

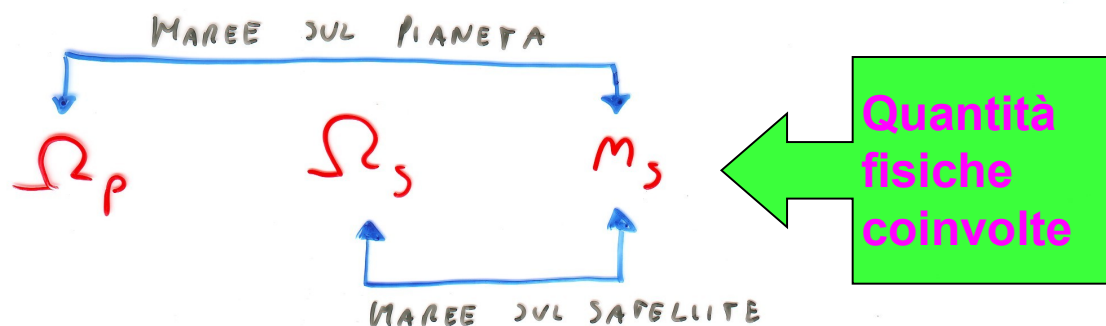
CAPITOLO 6

- Effetti mareali del pianeta sul satellite

Maree sul satellite prodotte dal pianeta

Effetti:

- Circularizzazione dell'orbita del satellite
- Evoluzione verso la sincronizzazione
- Cattura in risonanze spin-orbita



EVOLUZIONE ORBITALE

MAREE SUL PIANETA



$$\frac{da}{dt}$$

MAREE SUL SATELLITE



$$\frac{de}{dt}$$

(piccola $\frac{da}{dt}$)

EVOLUZIONE SPIN

SINCRONIZZAZIONE, per satelliti RISONANTE

01)

$$L = I_s \Omega_s + \frac{m_p m_s}{(m_p + m_s)} a^2 \omega^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

↑
trascurabile rispetto

$$L_0^2 = \frac{m_p^2 m_s^2}{(m_p + m_s)^2} a^4 \omega^2 (1 - e^2)$$

$$e^2 = 1 - L_0^2 \frac{(m_p + m_s)^2}{(m_p m_s)^2} \frac{1}{m^2 a^4} =$$

$$= 1 + 2 \frac{E L_0^2}{G^2} \frac{(m_p + m_s)}{(m_p m_s)^3}$$

$E = -\frac{G m_p m_s}{2a}$

$$\dot{e} = \frac{2 \dot{E} L_0^2}{2e} \frac{(m_p + m_s)}{G^2 (m_p m_s)^3} = -\frac{\dot{E}}{2e E} (1 - e^2) \approx$$

$$\approx -\frac{\dot{E}}{2e E}$$

$$\dot{E} < 0 \quad E < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{e} < 0$$

CIRCOLARIZZAZIONE MAREALE delle ORbite

La variazione corrispondente di a per conservare

L_0 PICCOLA Ex: $e \Rightarrow 0.2 \rightarrow 0.1$ ($\Delta e \approx 50\%$)

$$\Delta a = 1.5\%$$

Io-Europa-Ganimede: risonanza a 3 corpi

$$\lambda_{\text{Io}} - 3 \lambda_{\text{Eur}} + 2 \lambda_{\text{Gan}} \cong 180^\circ$$

