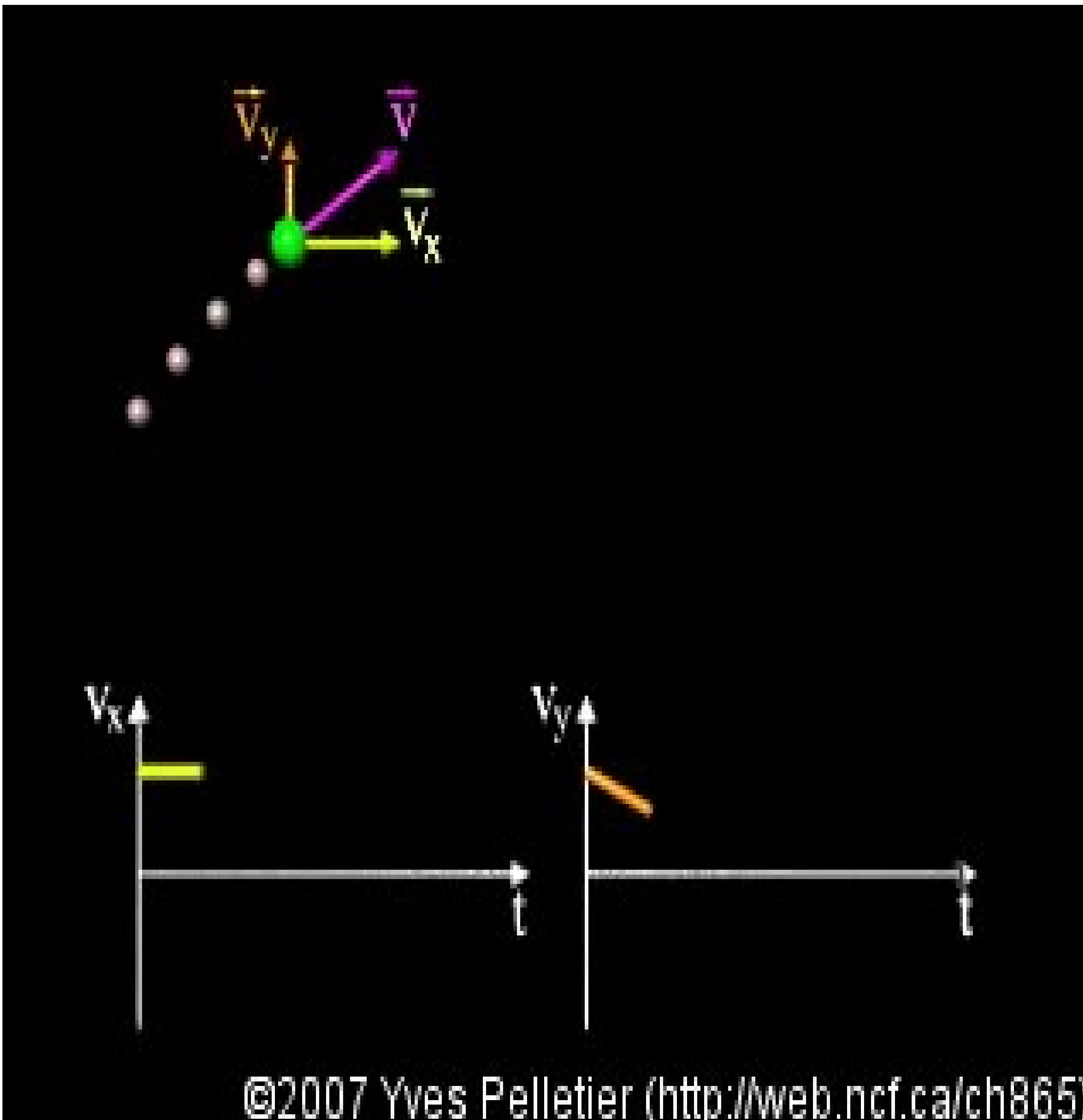
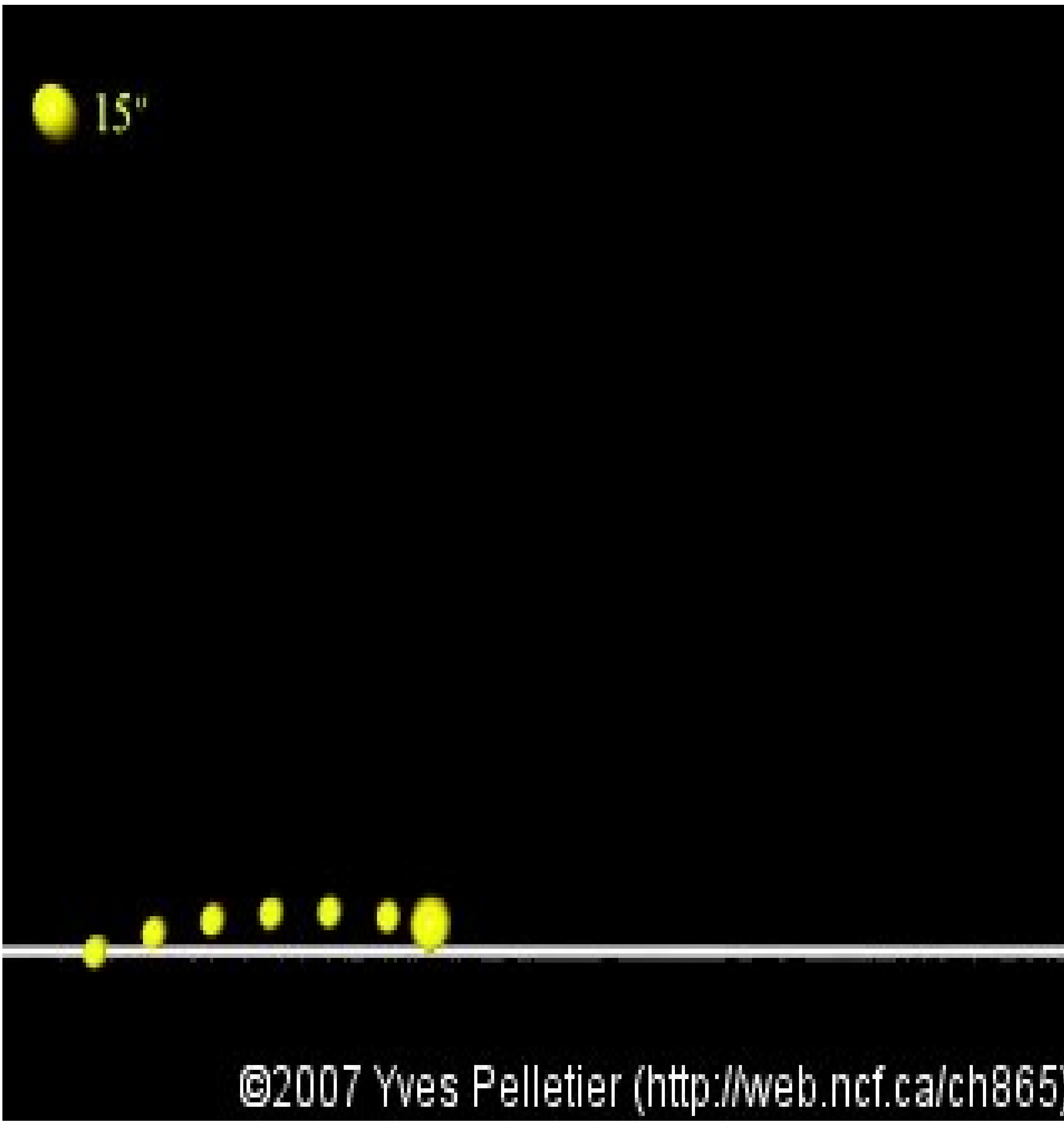
Il moto è tridimensionale

