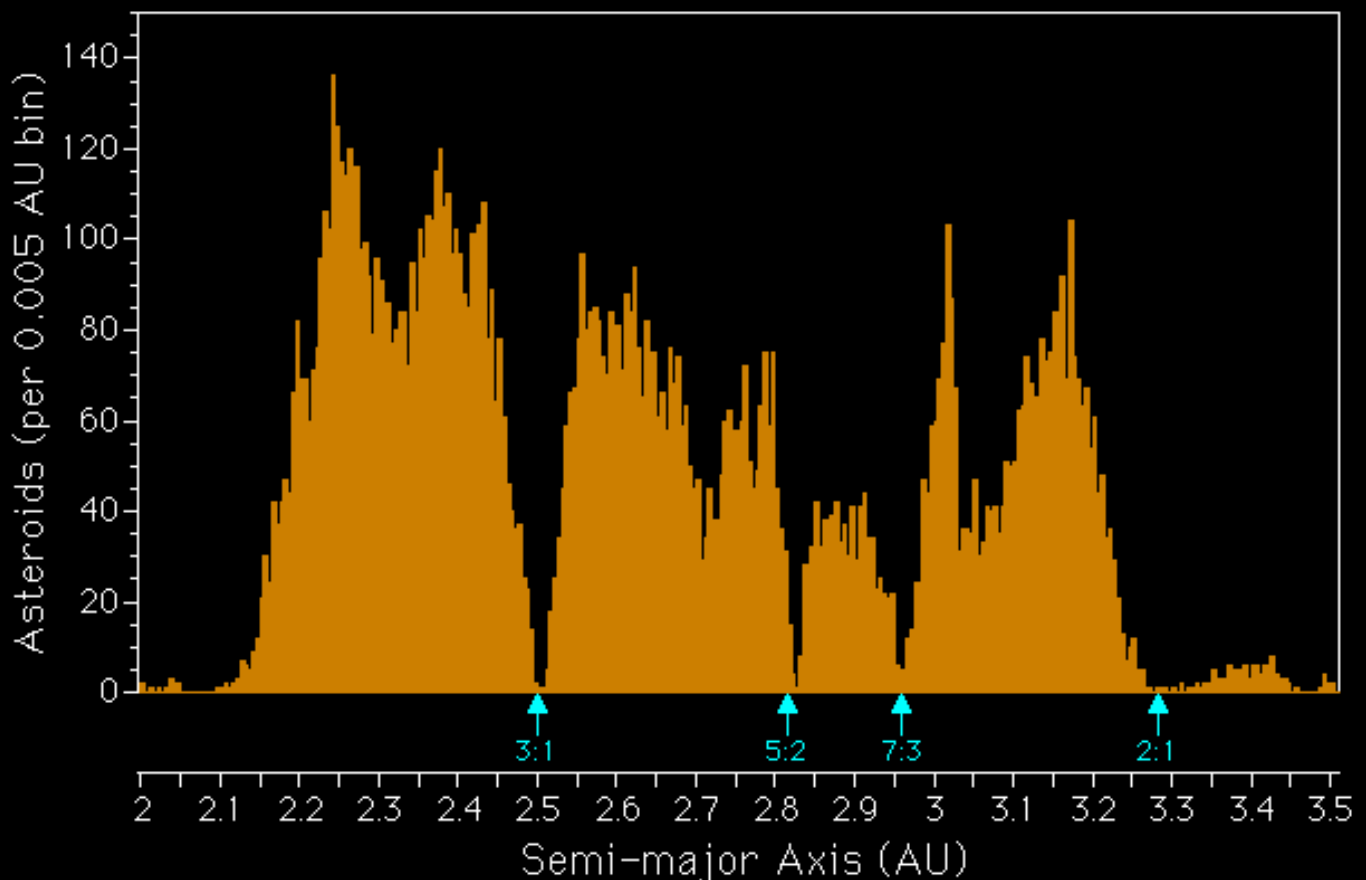


CAPITOLO 7

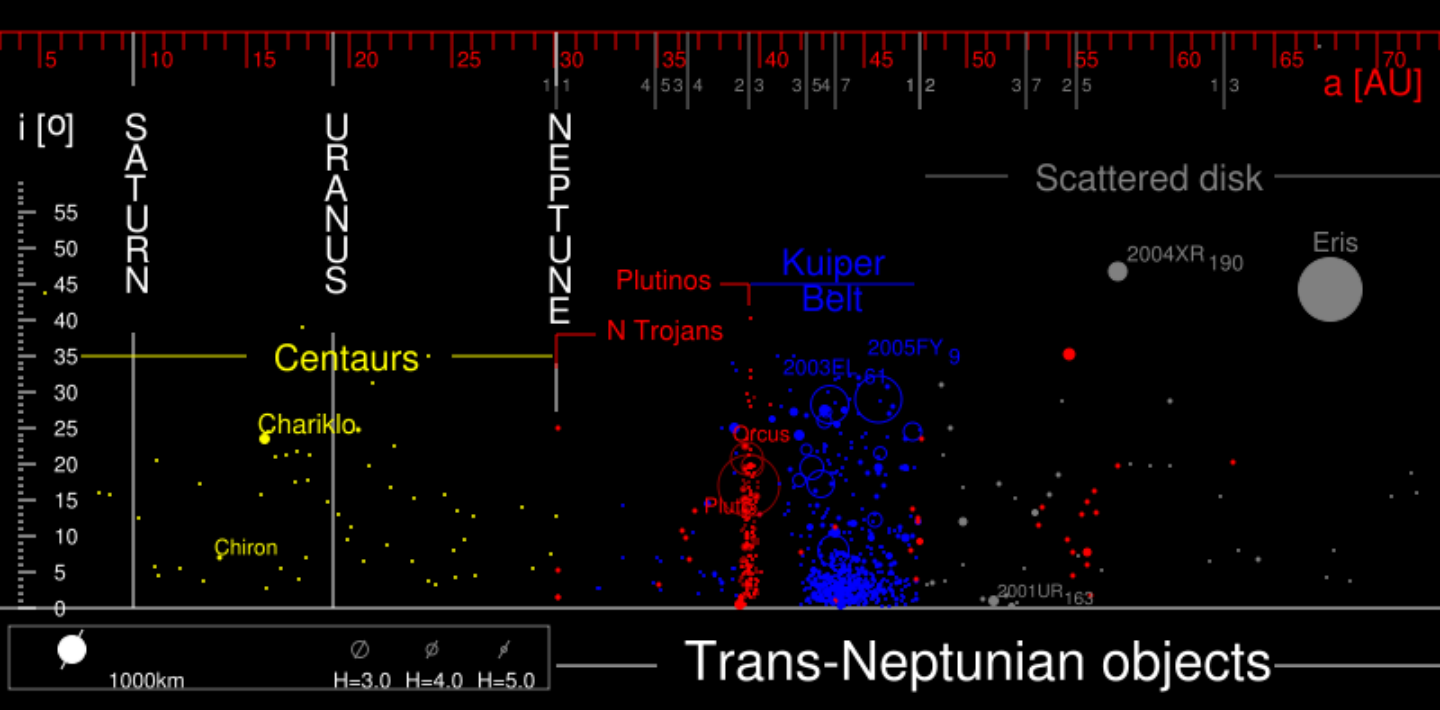
- Risonanze in moto medio nel problema a 3 corpi ristretto
- Modello del pendolo per la dinamica risonante
- Ampiezza di risonanza
- Sovrapposizione di risonanze e caos
- Esempi numerici
- Altre sorgenti di moto caotico: incontri gravitazionali ravvicinati con pianeti

Kirkwood gaps: lacune nella distribuzione in numero degli asteroidi della **Main Belt (fascia asteroidale). Queste lacune sono dovute al moto caotico all'interno delle risonanze in moto medio con Giove.**

Main Asteroid Belt Distribution Kirkwood Gaps



Kuiper Belt: Disco di oggetti che si estende oltre l'orbita di Nettuno.



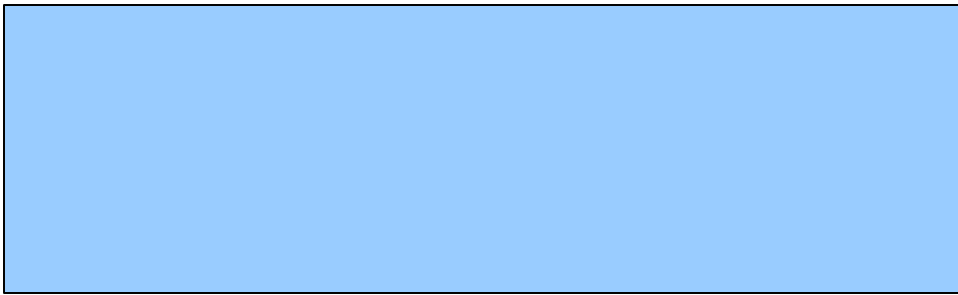
Largest known Kuiper Belt objects



Tra i KBOs (o TNOs) ci sono molti oggetti comparabili a Plutone. Pianeti o no?