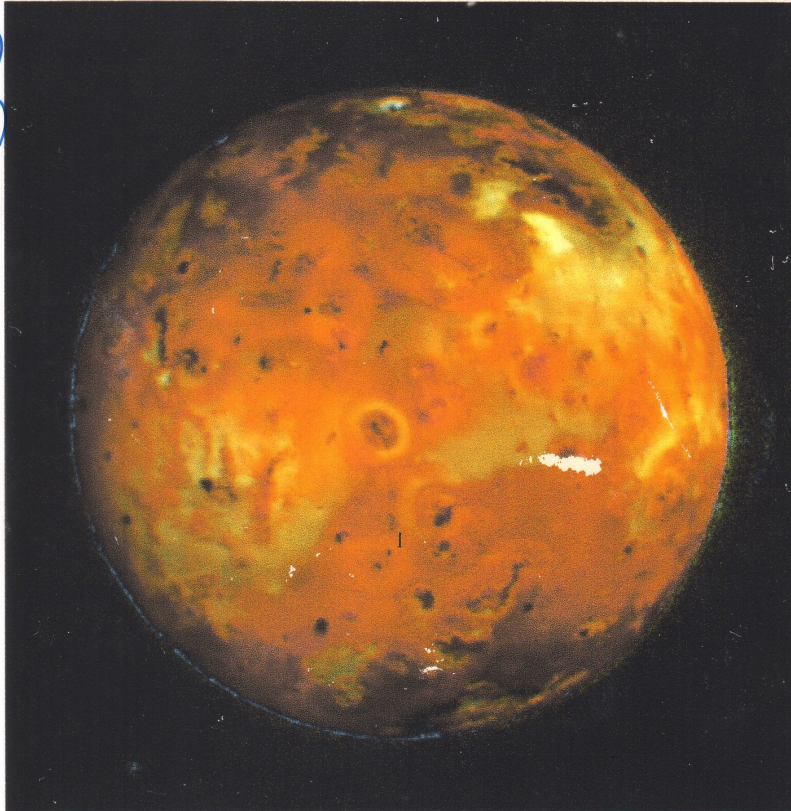
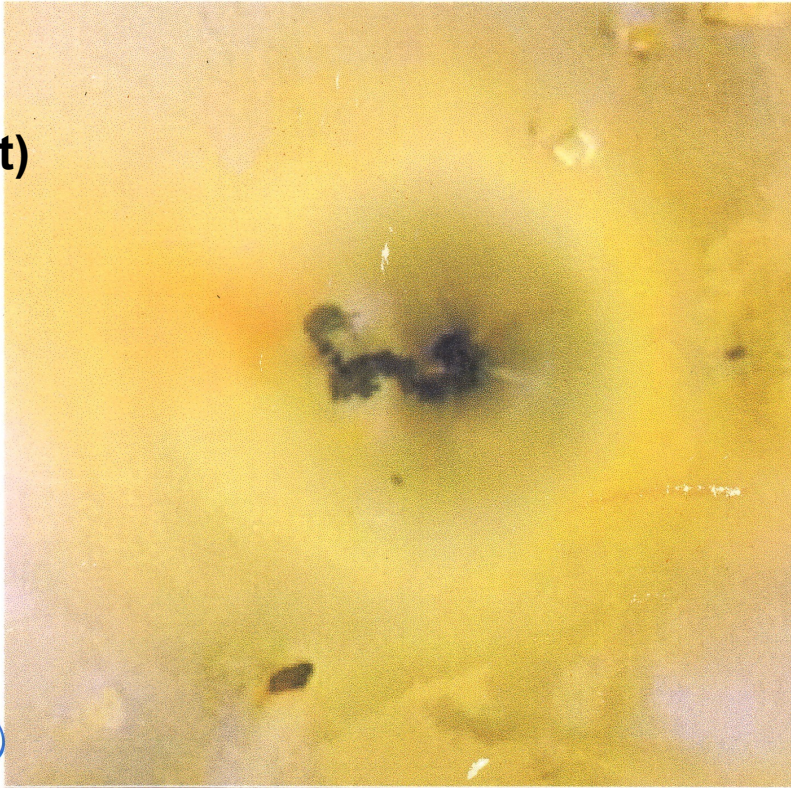
$$\tau_e = -e/(de/dt)$$