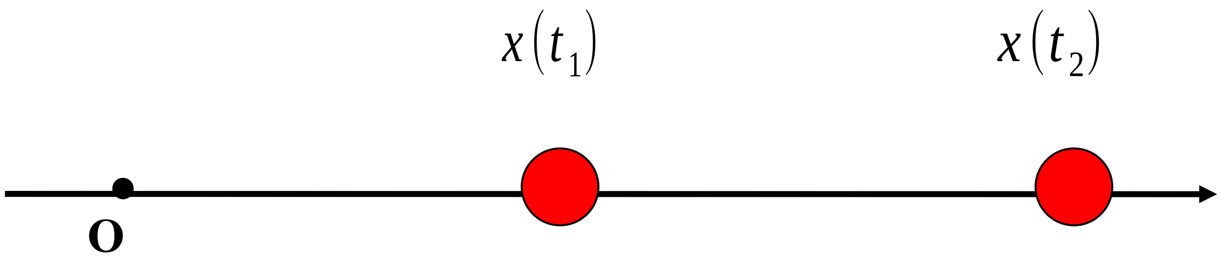
Importanza si separare le diverse componenti del moto.



Le condizioni iniziali determinano la traiettoria e la legge oraria. Le equazioni del moto sono equazioni differenziali che hanno bisogno di condizioni iniziali per essere determinate.



Equazioni del moto in 1 dimensione:



Velocità media come rapporto incrementale tra spazio percorso e tempo

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

In generale la velocità varia istante per istante

Velocità istantanea: limite del rapporto incrementale DERIVATA

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

La velocità è una grandezza derivata e nel SI si misura in m/s

Accelerazione media

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Nel SI $[a] = m/s^2$

Cosa provoca le variazioni di velocità ? **LA FORZA**

$$F = ma$$

Se $m = 1\ kg$ e $a = 1\ m/s^2$:

$F = 1$ Newton (N)

Un esempio semplice di integrazione dell' equazione del moto: **il moto uniformemente accelerato.**