Definizione di pianeta

- **Orbita attorno al Sole**
- **Ha sufficiente massa perche' l'auto gravita' ne renda la forma quasi sferica (equilibrio idrostatico)**
- **Ha pulito la zona attorno alla sua orbita di materiale (planetesimi)**



Cerere

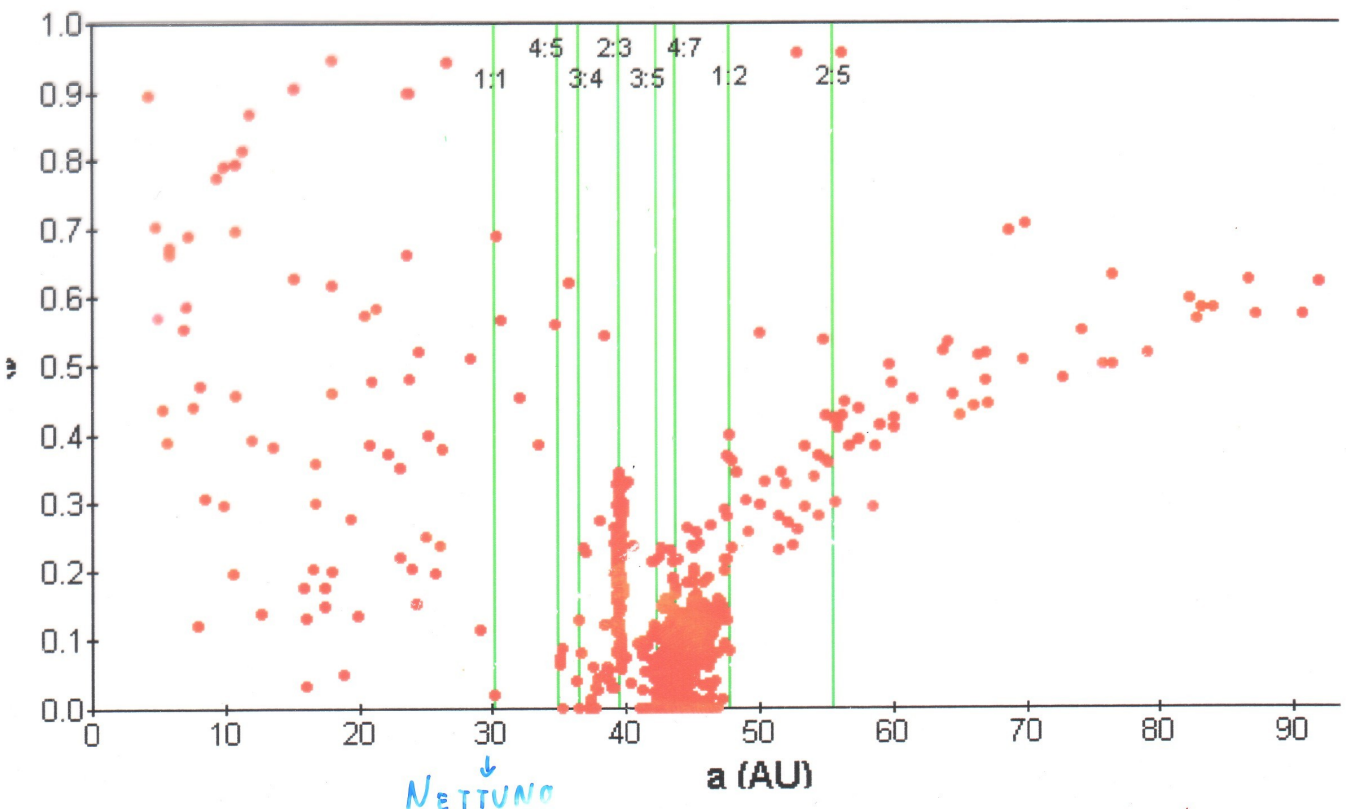
Pluto

Eris

D	975×909 km	2306 km	2400 km
M	9.5×10^{20} kg	1.305×10^{22} kg	$\sim 1.6 \times 10^{22}$ kg
a	2.766 AU	17.14 AU	67.69 AU
e	0.08	0.25	0.44
i	10.59°	17.14°	44.19°

Anche la distribuzione della **Kuiper Belt** è modificata dalle risonanze. I Plutini sono oggetti in risonanza 2:3 con il periodo orbitale di Nettuno. La risonanza protegge da impatto su Nettuno. Plutone: la sua orbita interseca quella di Nettuno ($e \sim 0.25$, $i \sim 17.1^\circ$) ma è protetto da incontri ravvicinati con Nettuno dalla risonanza.

Outer solar system objects: e vs. a

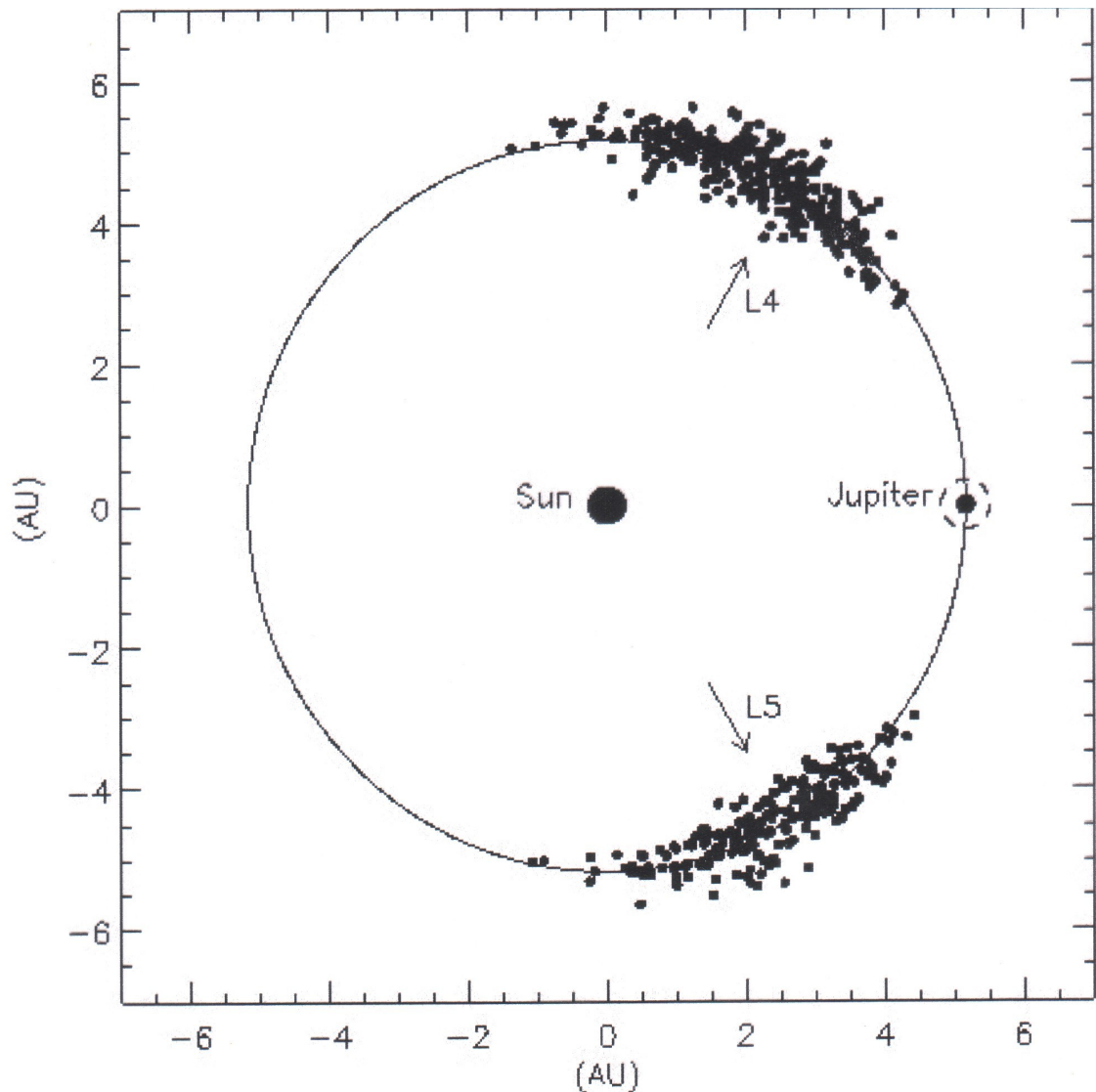


Gli asteroidi **Troiani** sono in una risonanza 1:1

Giove: ~ 2000 oggetti

Marte: 3

Nettuno: 4



Le orbite Troiane per Venere, Urano e Saturno sono instabili su 4.5 Gyr.

