

CAPITOLO 9

- Il rounding off
- Metodo di integrazione Runge-Kutta
- Integratori simplettici

Il problema dell'errore nella soluzione numerica delle equazioni differenziali.

- Errore dovuto all'approssimazione del metodo
- Errore di arrotondamento numerico

Rappresentazione di un numero floating-point

Segno	Esponente	Mantissa
-------	-----------	----------

32 bit

1 segno

1,7 seg,exp ($2^{2^7} \sim 10^{38}$)

23 mantissa 7^a cifra

64 bit

1 segno

1,10 seg,exp $2^{2^{10}} \sim 10^{308}$

52 mantissa 15^a cifra

Rounding-off: ogni operazione porta un errore $\varepsilon \sim 10^{-15}$
Dopo N operazioni l'errore è proporzionale a $\sim N^{1/2} \varepsilon$.
Spesso il segno + domina nell'errore (non è random la distribuzione di + o $-\varepsilon$) e quindi l'errore diventa $N\varepsilon$

Soluzione numerica di equazioni differenziali del 2° ordine

Un sistema di Eq. Differenziali del II° ordine può essere ridotto al I° ordine aumentando la dimensione N :

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{x}}(t=0) = \dot{\bar{x}}_0$$

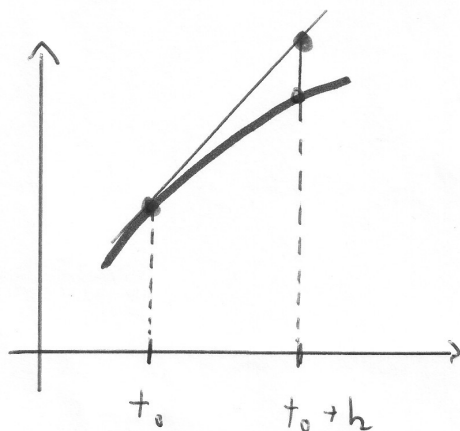
$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0 \quad \bar{y}(t=0) = \dot{\bar{x}}_0 = \bar{y}_0$$

- SOLUZIONE di tipo EULERIANO (I° ordine in h)
Sia h uno step temporale "piccolo".

$$\bar{x}(t+h) = \bar{x}_0 + h \bar{y}_0 + O(h^2)$$

$$\bar{y}(t+h) = \bar{y}_0 + h \bar{f}_0 + O(h^2)$$



$$\text{con } \bar{f}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0)$$

- METODO di RUNGE-KUTTA (ordine superiore)

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + h \bar{y}_0 + \frac{1}{2} h^2 \bar{f}_0 + O(h^3)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + h \bar{f}_0 + \frac{1}{2} h^2 \bar{f}'_0 + O(h^3)$$

$$\text{con } \bar{f}'_0 = \left. \frac{d\bar{f}}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} \cdot \left. \frac{d\bar{x}}{dt} \right|_{t=0} = \bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0$$

BISOGNA CALCOLARE \bar{F}_0 , CON APPROSSIMAZIONE
ALMENO $O(h)$ per mantenere $O(h^3)$ nello
sviluppo di \bar{x}, \bar{y} .

Sappiamo che.

$$\bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho \bar{y}_0) = \bar{f}_0 + h\rho \bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0 + O(h^2)$$

dove ρ è un numero arbitrario ≤ 1 . Allora

$$\bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0 = \frac{\bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho \bar{y}_0) - \bar{f}_0}{h\rho} + O(h^2)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + h \bar{f}_0 + \frac{1}{2} h^2 \frac{\bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho \bar{y}_0) - \bar{f}_0}{h\rho} + O(h^3) =$$

$$= \bar{y}_0 + h \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right) \bar{f}_0 + \frac{1}{2\rho} h \bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho \bar{y}_0) + O(h^3)$$

NON COMPARE PIÙ \bar{f}' ! CON 2
VALUTAZIONI di \bar{f} , cioè $\bar{f}(\bar{x}_0)$ e
 $\bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho\bar{y}_0)$, SI PROPAGA LA SOLUZIONE da
 $t=0$ a $t=t_0+h=h$. SE SCEGLIAMO

$$\rho = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 + h\bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{h}{2}\bar{y}_0\right)\end{aligned}$$