Ipotesi: la forza che agisce è costante: $F = \text{cost.}$

$$a = \frac{F}{m} = a_0 = \text{cost.}$$

Per sapere come varia nel tempo la velocità e quale sia la legge oraria *x(t)* dobbiamo risolvere l' *equazione differenziale*

$$a \equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = a_0$$

Prima integrazione:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} a_0 \, dt = a_0 (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a_0 t$$

Seconda integrazione:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} v \, dt = \int_{t_0}^{t} (a_0 t + v_0) \, dt = \frac{1}{2} a_0 (t^2 - t_0^2) + v_0 (t - t_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \qquad se \;\; t_0 = 0$$

In conclusione, le formule del **moto uniformemente accelerato in 1D sono**

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Con v_0 e x_0 **costanti arbitrarie** determinate dalle **condizioni iniziali**:

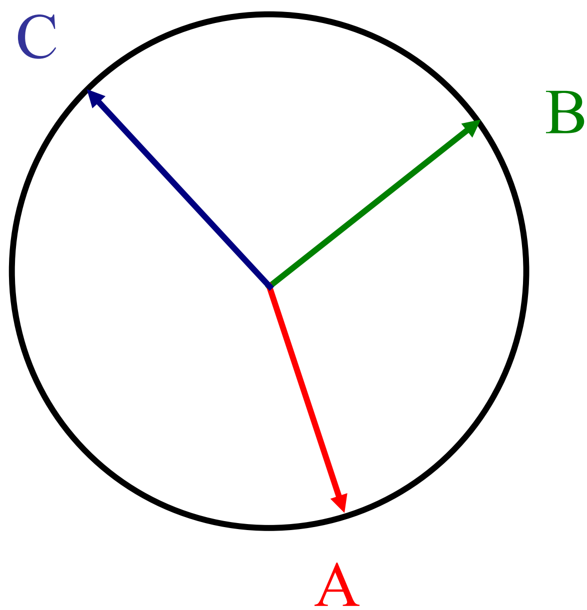
$$v(0) = v_0$$

$$x(0) = x_0$$

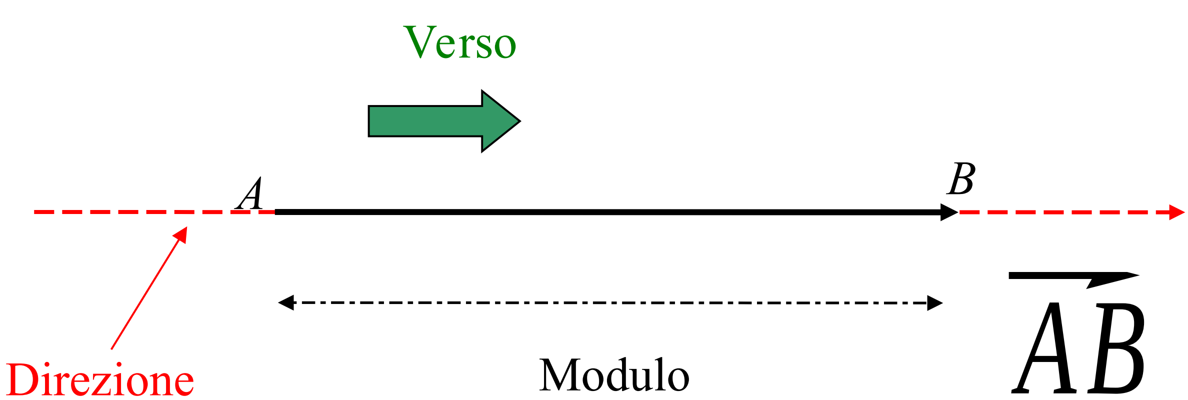
In 3D? Un'equazione uguale alla precedente lungo ciascuna delle 3 direzioni. Introduzione dei vettori.

$$x(t)$$
$$y(t)$$
$$z(t)$$

Equazioni del moto in 3 dimensioni:



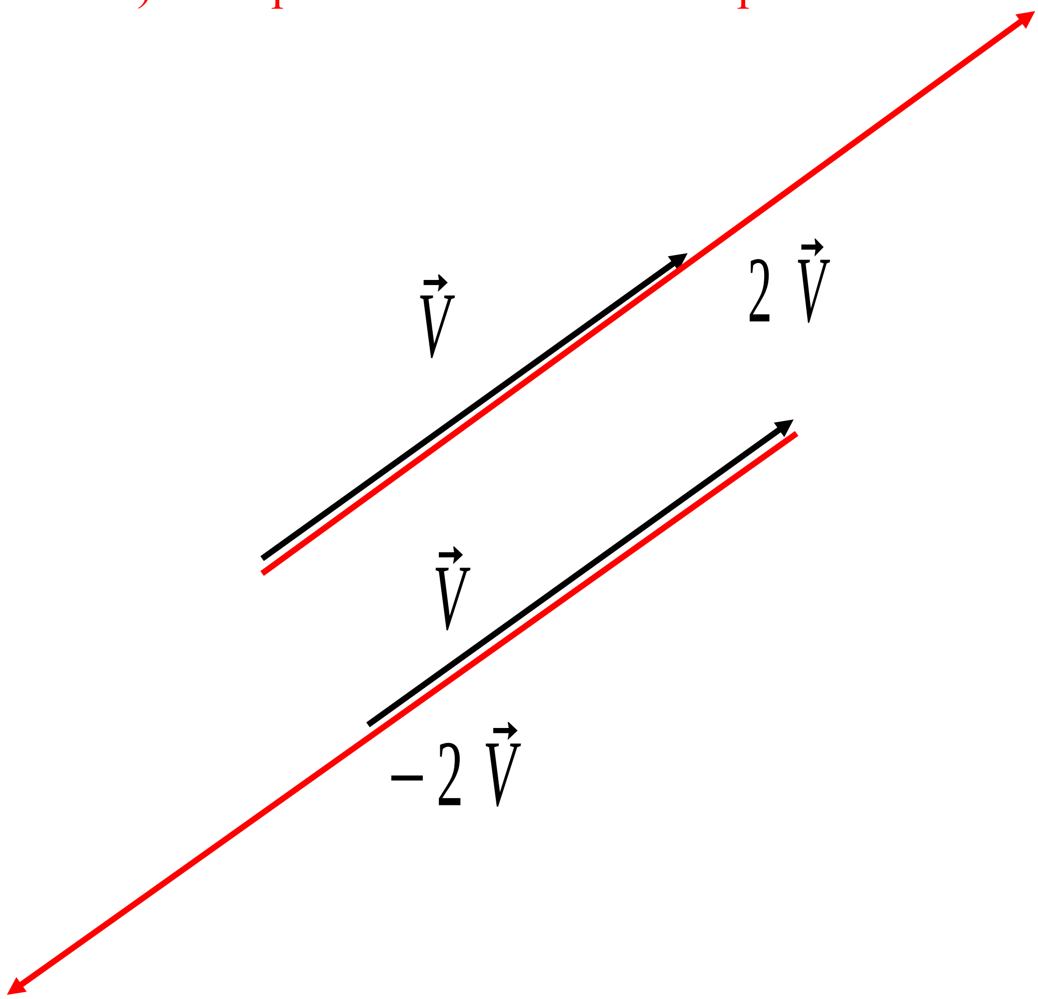
Vettore: entità geometrica dotata di MODULO, DIREZIONE e VERSO