Formulazione Hamiltoniana del problema a 2 corpi

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \mu = G(m_1 + m_2)$$

$$\mu_* \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G(m_1 m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \mu_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec{p} = \mu_* \vec{v}}$$

$$H_K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\mu_*} - \frac{\mu \mu_*}{r} \quad \begin{cases} \dot{\vec{r}} = \nabla_{\vec{p}} H_K \\ \dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{r}} H_K \end{cases}$$

VARIABILI di DELAUNAY: (CANONICHE)

$$l = M$$

$$g = \omega$$

$$h = \Omega$$

$$L = \mu_* \sqrt{\mu a}$$

$$G = \mu_* \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad \Rightarrow |\vec{S}|$$

$$H = \mu_* \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i \quad \Rightarrow J_z$$

$$H_K = -\frac{\mu^2 \mu_*^3}{2 L^2}$$

$$\dot{e} = \frac{\partial H_K}{\partial L} = n$$

Trasformazioni canoniche-breve tutorial

DEFINIZIONI ↓

1) PRESERVANO STRUTTURA HAMILTONIANA

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$H(p, q) = K(w, z)$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial K}{\partial w_i}$$

$$\dot{w}_i = -\frac{\partial K}{\partial z_i}$$

2) PRESERVANO L'AREA

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{pmatrix} = 1$$

Jacobiano

3) ESISTE UNA FUNZIONE GENERATRICE a variabili miste:

$$p = \frac{\partial F(q, w)}{\partial q} \quad z = \frac{\partial F(q, w)}{\partial w}$$

es. $F = K q w$
 $\begin{cases} w = \frac{p}{K} \\ z = K q \end{cases}$

Ex: Oscillatore armonico

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + m \frac{\omega^2 q^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -m \omega^2 q \\ \dot{q} &= \frac{p}{m} \end{aligned}$$

$$F(q, z) = \frac{m}{2} \omega q^2 \cotg z$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m \omega q \cotg z$$

$$w = -\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{m \omega q^2}{2 \sin^2 z}$$

\Rightarrow

$$q = \pm \sqrt{\frac{2 w}{m \omega}} \sin z$$

$$p = \pm \sqrt{2 m \omega w} \cos z$$

$$K(w, z) = H(p, q) = \omega w \cos^2 z + \omega w \sin^2 z = \omega w$$

$$w = w_0$$

\Rightarrow

$$q(t) = \pm \sqrt{\frac{2 w_0}{m \omega}} \sin(\omega t + z_0)$$

$$z = \omega t + z_0$$

$$p(t) = \pm \sqrt{2 m \omega w_0} \cos(\omega t + z_0)$$

RISOLTE EQ. del MOTO!

Descrizione Hamiltoniana del problema a 3 corpi ristretto

$$\bullet M_0, m_1, m_2 = 0$$

$$\bullet m_1 \text{ SU ORBITA CIRCOLARE}$$

$$\bullet i_1 = i = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = - \frac{GM_0 \bar{r}}{r^3} + Gm_1 \left(\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}}{|\bar{r}_1 - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_1}{|r_1|^3} \right) \quad \text{con}$$

$$V(\bar{r}) = - \frac{GM_0}{r} - Gm_1 \left(\frac{1}{|r - r_1|} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_1}{|r_1|^3} \right)$$

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_0}{r} - Gm_1 \left(\frac{1}{|r - r_1|} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_1}{|r_1|^3} \right) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_0}{r} - \mathcal{R}(r, \bar{r}_1)$$

$$L = \sqrt{GM_0 a}$$

$$l = M$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{GM_0 a (1 - e^2)}$$

$$g = \omega$$

$$H = G \cos i = \sqrt{GM_0 a (1 - e^2)} \cos i$$

$$h = \Omega$$

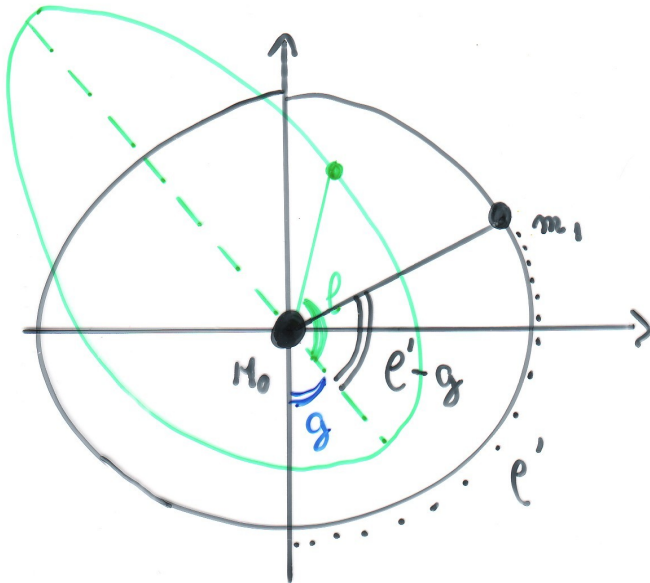
$$H = - \frac{G^2 M_0^2}{2 L^2} - \mathcal{R}(L, G, H, l, g, h, t)$$

$$\mathcal{R}() = G m_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K_{ij}^{(1)}(G, L) \cos(i\ell + j(e' - g))$$

$$e' = t$$

PROBLEMA A 3 CORPI PLANARE \Rightarrow H costante del moto

$$Q(\) = G m_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K^{i,j}(G, L) \cos(i\ell + j(\ell' - g))$$



$$e' = m' t$$

Il tempo coincide con l'anomalia media del pianeta a meno di una costante

Perché i va da 0 a ∞ e non da $-\infty$ a $+\infty$? Perché $\cos(x) = \cos(-x)$ quindi:

$$\cos(x+y) = \cos(-x-y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(-x+y)$$

RISONANZA: se

$$i \cdot \dot{e}(L, G) + j(\dot{e}' - \dot{g}(L, G)) = 0$$

$$(p+q)\dot{e} - p(\dot{e}' - \dot{g}) = 0$$

$$i = p+q$$

$$j = -p$$

$$\left[H = -\frac{G M_0^2}{2 L^2} - G m_1 K^{00} - G m_1 K^{i,j} \cos \psi \right] \begin{matrix} \psi \\ \parallel \\ \text{ARGOMENTO} \\ \text{CRITICO.} \end{matrix}$$

$$\psi = i\ell + j(\ell' - g)$$

Variabili di risonanza di Poincaré

$$\phi = l - (l' - g)$$

$$\Phi = [(p+q)G - pL]/q$$

$$\Psi = (p+q)l - p(l' - g)$$

$$\Psi = (L - G)/q$$

Funzione generatrice:

$$f(t, \bar{q}, \bar{p}') \Rightarrow f(t, l, g, \Psi, \Phi) = [(p+q)l - p(l' - g)]\Psi + (l + g - l')\Phi$$

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \Psi}$$

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial \Phi}$$

$$L = \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$G = \frac{\partial f}{\partial g}$$

ALLORA LA TRASFORMAZIONE È CANONICA. $[m't = l']$

$$K = H + \frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{G^2 M_0^2}{2(\Phi + (p+q)\Psi)^2} - pm'\Psi - Gm_1 K^{00}(\Psi, \Phi) + m'\phi - Gm_1 K^{p+q, p}(\Psi, \Phi) \cos \psi - \bar{R}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial l'} \frac{\partial l'}{\partial t} = - pm'\Psi - m'\phi$$

• Si trascura $- Gm_1 K^{00}$ perché piccolo

RISONANZE del I° ordine: $q = \pm 1$

($q = -1$ se asteroide su orbita interna rispetto al pianeta)

$$J = p+q \quad (\text{asteroide})$$

$$J+1 = p \quad (\text{pianeta})$$

2:1, 3:2,

Condizione di risonanza e modello del pendolo

$$K = \frac{-G M_0^2}{2(\phi + j\psi)^2} - (j+1)m'\psi - m'\phi - G m_1 \bar{\kappa}(\psi, \phi) \cos \psi$$

$$\phi = -\sqrt{G M_0 a} \left(j\sqrt{1-e^2} - j - 1 \right)$$

$$\psi = -\sqrt{G M_0 a} \left(1 - \sqrt{1-e^2} \right)$$

• Segno negativo
da $q = -1$

CONDIZIONE di RISONANZA:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial K}{\partial \psi} = \frac{G^2 M_0^2 j}{(\phi + j\psi)^3} - (j+1)m' = 0$$

(le termine
 $G m_1 \bar{\kappa} \cos \psi$
si media
a 0)

$$j - (j+1)\frac{m'}{m} = 0$$

$$\boxed{\frac{m}{m'} = \frac{a_p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{j+1}{j}}$$

(ex. 2:1 $a_{n15} = 3.278 \mu\text{u}$)

DINAMICA IN RISONANZA \Rightarrow MODELLO del PENDOLO

Si sviluppa K in serie di Taylor attorno a
 ψ_{res} (valore di ψ in condizione di risonanza)

$$\frac{-G^2 M_0^2}{2(\phi + j\psi_{res})^2} + \frac{G^2 M_0^2 j}{(\phi + j\psi_{res})^3} (\psi - \psi_{res}) +$$

$$- \frac{3}{2} \frac{G^2 M_0^2 j^2}{(\phi + j\psi_{res})^4} (\psi - \psi_{res})^2 + \dots$$

$$\dots - (j+1) m' \psi_{res} - (j+1) m' (\psi - \psi_{res}) + \dots$$

$$K = A_0 + A_1 (\psi - \psi_{res}) + A_2 (\psi - \psi_{res})^2 + B_0 \cos \psi$$