$$\tau_e \sim 6 \times 10^6 \text{ y}$$

$$\tau_e \sim 3 \times 10^8 \text{ y}$$

$$\tau_e \sim 3 \times 10^9 \text{ y}$$

↑
Tempi di
circulariz-
zazione
dell'orbita



$$a_{\text{Io}} = 421600 \text{ km}$$

$$a_{\text{Eu}} = 670900 \text{ km}$$

$$a_{\text{Ga}} = 1070000 \text{ km}$$

$$R_{\text{Io}} = 1821 \text{ km}$$

$$R_{\text{Eu}} = 1565 \text{ km}$$

$$R_{\text{Ga}} = 2634 \text{ km}$$

$$e_{\text{Io}} = 0.0043$$

$$e_{\text{Eu}} = 0.01$$

$$e_{\text{Ga}} = 0.0015$$

$$T_{\text{Io}} = 1.77 \text{ d (Syn)}$$

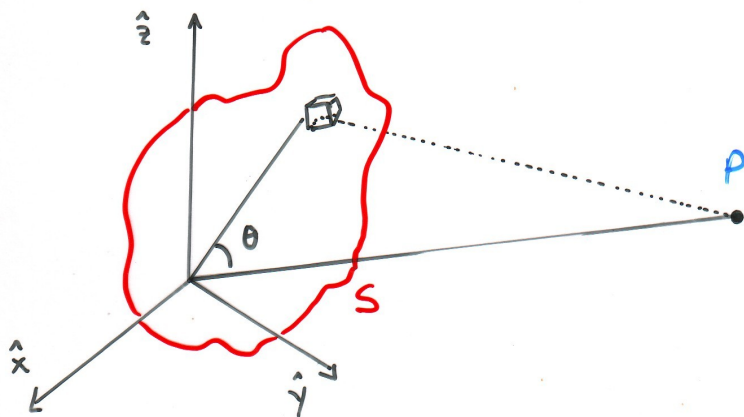
$$T_{\text{Eu}} = 3.55 \text{ d (Syn)}$$

$$T_{\text{Ga}} = 7.15 \text{ d (Syn)}$$

$$T_{\text{Ca}} = 16.6 \text{ d (Syn)}$$

EVOLUZIONE dello SPIN del SATELLITE

$$V(x, y, z) = - \frac{G m_s}{r} - \frac{G (A + B + C - 3I)}{2 r^3} \quad \text{con}$$



$$I = \frac{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{r^2}$$

POTENZIALE di
MCCULLOGH per
oggetto irregolare

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{G m_s}{r^3} x + G (B + C - 2A) \frac{x}{r^5} + \dots \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{G m_s}{r^3} y + G (C + A - 2B) \frac{y}{r^5} + \dots \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{G m_s}{r^3} z + G (A + B - 2C) \frac{z}{r^5} + \dots \end{aligned} \right.$$

* FORZA
per UNITÀ
di MASSA
del
PIANETA
 m_p

$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= (\vec{r} \times \vec{F})_x = z F_y - y F_z = 3G (C - B) \frac{y z}{r^5} \\ N_y &= 3G (A - C) \frac{z x}{r^5} \\ N_z &= 3G (B - A) \frac{x y}{r^5} \end{aligned} \right.$$

• COPPIA che agisce
su corpo P. MA IL
SISTEMA È ISOLATO e
quindi P ESERCITA SU
S COPPIA UGUALE

2) EVOLUZIONE della SPIN nel Tempo:

EQUAZIONI di EULERO

$$\frac{d\bar{J}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{J} = \bar{N}$$

\bar{J} momento
angolare

\bar{N} momento della
forza

$$A \dot{\omega}_x + (C-B) \omega_y \omega_z = N_x$$

$$B \dot{\omega}_y + (A-C) \omega_z \omega_x = N_y$$

$$C \dot{\omega}_z + (B-A) \omega_x \omega_y = N_z$$

• SEMPLIFICAZIONE!