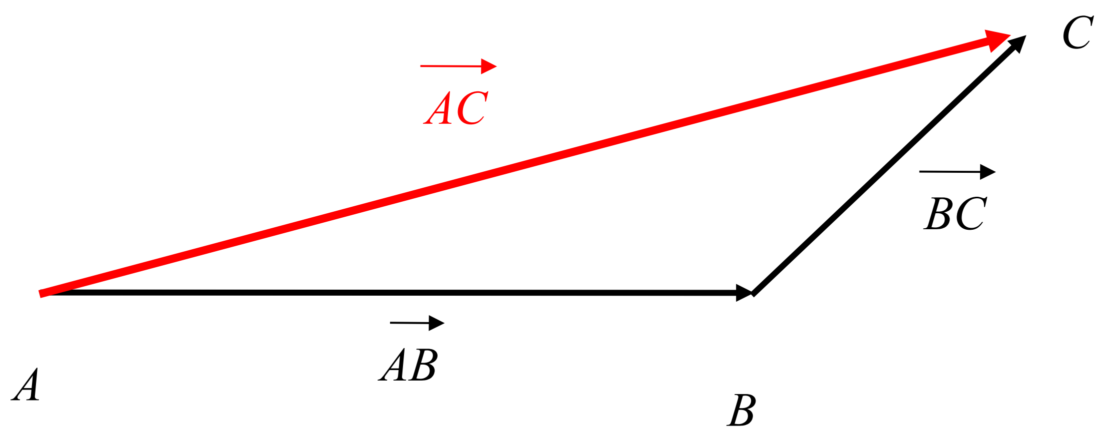
$\overrightarrow{AB}$

OPERAZIONI COI VETTORI

1) Moltiplicazione di un vettore per un numero

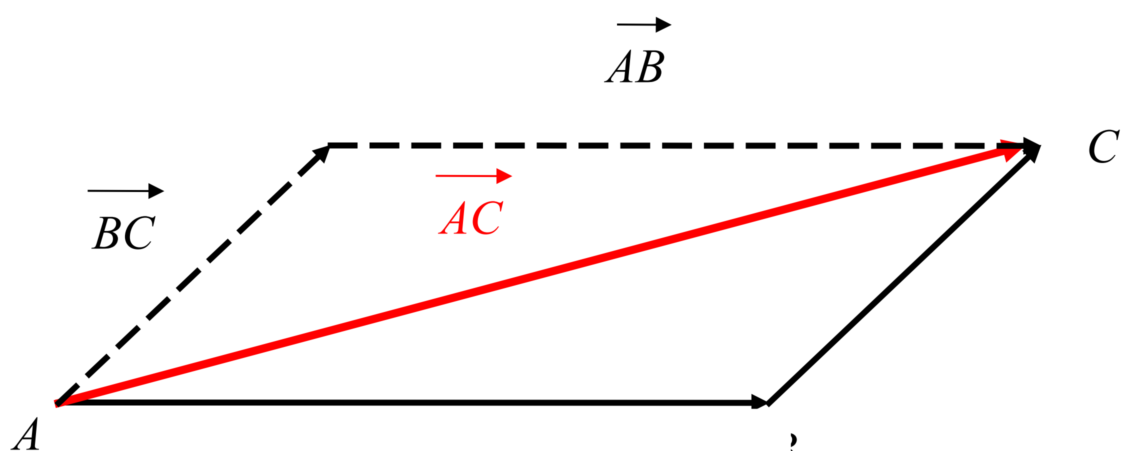


2) Somma di vettori



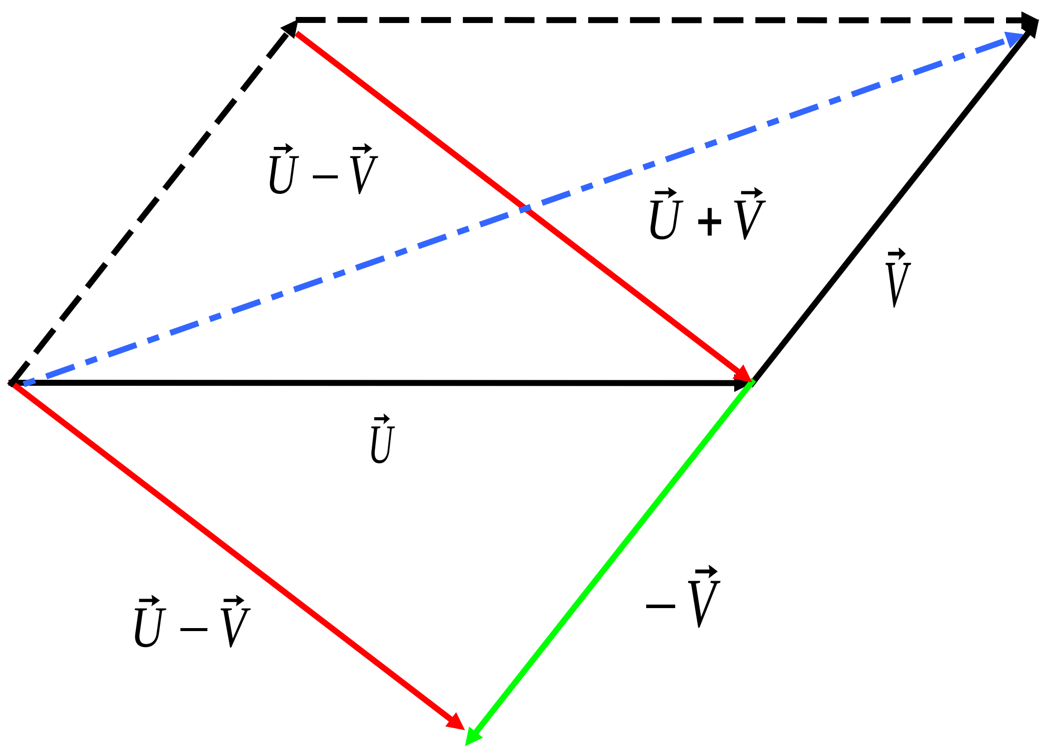
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Regola del parallelogramma