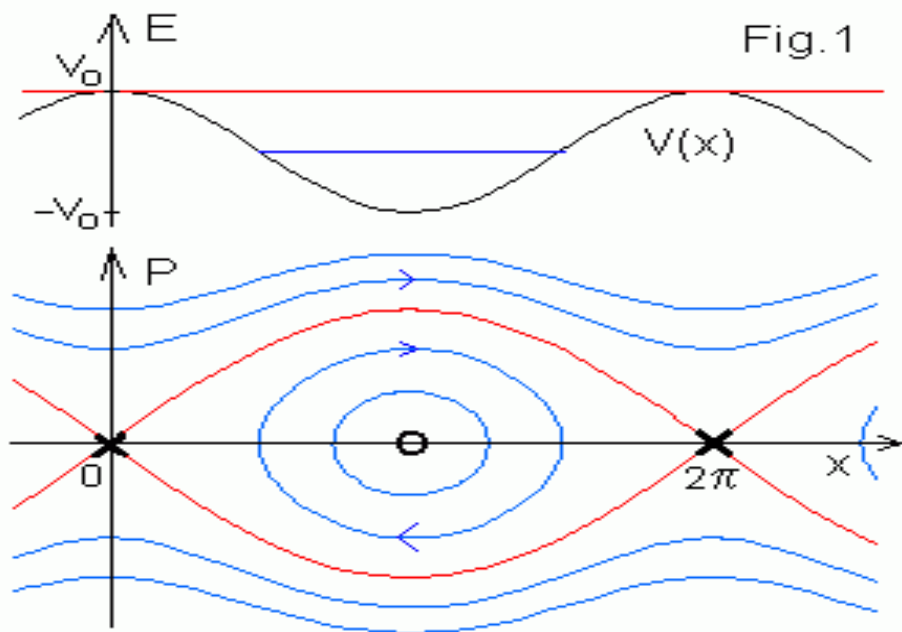
$$A_0 = \frac{-G^2 M_0^2}{2(\phi + j\psi_{res})^2} - (j+1) m' \psi_{res}$$

$$A_1 = \frac{G^2 M_0^2 j}{(\phi + j\psi_{res})^3} - (j+1) m' = 0 \rightarrow \text{CONDIZIONE di RISONANZA}$$

$$A_2 = \frac{-3 G^2 M_0^2 j^2}{2(\phi + j\psi_{res})^4}$$

- ϕ costante del moto perché K non dipende da ϕ

$$K = A_0 + A_2 \psi^{*2} + B_0 \cos \psi$$



Curve di livello \rightarrow equazione

$$\Psi = \Psi_{res} \pm \left(\frac{K - A_0 - B_0 \cos \varphi}{A_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

K energia
vinca a
seconda della
curva di livello

SEPARATRICE:

$\Psi(\varphi=0) = \Psi_{res}$ passa per questo punto
quindi $K = A_0 + B_0$

$$\Psi^{sup} = \Psi_{res} \pm \left(\frac{B_0}{A_2} (1 - \cos \varphi) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Psi_{res} \pm \sqrt{\frac{2B_0}{A_2}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

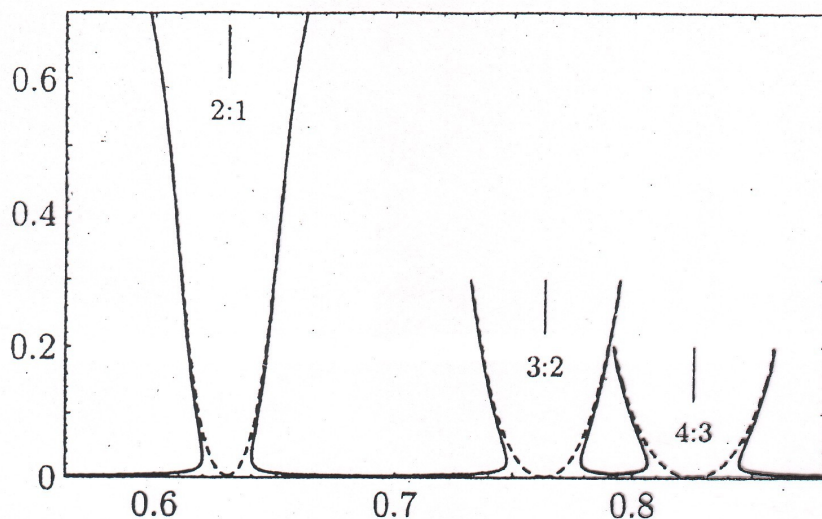
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$$

$$\Delta \Psi = \sqrt{\frac{2B_0}{A_2}}$$

SEMIAMPIEZZA della
RISONANZA

Ampiezza di risonanza negli elementi orbitali

Normalizzatore
al
semi asse del
pianeta a' .



valore nominale di
 n in risonanza

n_{nom}
↓

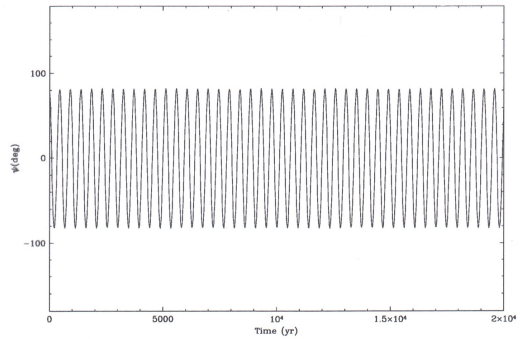
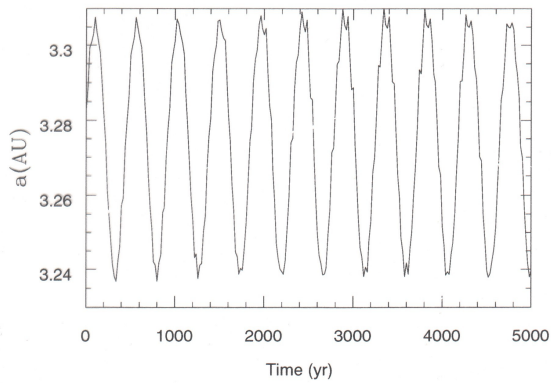
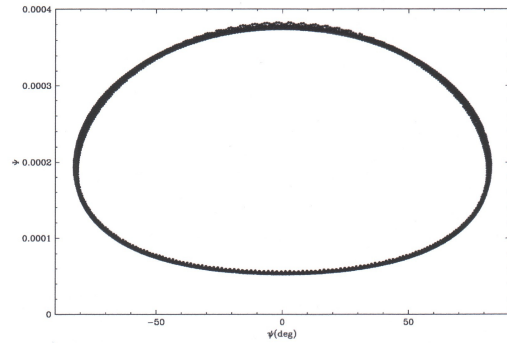
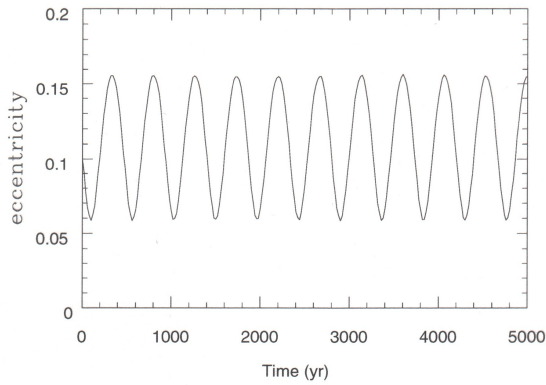
$$\delta n = \pm \sqrt{12 n^2 e \frac{m}{M_\odot} \frac{a}{a'} f\left(\frac{a}{a'}\right)}$$

$$n_{nom} = \frac{5+1}{5} n'$$

$$\delta a = - \frac{2a}{3n} \delta n \Rightarrow a \pm \delta a$$

(Vedi anche pg. 338 Murray & Dermott.)

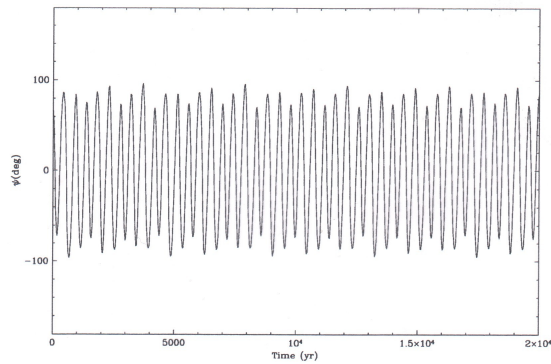
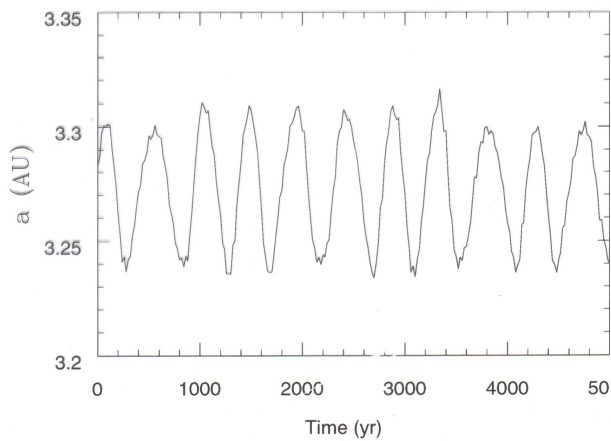
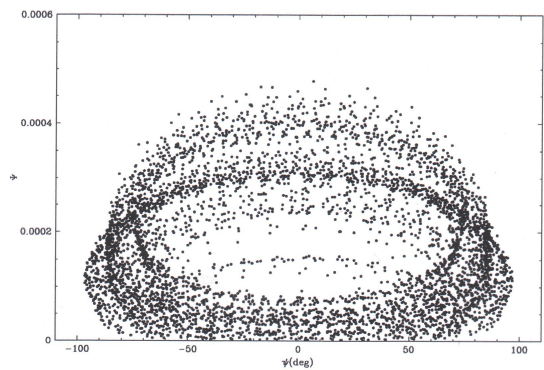
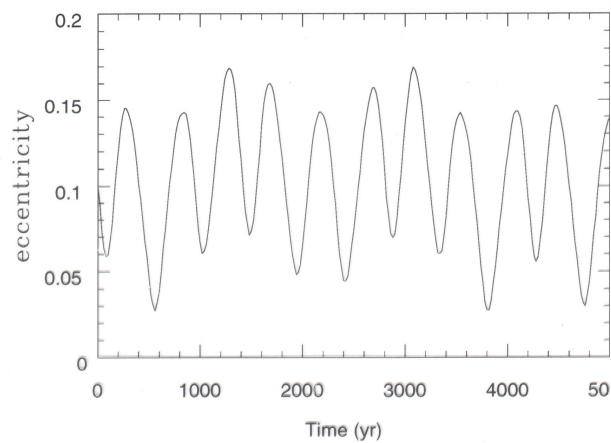
Esempi numerici dell'evoluzione orbitale in risonanza 2:1 nel problema a 3 corpi ristretto