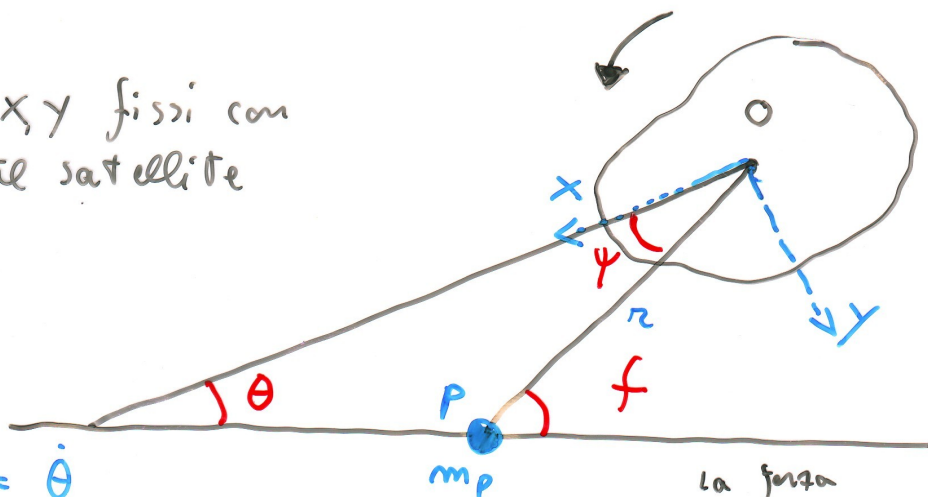
ASSUMIAMO che

$\bar{J} \perp$ al PIANO

ORBITALE $\rightarrow \omega_x = \omega_y = 0$

$$\bullet C \dot{\omega}_z = N_z = 3 G (B-A) \frac{x y}{r^5}$$

- x, y fissi con
il satellite



$$\omega_z = \dot{\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{r} = \cos \psi \\ \frac{y}{r} = \sin \psi \end{array} \right.$$

la forza
era per
unità massa

$$2 \cos \psi \sin \psi = \sin 2\psi$$

$$\bullet C \ddot{\theta} - \frac{3}{2} G m_p \left(\frac{B-A}{r^3} \right) \sin 2\psi = 0$$

L'interazione gravitazionale tra satellite di forma irregolare e pianeta causa oscillazioni a corto periodo nella rotazione del satellite

Evoluzione in risonanza

$$\psi = f - \theta$$

$$\gamma = \theta - pM$$

M anomalia media
 p : razionale $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\gamma} \Rightarrow \ddot{\gamma} + \frac{3}{2} n^2 \left(\frac{B-A}{C} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = 0$$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

1) Si espone in serie sia $\frac{a}{r}$ che f :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{a}{r} \right)^3 &= 1 + 3e \cos M + \frac{3}{2} e^2 (1 + 3 \cos 2M) + \dots \\ \sin f &= \left(1 - \frac{7}{8} e^2 \right) \sin M + e \sin 2M + \frac{9}{8} e^2 \sin 3M + \dots \\ \cos f &= \left(1 - \frac{9}{8} e^2 \right) \cos M + e (\cos 2M - 1) + \frac{9}{8} e^2 \cos 3M + \dots \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \dots \text{ si scompone } \sin(2\gamma + 2pM - 2f) &= \\ &= \sin 2\gamma (\cos(2pM) \cos 2f + \sin(2pM) \sin 2f) + \dots \end{aligned}$$

Si sostituisce, raggruppa e

4

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2} \left(\frac{B-A}{C} \right) m^2 \left((S_1 + S_2) \sin^2 \gamma + (S_3 - S_4) \cos^2 \gamma \right) = 0$$

S_i = serie in e ed M

2)

QUANDO γ è VICINI A RISONANZA, L'ANGOLO CRITICO VARIA LENTAMENTE $\dot{\gamma} \ll m$
AVERAGING!