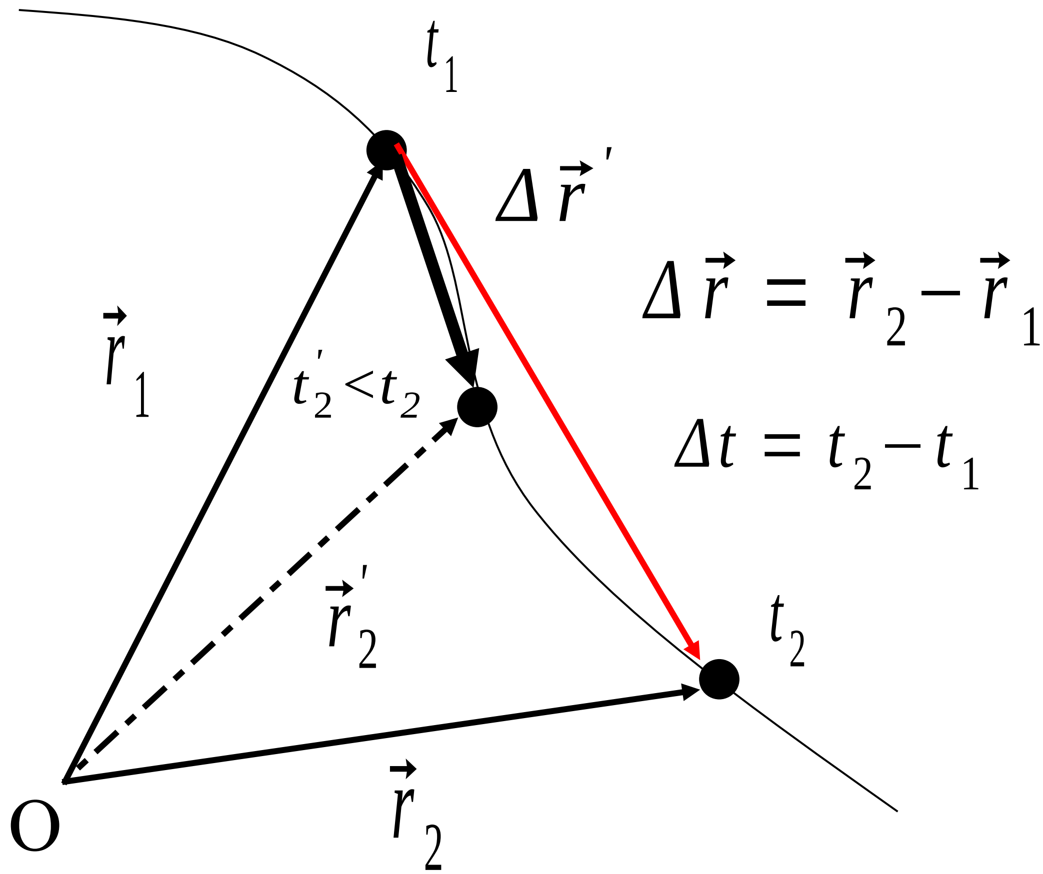
3) Differenza di due vettori

$$\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + \left(-1 \cdot \vec{V}\right)$$



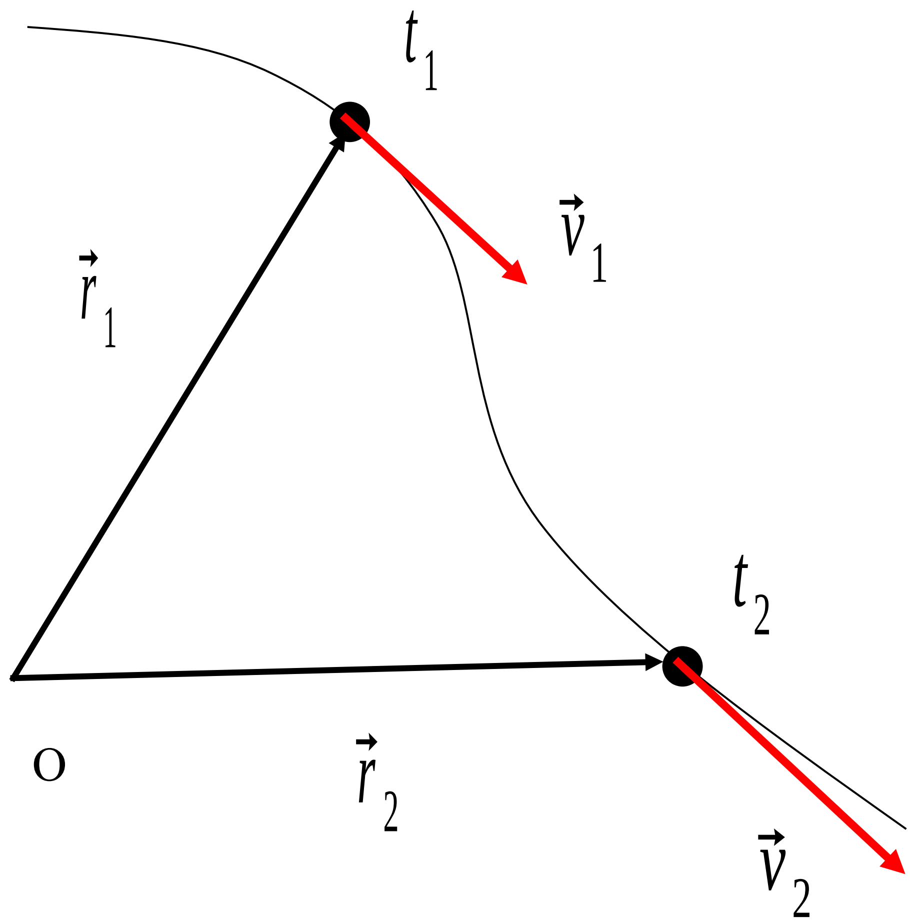
Nel parallelogramma dei vettori la diagonale maggiore dá la somma, quella minore la differenza dei due vettori

In due o tre dimensioni spostamenti, velocità, accelerazioni e forze sono descritte da vettori. **Si fissa un'origine delle coordinate rispetto cui viene definito il VETTORE POSIZIONE e si scrivono equazioni vettoriali.**



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{r} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$

La velocità <u>istantanea</u> come vettore deve essere **tangente alla traiettoria**