- Si può ulteriormente ottimizzare
usando una sola valutazione di \bar{f} .
Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h^2\bar{f}(\bar{x}_0 + h\rho\bar{y}_0) &= \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 + \frac{1}{2}h^3\rho\bar{F}_0 \cdot \bar{y}_0 + O(h^4) = \\ &= \frac{1}{2}h^2\bar{f}_0 + O(h^3)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{y}_0 + \frac{1}{2}h^2\bar{f}(\bar{x}_0 + \frac{1}{2}h\bar{y}_0) \\ \bar{y} = \bar{y}_0 + h\bar{f}(\bar{x}_0 + \frac{1}{2}h\bar{y}_0) \end{cases} + O(h^3)$$

● RUNGE - KUTTA 3° ORDINE:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + h \bar{y}_0 + \frac{1}{4} h^2 (\bar{k}_0 + \bar{k}_1) + O(h^4)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \frac{1}{4} h (\bar{k}_0 + 3 \bar{k}_1)$$

$$\bar{k}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0)$$

$$\bar{k}_1 = \bar{f}\left(\bar{x}_0 + \frac{2}{3} h \bar{y}_0 + \frac{2}{9} h^2 \bar{k}_0\right)$$

METODO PIÙ USATO: 4° ORDINE CON

CONTROLLO SUL PASSO di INTEGRAZIONE

h . Se la variazione di \bar{f} è troppo grande durante un passo h , si torna indietro e si utilizza

$\frac{h}{2}$. Poi si ripete controllo etc... $\frac{h}{4}$...

Introduzione agli integratori simplettici

1) OPERATORE SOLUZIONE: $\Phi_H(t, t_0)$

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \Phi_H(t, t_0) (p_0, q_0)$$

Ex:

$$H = p q^2 \quad \begin{cases} \dot{p} = -2 p q \\ \dot{q} = q^2 \end{cases} \quad \text{Eq. Hamilton}$$

$$\Phi_H(t, t_0)(p_0, q_0) = \left(p_0 (1 - (t - t_0) q_0)^2, \frac{q_0}{(1 - (t - t_0) q_0)} \right)$$

$$\text{Verifica: } \begin{cases} \dot{q} = \frac{(-1)^2 q_0^2}{(1 - (t - t_0) q_0)^2} = q^2 \\ \dot{p} = -2 q_0 p_0 (1 - (t - t_0) q_0) = -2 p q \end{cases}$$

$$\Phi_H(t_2, t_0) = \Phi_H(t_2, t_1) \Phi_H(t_1, t_0)$$

2) PARENTESI di POISSON:

$$\{f, g\} = \nabla_{\bar{q}} f \cdot \nabla_{\bar{p}} g - \nabla_{\bar{p}} f \cdot \nabla_{\bar{q}} g =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

con le parentesi di Poisson si può calcolare
 $\frac{d}{dt}$ lungo la soluzione $p(t), q(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \nabla_{\vec{q}} f \cdot \dot{\vec{q}} + \nabla_{\vec{p}} f \cdot \dot{\vec{p}} = \{f, H\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)\end{aligned}$$

3) SERIE di LIE:

si calcola la serie di Taylor di f :

$$\begin{aligned}f(t) &= f(0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + \left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=0} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= f(0) + \left\{ f, H \right\}_{t=0} \cdot t + \left\{ \left\{ f, H \right\}, H \right\} \frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= f(0) \cdot \mathbb{I} + \mathcal{L}_H \cdot f(0) \cdot t + \mathcal{L}_H^2 f(0) \cdot \frac{t^2}{2} + \dots \\ &= e^{t \cdot \mathcal{L}_H} f(0) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathcal{L}_H^i f(0)\end{aligned}$$

$$\text{Dove } e^{t \cdot \mathcal{L}_H} = \mathbb{I} + \mathcal{L}_H t + \mathcal{L}_H^2 \frac{t^2}{2} + \mathcal{L}_H^3 \frac{t^3}{6} + \dots$$

SERIE di LIE espressa tramite un
 operatore esponenziale

Con la serie di Lie possiamo riscrivere la soluzione delle equazioni del moto

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \{ \bar{\xi}, H \}$$

$$\bar{\xi}(t) = e^{\tau \mathcal{L}_H} \xi(t_0) = \phi_H(t, t_0) \xi(t_0)$$

con $\tau = t - t_0$

SE L'HAMILTONIANO È SEPARABILE IN DUE PARTI

$H = H_A + H_B$ ALLORA LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE

SCRITTA COME:

$$\bar{\xi}(t) = e^{\tau(A+B)} \xi(t_0) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} A &= \mathcal{L}_{H_A} \\ B &= \mathcal{L}_{H_B} \end{aligned}$$

POSSIAMO APPLICARE PRIMA $e^{\tau B}$ e POI $e^{\tau A}$?