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_i dM$$

MEDIA su un periodo.

$\langle S_i \rangle$ dipende da p e e .

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2} m^2 \left(\frac{B-A}{C} \right) H(p, e) \sin^2 \gamma = 0$$

eq. del PENDOLO

$$H(1, e) = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4$$

1:1 Sincrona

$$H(-1, e) = \frac{1}{24} e^4$$

1:1 Retrograda

$$H\left(\frac{1}{2}, e\right) = -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3$$

2:1

$$H\left(\frac{3}{2}, e\right) = \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3$$

3:2

$$\ddot{\gamma} = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \sin 2\gamma \cdot (\text{segno di } H(p, e))$$

$$\omega_0 = n \left[3 \left(\frac{B-A}{C} \right) |H(p, e)| \right]^{\frac{1}{2}}$$

3) INTERAZIONE MAREALE TENDE A RALLENTARE
LA ROTAZIONE del SATELLITE ($\dot{\omega}_T = \langle N_M \rangle$)

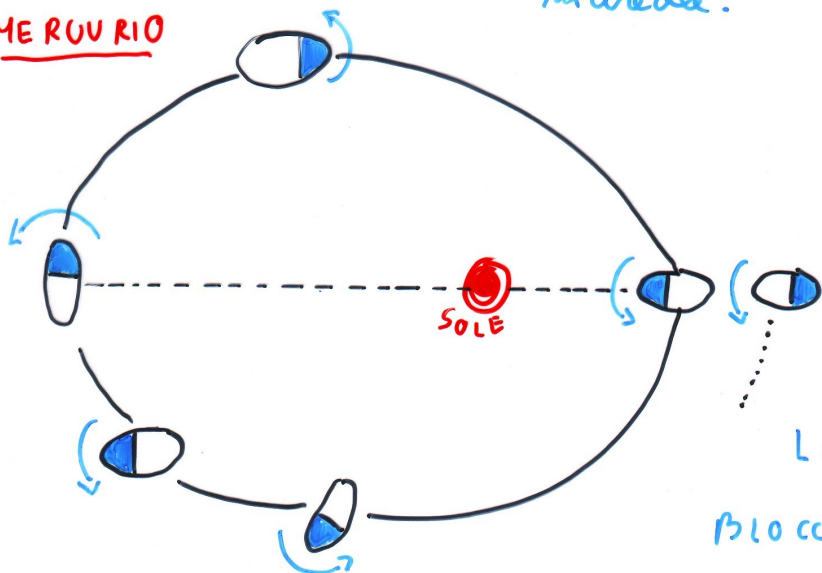
$\langle N_M \rangle$ = momento forza mareale mediato su un
periodo: forza dissipativa $\rightarrow \langle N_M \rangle < 0$

$$N_M = -D \left(\frac{a}{r} \right)^6 \text{segno}(\dot{\Omega} - n) \quad \text{con } D = \frac{3}{2} \frac{K_1}{Q} \frac{m^4}{c} R_s^5$$

$$\ddot{\gamma} = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \sin 2\gamma [\cdot \text{segno } H] + \frac{\langle N_M \rangle}{C}$$

- Se $|\frac{\langle N_M \rangle}{C}| < \frac{1}{2} \omega_0^2$ È possibile CATTURA in
RISONANZA durante evoluzione
mareale.