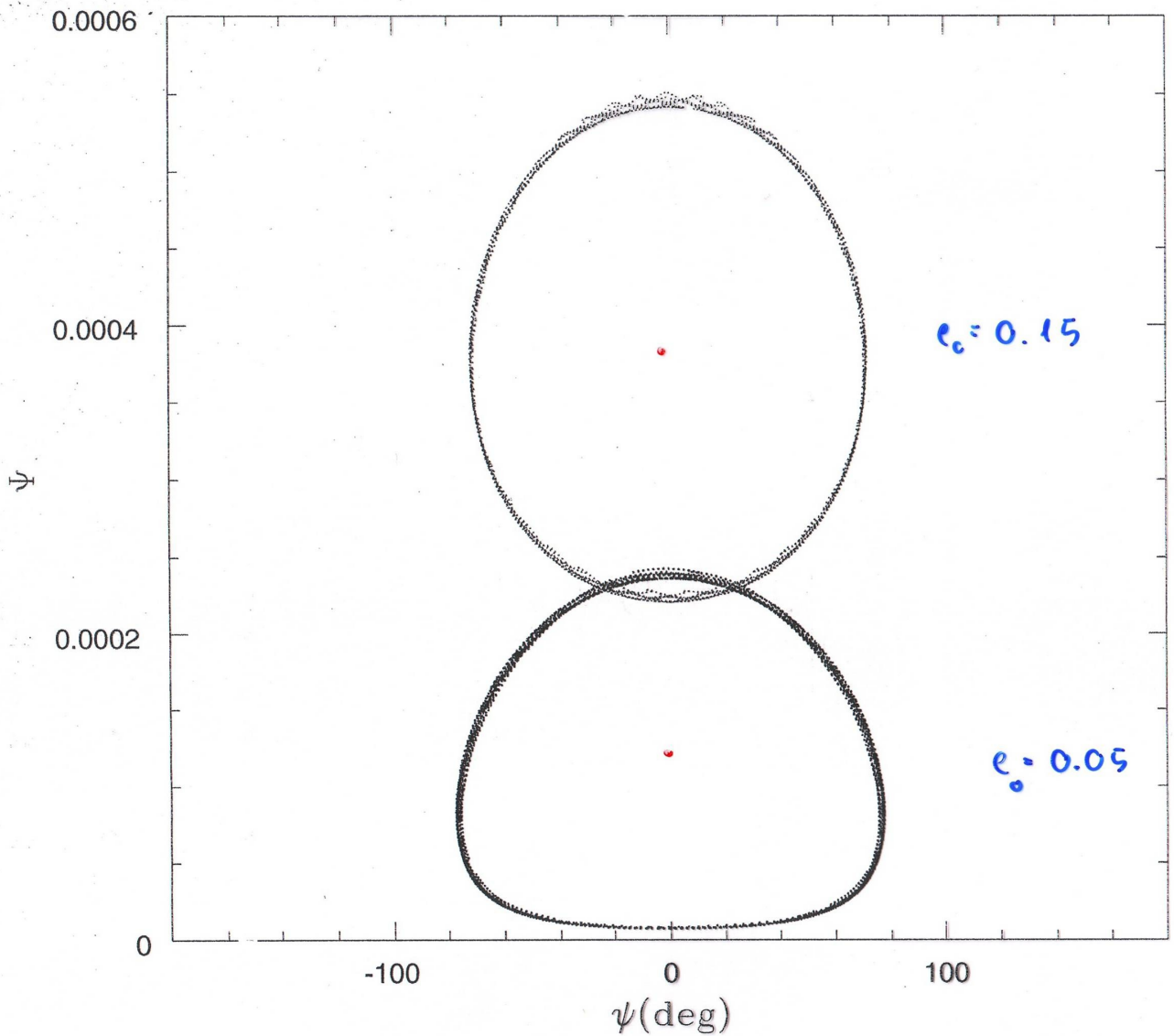


**Elementi orbitali e risonanti dell'asteroide.
L'eccentricità di Giove è 0.0**

Eccentricità di Giove posta a 0.05.

Il valore di Ψ_{res} non è più costante, entrano in gioco altri termini perturbativi.





Ψ_{res} dipende anche da eccentricità dell'asteroide. Il centro di librazione si sposta perché dipende da $(1-e^2)^{1/2}$

Funzione di disturbo e risonanze nel problema a 3 corpi con orbite inclinate.

La funzione di disturbo è:

$$R = Gm_j/a_j \sum e^{l|l|} e^{l'|l'} i^{|p|} i^{|p'|} C_{q,q',j,j',p,p'}(a,a') \cos(q\lambda + q'\lambda' + j\tilde{\omega} + j'\tilde{\omega}' + p\Omega + p'\Omega')$$

Per la risonanza 3:1 ad esempio i possibili argomenti critici sono:

- $\cos(3\lambda' - \lambda - 2\tilde{\omega})$
- $\cos(3\lambda' - \lambda - 2\tilde{\omega}')$
- $\cos(3\lambda' - \lambda - 2\Omega)$
- $\cos(3\lambda' - \lambda - \Omega - \Omega')$
-

Ciascuno di questi termini ha un valore di ψ_{res} leggermente spostato.

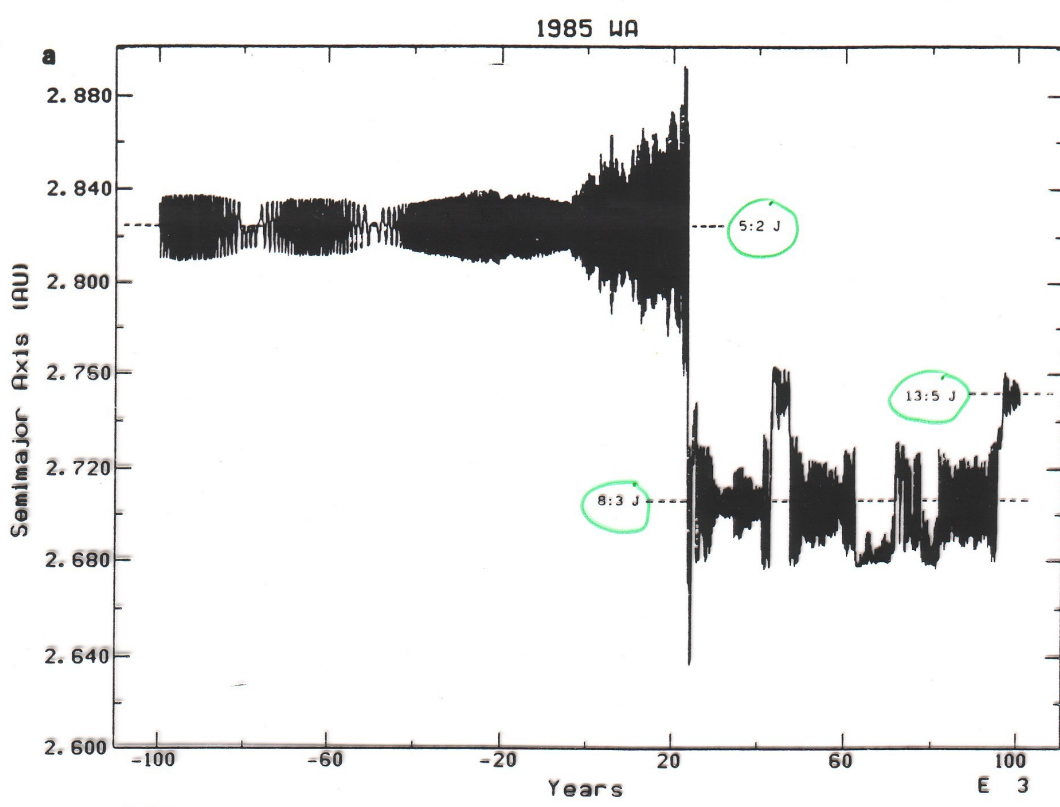
Pg. 261 Murray & Dermott, descrizione della funzione di disturbo che dà origine alla risonanze 3:1. I coefficienti A_i dipendono solo dai semiassi maggiori