In generale la velocità è un vettore dipendente dal tempo:

$$\vec{v}(t)$$

Allora posto

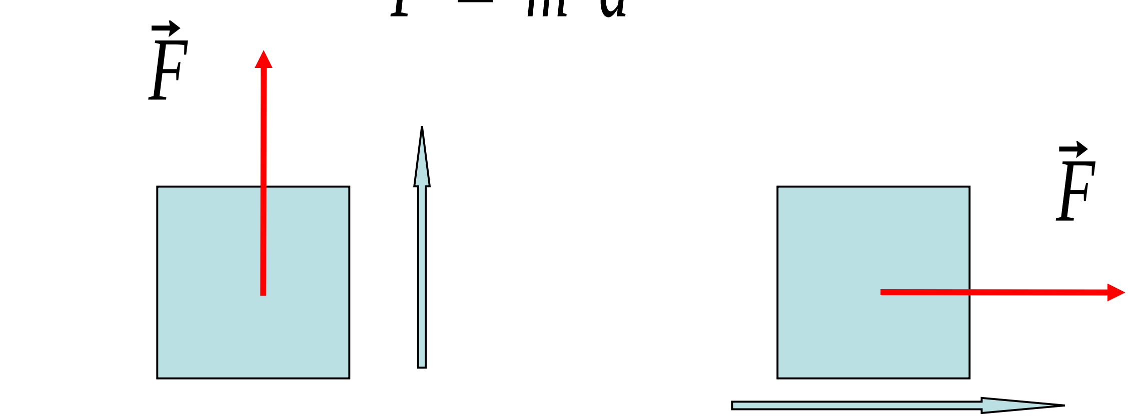
$$\vec{v}_1 \equiv \vec{v}(t_1) \quad \vec{v}_2 \equiv \vec{v}(t_2) \quad \Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

L' accelerazione istantanea come vettore sarà definita come

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)$$

Vettori saranno pertanto anche le forze

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$



A parità di modulo della forza due situazioni diverse

Moto parabolico in 2D: due importanti aspetti

1) La traiettoria
2) La legge oraria

Moto parabolico in 2D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Equazioni del moto in forma vettoriale.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

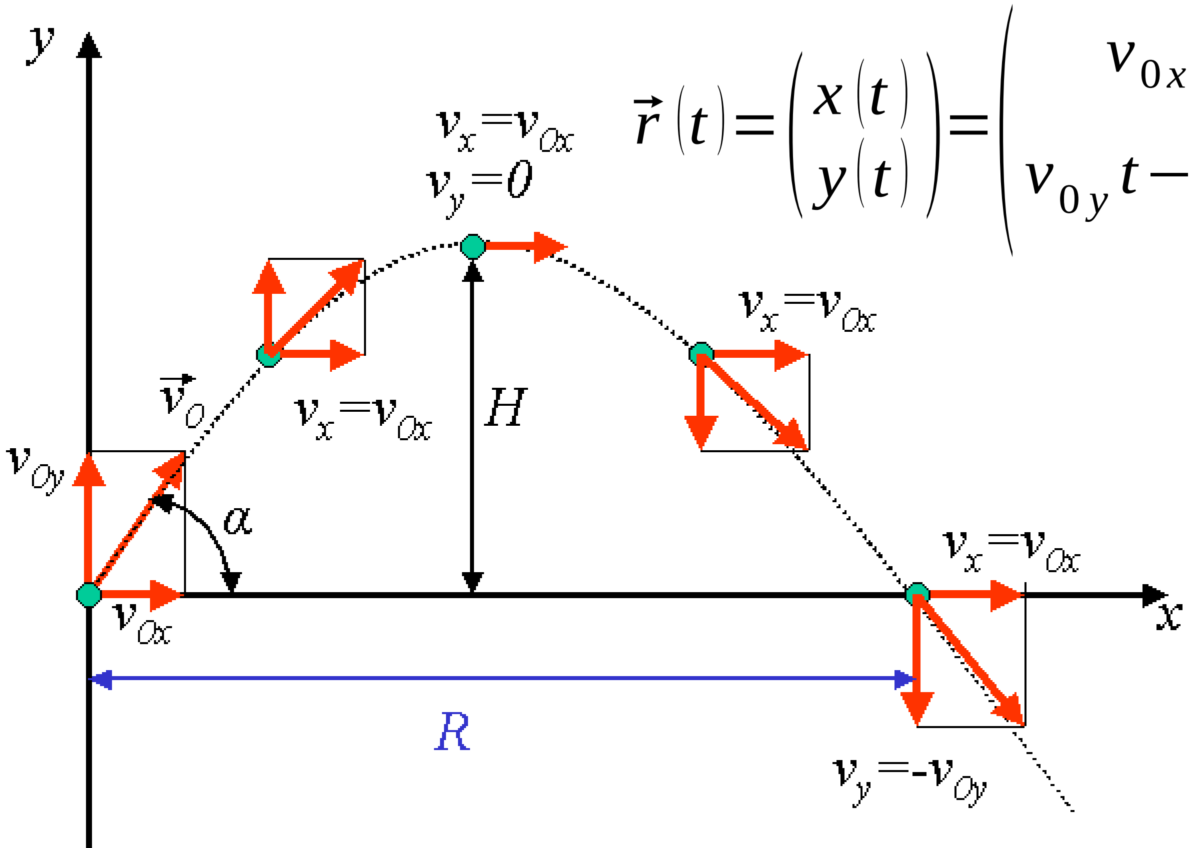
$$r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$$