MERCURIO



$$T_{\text{rot}} = 58.65 \text{ d}$$

$$T_{\text{orb}} = 87.97 \text{ d}$$

$$T_{\text{orb}} = \frac{3}{2} T_{\text{rot}}$$

LA RISONANZA HA
BLOCCATO L'EVOLUZIONE
MAREALE

CONDIZIONE PER LA CATTURA IN RISONANZA ESPLICITA.

$$\left| \frac{N_M}{C} \right| < \frac{1}{2} \omega_0^2 \Rightarrow \left(\frac{B-A}{C} \right)_{\text{crit}} = \frac{5}{2} \frac{K}{Q} \left(\frac{R_s}{a} \right)^3 \frac{m_p}{m_s} \frac{1}{|H(p,e)|}$$

K = numero di LOVE \rightarrow quanto si deforma corpo

Q = funzione di dissipazione = $\frac{2\pi E_0}{\Delta E}$ con

ΔE energia dissipata e E_0 energia immagazzinata nel rigonfiamento

	MERCURIO	LUNA
P	$\left(\frac{B-A}{C} \right)_c$	$\left(\frac{B-A}{C} \right)_c$
3	2×10^{-8}	7×10^{-5}
$5/2$	7×10^{-9}	7×10^{-6}
2	3×10^{-9}	8×10^{-7}
$3/2$	2×10^{-9}	10^{-7}
1	10^{-9}	2×10^{-8}

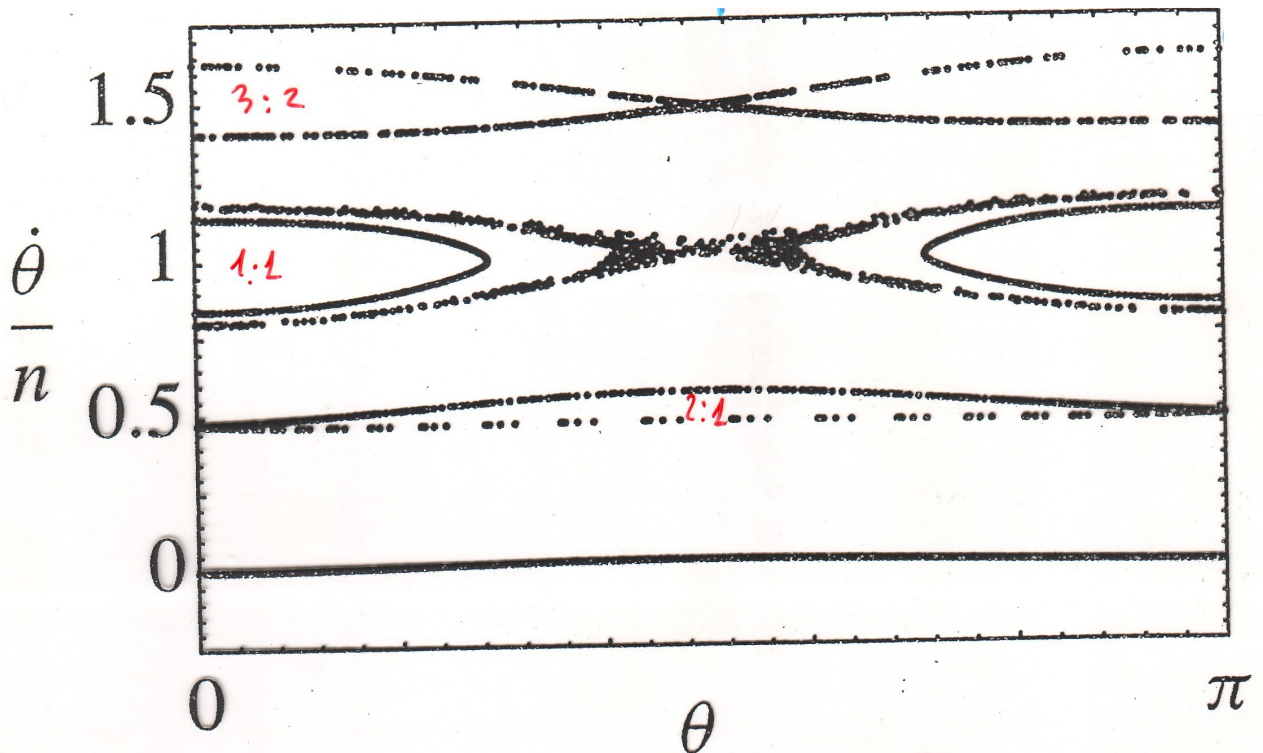
VALORI ATTUALI di
LUNA & MERCURIO
 $\frac{B-A}{C} \sim 3 \times 10^{-4}$