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\mu'} \langle \mathcal{R} \rangle = & A_0 + A_1 e^2 + A_2 s^2 + A_3 e e' \cos(\varpi' - \varpi) + A_4 s s' \cos(\Omega' - \Omega) \\ & + A_5 e^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\varpi) + A_6 e e' \cos(3\lambda' - \lambda - \varpi' - \varpi) \\ & + A_7 e'^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\varpi') + A_8 s^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\Omega) \\ & + A_9 s s' \cos(3\lambda' - \lambda - \Omega' - \Omega) + A_{10} s'^2 \cos(3\lambda' - \lambda - 2\Omega'), \end{aligned} \quad (6.194)$$

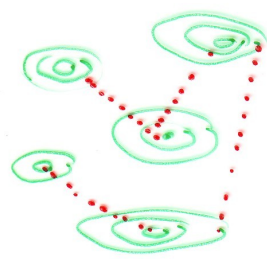
Origine del caos (criterio di Chiricov)

- Sovrapposizione di risonanze in moto medio e risonanze secolari nello spazio delle fasi
- Sovrapposizione di diversi termini perturbativi della stessa risonanze in moto medio
- Sovrapposizione di diverse risonanze in moto medio (regione esterna della Main Belt).

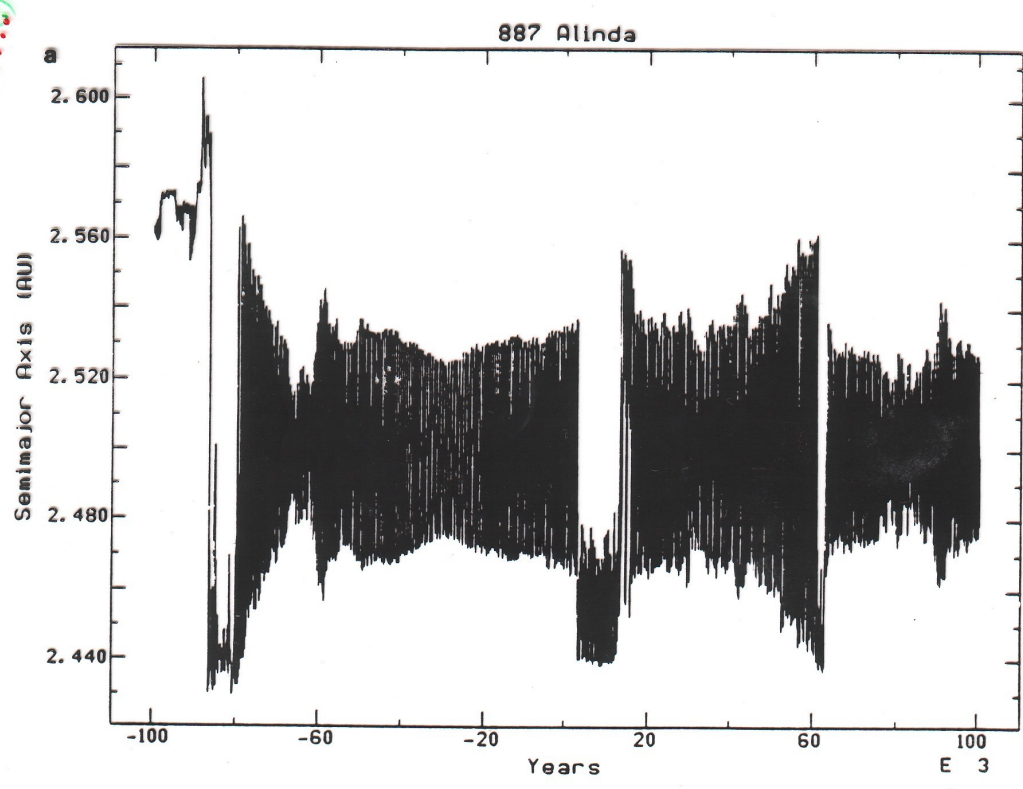
Asteroide NEO e sue risonanze con la Terra.



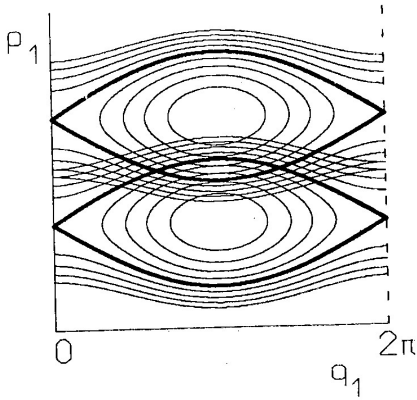
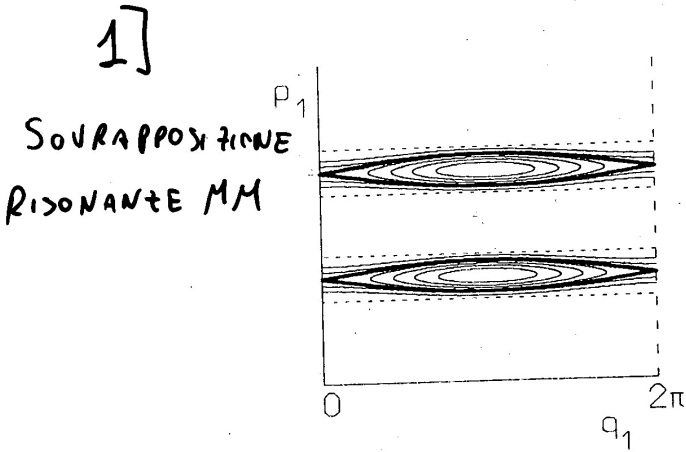
1) Diverse
risonanze in
Moto Medio



2) Diversi
termini
della 3:1

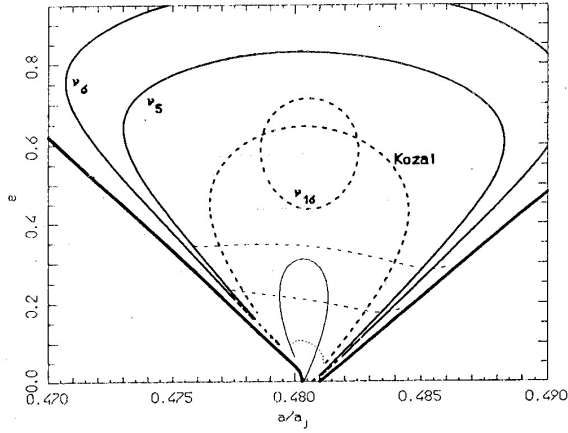
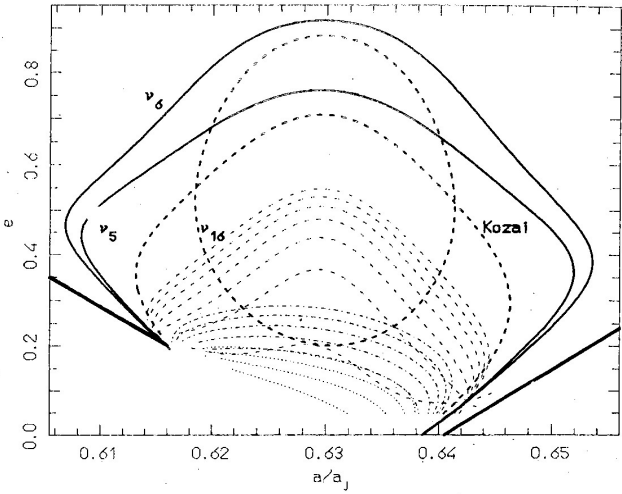