Im altre parole $e^{\tau(A+B)} = e^{\tau A} \cdot e^{\tau B}$?

$$e^{\tau(A+B)} = 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{\tau A} \cdot e^{\tau B} &= \left(1 + \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2 + \dots\right) \left(1 + \tau B + \frac{\tau^2}{2} B^2 + \dots\right) = \\ &= 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots \end{aligned}$$

MA $BA + AB \neq 2AB$ GLI OPERATORI NON

NECESSARIAMENTE COMMUTANO (Ex: ROTAZIONI 3-D)

quindi $e^{\tau(A+B)}$ COINCIDE con $e^{\tau A} \cdot e^{\tau B}$ solo nei primi 2 termini $1 + \tau(A+B)$ cioè al I° ordine. PERO'

$$e^{\frac{\tau B}{2}} e^{\tau A} e^{\frac{\tau B}{2}} = 1 + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(B^2 + BA + AB + A^2) + O(\tau^3)$$

ALLORA

$$e^{\tau(A+B)} = e^{\frac{\tau B}{2}} e^{\tau A} e^{\frac{\tau B}{2}} + O(\tau^3)$$

COINCIDE AL II° ORDINE.

- SUPPONIAMO di saper risolvere le equazioni del moto per H_A e H_B ma non per $H_A + H_B$. Allora possiamo risolvere le equazioni del moto per $H_A + H_B$ in modo approssimato a $O(\tau^3)$ con il metodo LEAP FROG (salto di zara) pg 448 D-M.

Nel SISTEMA SOLARE IL MOTO dei pianeti è GERARCHICO: un pianeta si muove attorno al sole e viene PERTURBATO dagli altri pianeti

$$H = H_{\text{kepl}} + H_{\text{PER}}$$

PROBLEMA PERTURBATIVO: H_{Kepl} DOMINA
 e descrive orbita Kepleriana attorno al SOLE
 H_{per} è PERTURBAZIONE dovuta all'attrazione
 gravitazionale degli altri pianeti.

$$H_{\text{Kepl}}^i = \frac{p_i^2}{2\tilde{m}_i} - G \frac{\tilde{M}_i \tilde{m}_i}{\tilde{r}_i}$$

$$H_{\text{per}}^i = G \frac{m_0 m_i}{\tilde{r}_i} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N G \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

In coordinate di Jacoby (pg. 443 D-M)

STRUTTURA di UN INTEGRATORE SIMPLETTICO
 AL II° ORDINE:

$$q(\tilde{\tau}) = e^{\frac{\tilde{\tau}}{2} H_{\text{Kepl}}} e^{\tilde{\tau} H_{\text{per}}} e^{\frac{\tilde{\tau}}{2} H_{\text{Kepl}}} q(0)$$

$e^{\frac{\tilde{\tau}}{2} H_{\text{Kepl}}}$ propaga le posizioni e velocità dei
 corpi in modo KEPLERIANO (a 2 corpi) per
 un intervallo $\frac{\tilde{\tau}}{2}$. La propagazione è
 ESATTA, si sa la soluzione analitica.

Poi si applica $e^{\tau H_{per}}$. H_{per} agisce solo sui momenti perché H_{per} NON dipende da \bar{p} ! Si applica per un intervallo τ e questo fa cambiare solo le velocità.
INFINE, si applica di nuovo $e^{\frac{\tau}{2} H_{vel}}$.

SIMPLETTICO: Si risolvono le equazioni di un Hamiltoniana H' che approssima a $O(\tau^2)$ l'Hamiltoniana del sistema H . Però, si RISOLVE SEMPRE IN MODO ESATTO delle equazioni Hamiltoniane per H' . QUINDI, SI CONSERVA L'ENERGIA del SISTEMA (A MENO del ROUNDING-OFF).