau A} \cdot e^{\tau B}$?

$$e^{\tau(A+B)} = 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

$$e^{\tau A} \cdot e^{\tau B} = \left(1 + \tau A + \tau^2 \frac{A^2}{2} + \dots\right)\left(1 + \tau B + \tau^2 \frac{B^2}{2} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots$$

MA $BA + AB \neq 2AB$ GLI OPERATORI NON NECESSARIAMENTE COMMUTANO (EX: ROTAZIONI 3-D) quindi $e^{\tau(A+B)}$ COINCIDE con $e^{\tau A} \cdot e^{\tau A}$ SOLO nei primi 2 termini $1+\tau(A+B)$ cioè al I^{o} ordine. PERÒ

$$e^{\tau\frac{B}{2}} e^{\tau A} e^{\tau\frac{B}{2}} = 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}\left(B^2 + BA + AB + A^2\right) + o(\tau^3)$$

ALLORA

$$\boxed{e^{\tau(A+B)} = e^{\tau\frac{B}{2}} e^{\tau A} e^{\tau\frac{B}{2}} + o(\tau^3)}$$

COINCIDE AL II^{o} ORDINE.

- SUPPONIAMO di saper risolvere le equazioni del moto per H_A e H_B ma NON per $H_A + H_B$. Allora possiamo risolvere le equazioni del moto per $H_A + H_B$ in modo approssimato a $o(\tau^3)$ con il metodo LEAP FROG (salto di rana) pg 448 D-M.

Nel SISTEMA SOLARE IL MOTO dei pianeti è GERARCHICO: un pianeta si muove attorno al sole e viene PERTURBATO dagli altri pianeti

$$H = H_{kepl} + H_{PER}$$

PROBLEMA PERTURBATIVO: $H_{kepl.}$ DOMINA e descrive orbita kepleriana attorno al SOLE

H_{PER} è PERTURBAZIONE dovuta all'attrazione gravitazionale degli altri pianeti.

$$H^{i}_{kepl} = \frac{p_i^2}{2\tilde{m}_i} - G\frac{\tilde{M}_i \tilde{m}_i}{\tilde{r}_i}$$

$$H^{i}_{per} = \frac{G m_0 m_i}{\tilde{r}_i} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \frac{G m_i m_k}{r_{ik}}$$

In coordinate di Jacoby (pg. 443 D-M)

STRUTTURA di UN INTEGRATORE SIMPLETTICO AL II° ORDINE:

$$q(\tau) = e^{\frac{\tau}{2} H_{kep}} \, e^{\tau H_{per}} \, e^{\frac{\tau}{2} H_{kep}} \, q(0)$$

$e^{\frac{\tau}{2} H_{kep}}$ propaga le POSIZIONI e VELOCITÀ dei corpi in modo KEPLERIANO (a 2 CORPI) per un intervallo $\frac{\tau}{2}$. La propagazione è ESATTA, si sa la soluzione analitica.

Poi si applica $e^{\tau H_{pos}}$. H_{pos} agisce solo sui momenti perché H_{pos} NON dipende dai $\bar{p}$! Si applica per un intervallo τ e questo fa cambiare solo le velocità.

INFINE, si applica di nuovo $e^{\frac{\tau}{2} H_{vel}}$.

$\boxed{\text{SIMPLETTICO:}}$ Si risolvono le equazioni di un Hamiltoniana H' che approssima a $O(\tau^n)$ e' Hamiltoniana del sistema H. Però, si RISOLVE SEMPRE IN MODO ESATTO delle equazioni Hamiltoniane per H'. QUINDI, SI CONSERVA L'ENERGIA del SISTEMA (A MENO del ROUNDING-OFF).