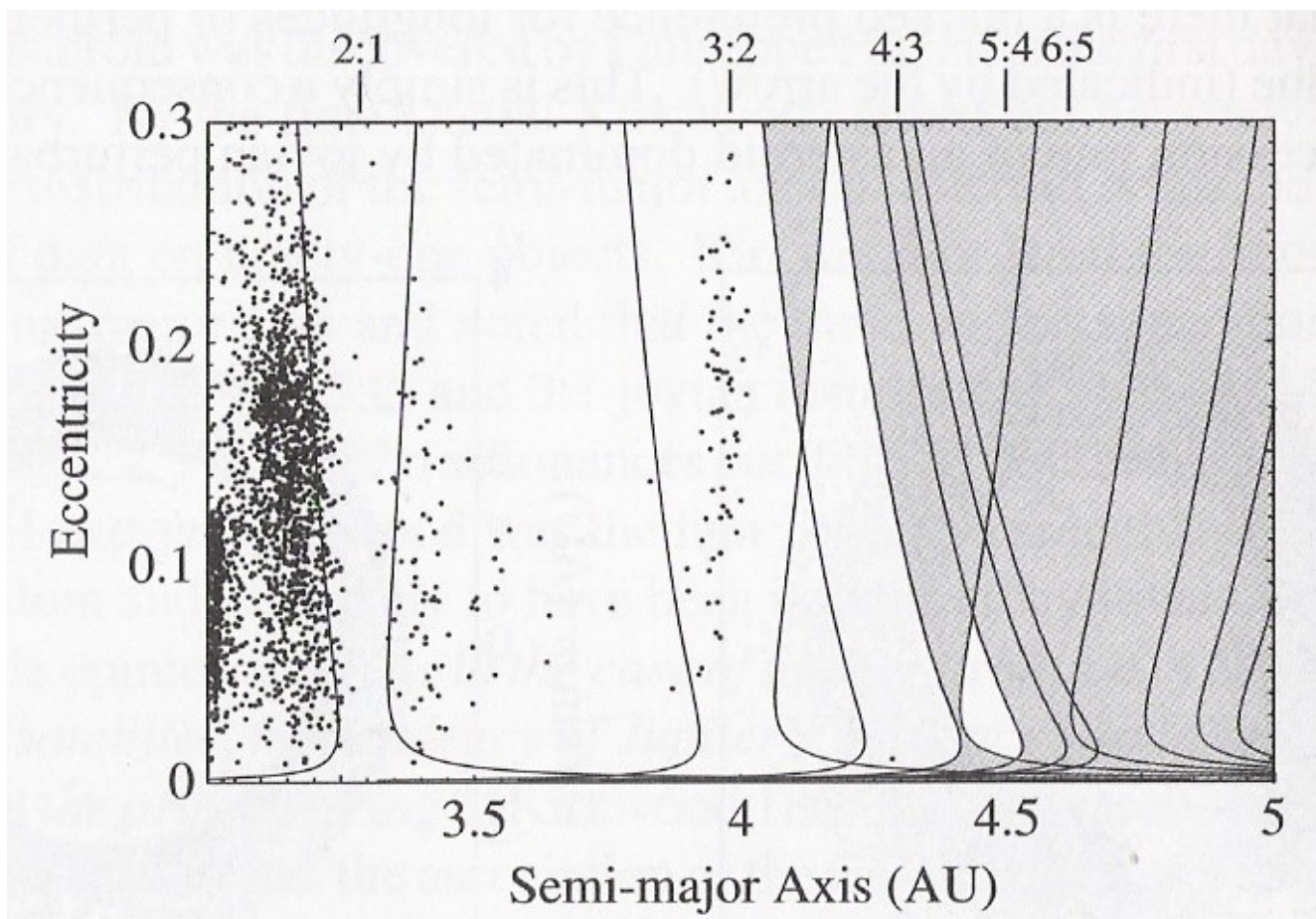
Esempi di sovrapposizione di risonanze



2)

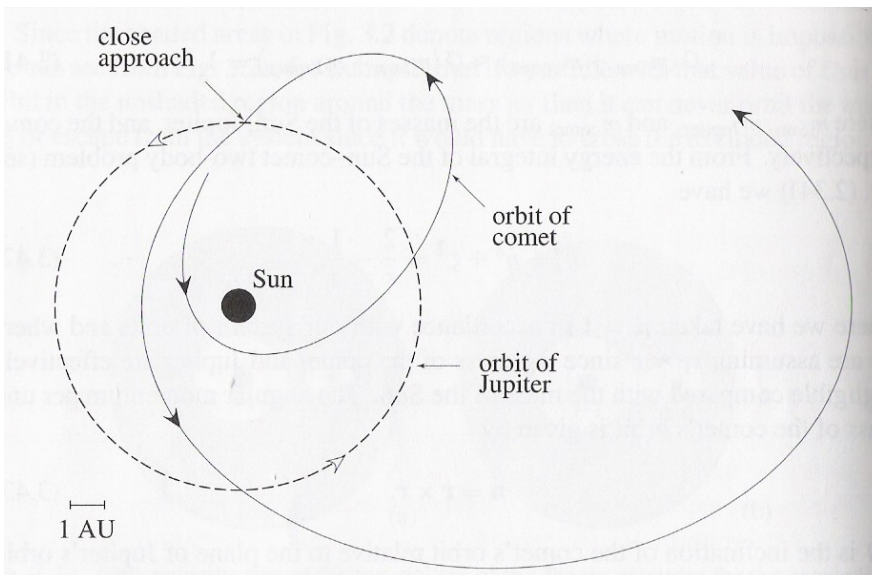
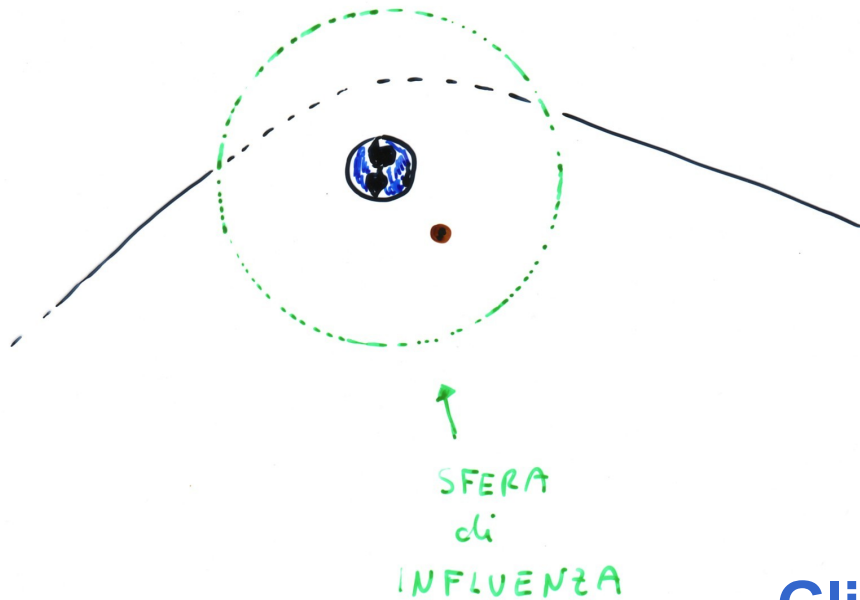
SOVRAPPOSIZIONE RISONANZE MM. - SECOLARI





Sovrapposizione di risonanze in moto medio con Giove nella fascia asteroidale. Le regioni grigie sono caratterizzate da moto caotico causato dalla sovrapposizione.

Effetti sui parametri orbitali di incontri gravitazionali ravvicinati con i pianeti. Questo fenomeno è particolarmente rilevante per asteroidi NEO e comete a corto periodo.



Gli incontri ravvicinati causa grosse variazioni degli elementi orbitali.

Gli incontri possono essere semplici (passaggio iperbolico) oppure più complessi con fenomeni di cattura in orbita temporanea instabile.

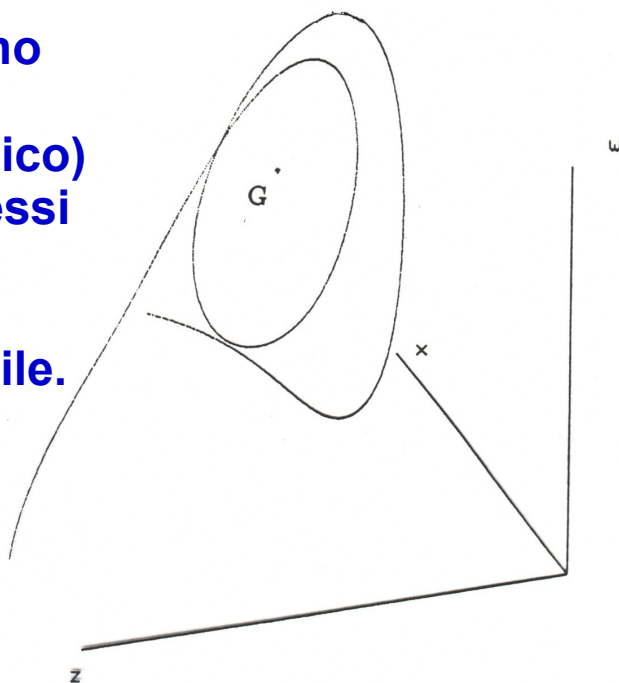


Fig. 6: Traiettoria dell'asteroide 1980 VA rispetto a Giove (punto G) durante un close approach. Il piano x, z è il piano orbitale del pianeta. Si nota la temporanea cattura in orbita attorno a Giove.