$$e_{\text{Mnc}} \sim 0.206$$

$$e_{\text{Luna}} \sim 0.055$$

- MERCURIO & LUNA POTREBBERO ESSERE STATI CATTURATI IN RISONANZA CON I MAGGIORI DURANTE EVOLUZIONE MAREALE

Soluzione numerica che mostra il valore di θ e $d\theta/dt/n$ al passaggio al pericentro ($M=0$).



• RISONANTE \rightarrow CAOS?

APPROCCIO HAMILTONIANO:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \left(\frac{B-A}{c} \right) m^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2(\theta-f) \quad \dot{\theta} = \dot{\Theta} \quad \text{azione}$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow$$

$$H = \frac{\dot{\Theta}^2}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{B-A}{c} \right) m^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2(\theta-f)$$

$$= \frac{\dot{\Theta}^2}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{B-A}{c} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 m^2 \cos 2(\theta-f)$$

Sviluppo in serie: $H = \frac{\dot{\Theta}^2}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{B-A}{c} \right) m^2 \sum_n K_n(r) \cos 2(\theta - rM)$

Esempio: sistema Terra-Luna

$$H = \frac{(\dot{H})^2}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{B-A}{C} \right) m^2 \cdot \left[\right.$$

$$\left(-\frac{e}{4} + \frac{e^3}{32} \right) \cos(2\theta - M) + \quad n=1 \quad 2:1$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e^2 + \frac{13}{32} e^4 \right) \cos(2\theta - 2M) + \quad n=2 \quad 1:1$$

$$\left(\frac{7}{4} e - \frac{123}{32} e^3 \right) \cos(2\theta - 3M) + \quad n=3 \quad 2:3$$

$$\left(\frac{17}{4} e^2 - \frac{115}{12} e^4 \right) \cos(2\theta - 4M) + \quad n=4 \quad 1:2$$

$$\left(\frac{845}{96} e^3 - \frac{32525}{1536} e^5 \right) \cos(2\theta - 5M) + \dots \quad \vdots$$

p	n
3	6
$\frac{5}{2}$	5
2	1
$\frac{3}{2}$	3
:	:

Cellati, Journal of Applied
Mathematics & Physics 41, 453
(1990)

Sovrapposizione delle risonanze e caos (criterio di Chiricov)

HAMILTONIANO IN RISONANZA

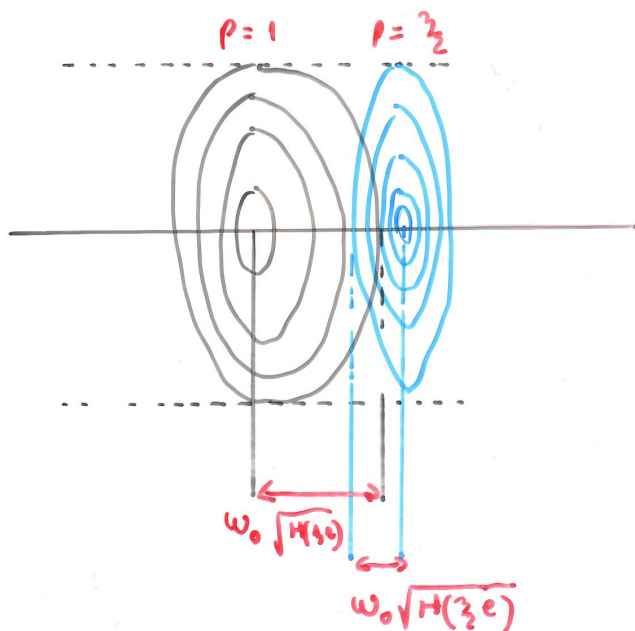
$$H = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega_0^2 H(p, e) \psi(\varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2} \left(\beta - \frac{A}{C} \right) m^2$$

