

CAPITOLO 11

Struttura dei dischi di accrescimento

1) DISCHI DI ACCRESCIMENTO

- Coordinate polari e cilindriche (r, ϕ, z)
- Disco sottile e assi-simmetrico $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$
 $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{e}_z = 0$
- la velocità \vec{u} del fluido è: $\vec{u} = (u, r\Omega, 0)$

L'eq. del momento $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \psi$

con $\psi = -\frac{GM}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$ in coordinate cilindriche

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - r\Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

• Se $\frac{\partial p}{\partial r}$ è piccola $\Rightarrow u = 0 \Rightarrow r\Omega^2 = \frac{GM}{r^2}$

$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ rotazione Kepleriana

2) • VELOCITÀ del SUONO IN APPROSSIMAZIONE ISOTERMA & ALTEZZA di SCALA H

• equilibrio idrostatico lungo z ($u_z = 0$)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GM}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \approx - \frac{GMz}{r^3}$$

• Eq. di stato: $p = \frac{RST}{\mu} = c_s^2 g$ con $c_s^2 = \frac{RT}{\mu}$

c_s = vel. del suono costante in appross. isoterma.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{g} c_s^2 \frac{\partial g}{\partial z} = - \frac{GMz}{r^3} \Rightarrow \ln g = - \frac{GM}{c_s^2} \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^3}$$

$$g(z) = e^{-\frac{GM}{c_s^2} \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^3}} = e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{H^2}} \quad \text{con} \quad \boxed{H = \frac{c_s}{\Omega R}}$$

Altezza di scala $\Rightarrow H = \frac{c_s}{\Omega R}$ quindi di

la c_s isoterma è molto più piccola della velocità Kepleriana $\Omega \cdot R$

3) EQUAZIONE di DIFFUSIONE PER LA DENSITA' SUPERFICIALE.

- $Z(r, t) = \int_{-r}^{+r} S(r, t, z) dz$

- Shear (tensione) $A = r \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{3}{2} \sqrt{GM} r^{-\frac{3}{2}}$
↑
Kepleriana

- Momento angolare specifico (per unità di massa)

$$J = r \cdot \vec{e}_\phi \cdot \vec{u} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega r \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \Omega$$

La componente ϕ dell'eq. di conservazione
del momento:

$$r \cdot \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) = r \vec{e}_\phi \cdot \vec{f} = r f_\phi$$

con $f \Rightarrow$ FORZA VISCOSA in UNITA' di MASSA.

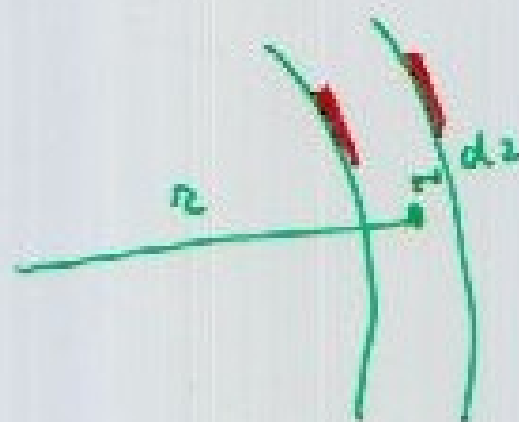
⇓

$$\frac{\partial J}{\partial t} + u \frac{\partial J}{\partial r} = \frac{DJ}{Dt} = r f_\phi$$

4) VISCOSITÀ:

Forza di attrito tra superfici. La componente tangente al moto è:

$\mu A(z)$ maggiore è μ shear maggiore è la viscosità. $\mu = \eta v$



La η viscosa interna all'anello acqua, quella esterna deve essere \Rightarrow

$$F_{in} = 2\pi \left[\eta v |A| \int_{-r}^r g dz \right]_{z = -\frac{dz}{2}}^{z = \frac{dz}{2}} = 2\pi (\eta v |A| \Sigma)_{z = \frac{dz}{2}}^{z = -\frac{dz}{2}}$$

$$F_{out} = 2\pi (\eta v |A| \Sigma)_{z = -\frac{dz}{2}}^{z = \frac{dz}{2}}$$

IL MOMENTO della forza TOTALE è:

$$T = - F_{in} \cdot z + F_{out} \cdot z$$

5)

$$T = -2\pi \left(r^2 v \Sigma r \frac{d\Omega}{dz} \right)_{z-\frac{dz}{2}} + 2\pi \left(r^2 v \Sigma r \frac{d\Omega}{dz} \right)_{z+\frac{dz}{2}} =$$

$$= 2\pi \frac{d}{dz} \left(r^2 v \Sigma r \frac{d\Omega}{dz} \right) \cdot dz$$

La massa dell'anello è: $2\pi r \Sigma dz$

Allora T per unità di massa è

$$\tau = \frac{T}{M} = \frac{2\pi \frac{d}{dz} \left(r^3 v \Sigma \frac{d\Omega}{dz} \right) \frac{dz}{2\pi r \Sigma dz}}{2\pi r \Sigma dz} =$$

$$= \frac{1}{r \Sigma} \frac{d}{dz} \left(r^3 v \Sigma \frac{d\Omega}{dz} \right)$$

$$\boxed{\frac{D\tau}{Dt} = \frac{1}{r \Sigma} \frac{d}{dz} \left(r^3 v \Sigma \frac{d\Omega}{dz} \right)}$$

Equazione del momento angolare
specifico.

6) CONSERVATIONE della MASSA

$$\frac{Dg}{Dt} + g \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{che integrata in } z \Rightarrow$$

$$\frac{D\Sigma}{Dt} + \Sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (u \cdot \Sigma) = 0$$

In coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

\parallel \parallel
 0 0
 ass. sim. $u_z = 0$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r \Sigma) = 0$$

- Σ è solo funzione di r e quindi anche $J = r^2 \Sigma$

$$\frac{D\Sigma}{Dt} = \frac{d\Sigma}{dr} \cdot u$$

(u è la componente lungo z di \vec{u})

$$7) \quad \frac{D\bar{\Sigma}}{Dt} = \frac{1}{r\bar{\Sigma}} \frac{d}{dr} \left(r^3 v \bar{\Sigma} \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u \bar{\Sigma} \right) = 0$$

$$\frac{D\bar{\Sigma}}{Dt} = u \cdot \frac{d\bar{\Sigma}}{dr}$$

$$u \frac{d\bar{\Sigma}}{dr} = \frac{1}{r\bar{\Sigma}} \frac{d}{dr} \left(r^3 v \bar{\Sigma} \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

$$u r \bar{\Sigma} = \frac{1}{\frac{d\bar{\Sigma}}{dr}} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^3 v \bar{\Sigma} \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left(r^3 v \bar{\Sigma} \frac{d\Omega}{dr} \right) \right) = 0$$

$$\text{ma } \bar{\Sigma} = r^2 \Omega$$

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{d r^2 \Omega}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left(r^3 v \bar{\Sigma} \frac{d\Omega}{dr} \right) \right)$$

$$\text{so } \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} [v \bar{\Sigma} r^{\frac{1}{2}}] \right)$$

8) • RISCALDAMENTO VISCOZO:

$$D(r) = \nu \sum \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2$$

per unità di area e tempo.

• Per soluzioni indipendenti del tempo:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u \Sigma) = 0$$

"
0

$$\Rightarrow r u \Sigma = \text{cost.}$$

$$\dot{M}_d = 2\pi r \Sigma (-u) = \text{flusso di massa a unità di tempo.}$$