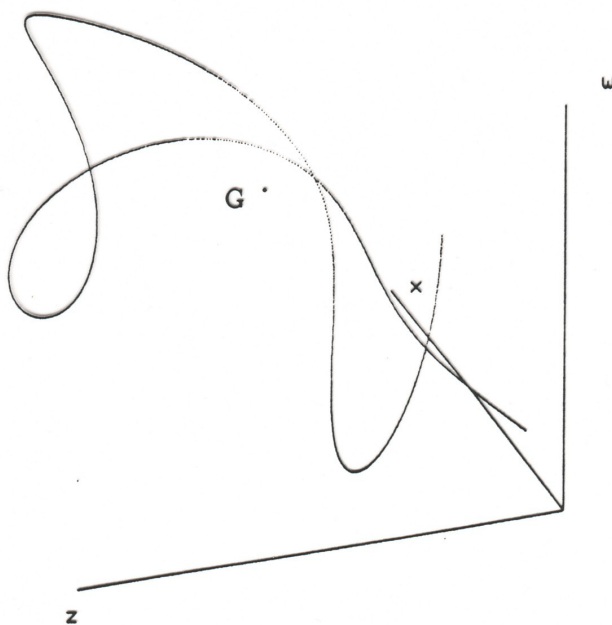
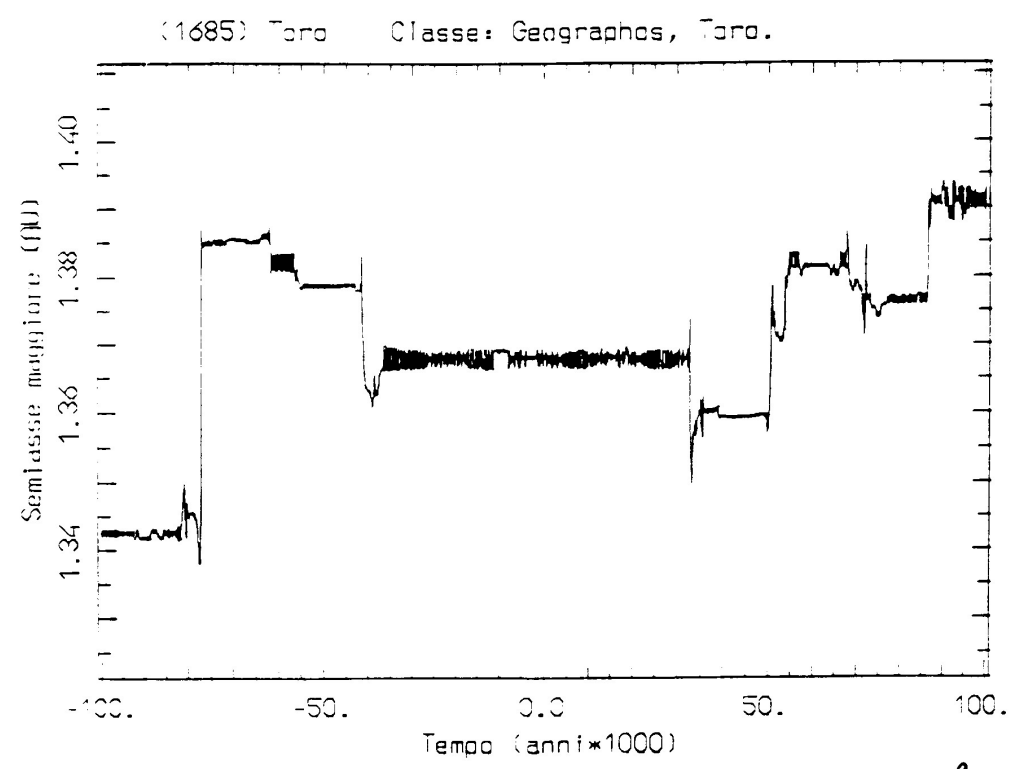
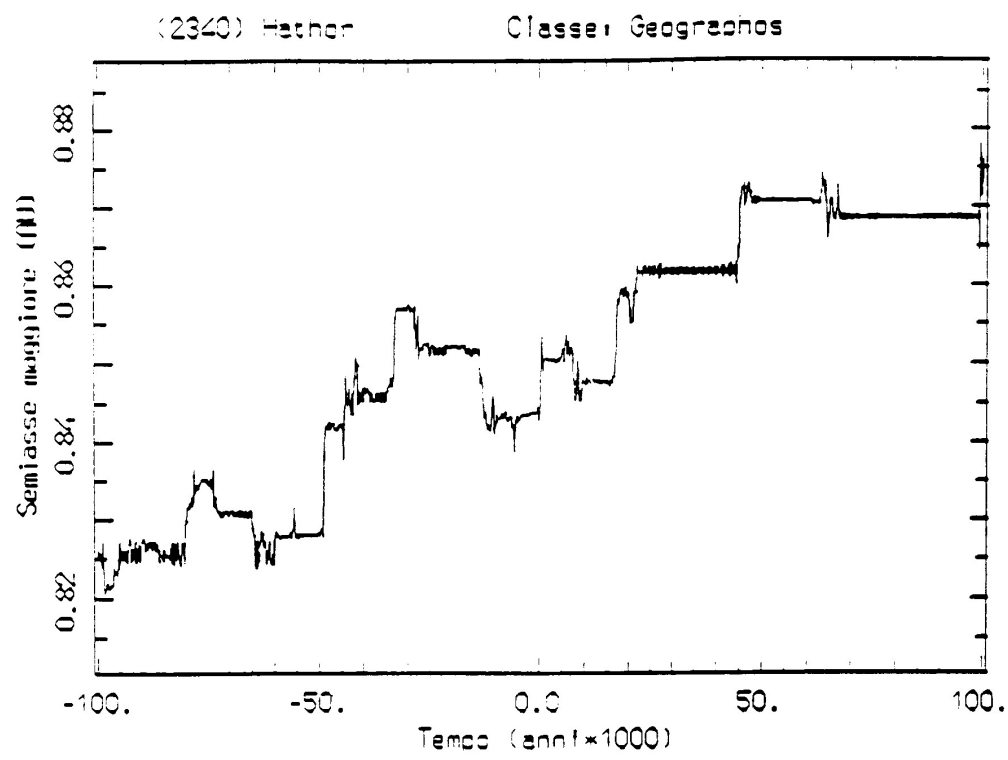


Fig. 7: Close approach di difficile interpretazione tra 1980 VA e Giove.

Esempio di orbita di asteroide NEO. Gli incontri ravvicinati causano variazioni impulsive degli elementi orbitali.

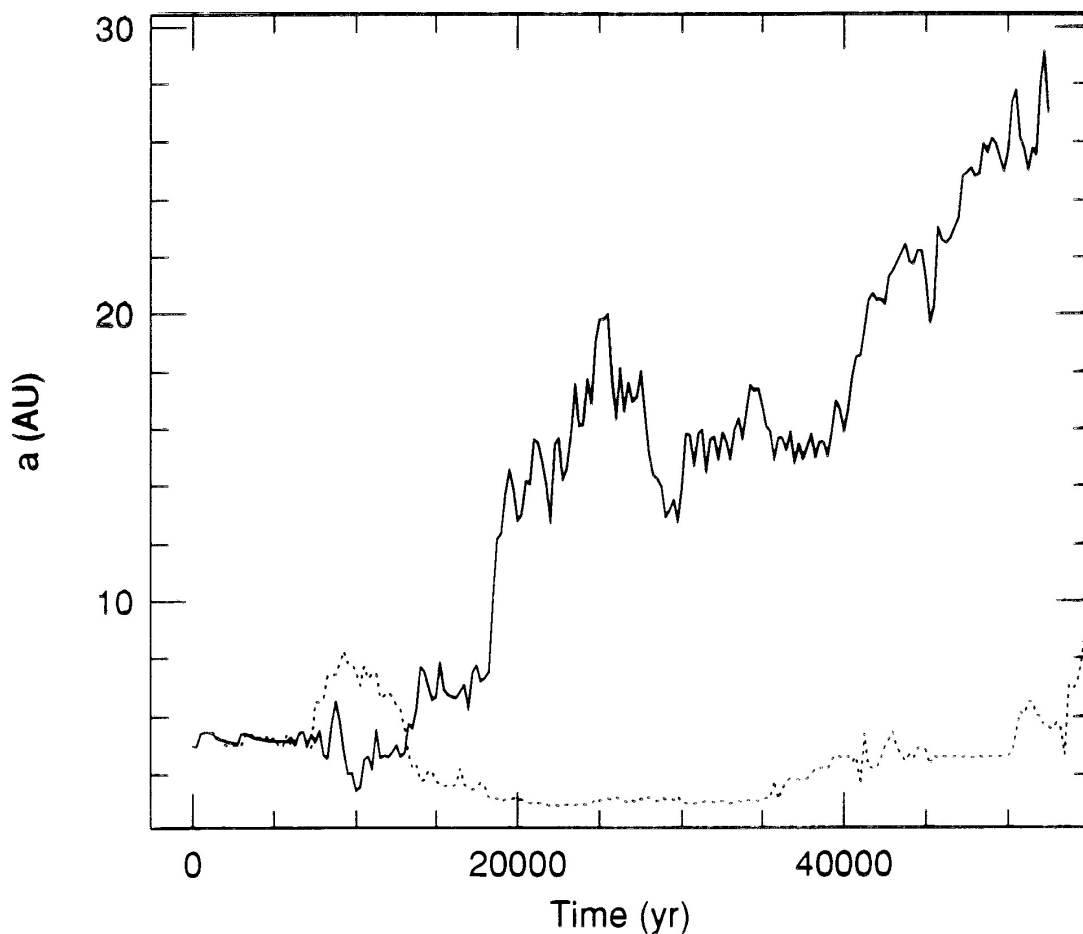
TERRA
INCONTRI CON



- CAOS SI ISTAURA SU TEMPI SCALA BREVI ($10^2 \sim 10^3$ anni)

Orbita di cometa della famiglia di Giove. Gli incontri con Giove la spingono fuori dal sistema solare su tempi scala dell'ordine di 10^5 anni.

—— 5.0072654 (15 km)
----- 5.0072655



INCONTRI con GIOVE