$$\varphi = \dot{\theta}$$

LARGHEZZA di RISONANZA (EX. PENDOLO)

$$\Delta \varphi = \sqrt{\frac{2\beta_0}{A_1}} = 2 \omega_0 \sqrt{H(p, e)}$$

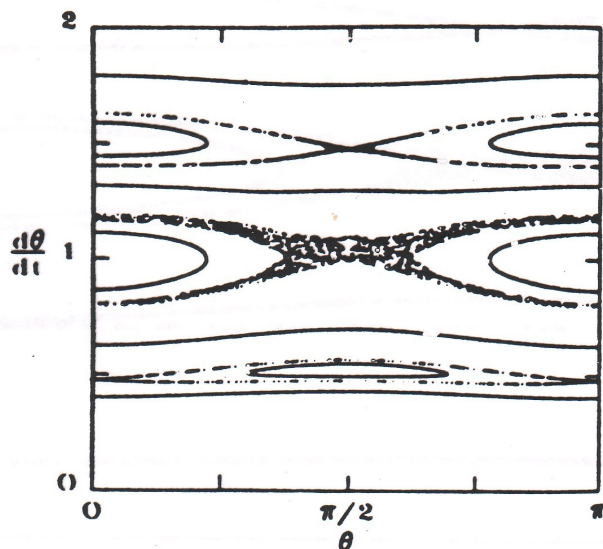


CONDITIONE PER LA
SOVRAPPOSIZIONE delle
RISONANZE:

$$\omega_0^{SR} \sqrt{H(1, e)} + \omega_0^{SR} \sqrt{H(\frac{3}{2}, e)} = \left(\frac{3}{2} - 1 \right) m = \frac{1}{2} m$$

per $\omega_0 \geq \omega_0^{SR} \Rightarrow$ SOVRAPPOSIZIONE di
RISONANZE e CAOS!

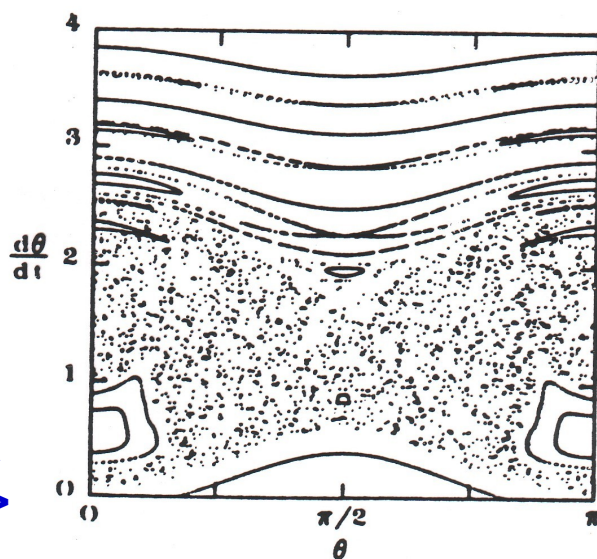
Nel passato i satelliti potevano avere orbite più eccentriche, aumenta $H(p,e)$



← piccoli
VALORI di
 $e \downarrow$
 $H(p,e)$ piccola

ALTI VALORI di $e \Rightarrow \omega_0 > \omega^{RO} \Rightarrow \underline{\text{CAOS}}$

- LE 3 RISONANZE
DANNO ORIGINE
AD UNA ESTESA
REGIONE CAOTICA.



**Se c'è evoluzione caotica
la marea risulta sfasata ->
riscaldamento mareale**

**I satelliti maggiormente irregolari sono Miranda (syn),
Iperione (Cao) e Mimas (Syn). Miranda e Mimas erano
caotici nel passato?**