Condizioni iniziali

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

$$x = 0 = y_0 = 0$$
$$v_{x0} \geqslant 0 \quad v_{y0} \geqslant 0$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} t \\ v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$



Equazione della traiettoria: esprimere y in funzione di x mentre la soluzione dà x e y in funzione di t (legge oraria).

$$t=\frac{x}{v_{0x}} \quad \Rightarrow \quad y=v_{0y}t-\frac{g}{2}t^2=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x-\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Calcolare **massima altezza** e **massima distanza**

$$v_y(t)=v_{0y}-gt=0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y}-g\frac{x}{v_{0x}}=0$$

$$\boxed{x_M=\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \qquad y_M=\frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}}$$

Oppure: $$\frac{dy}{dx}=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}-\frac{g}{2v_{0x}}2x=0$$

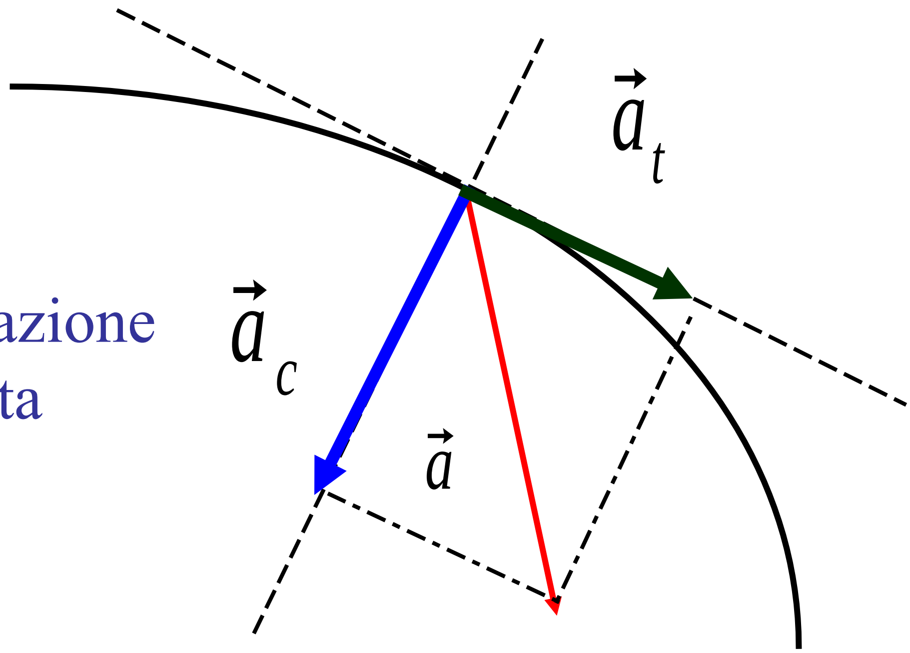
$$y=0=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x-\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2=x\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}-\frac{g}{2v_{0x}^2}x\right)$$

$$\boxed{x_D=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}=2x_M}$$

MOTO CURVO IN GENERALE

Abbiamo visto che il vettore velocità è <u>sempre tangente alla traiettoria.</u> <u>Nulla invece si può dire in generale della accelerazione.</u>

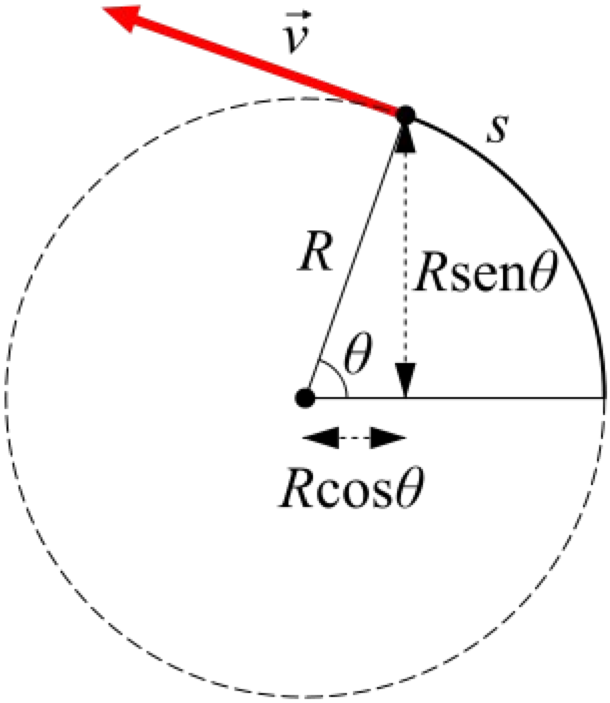
Accelerazione centripeta



$\vec{a}_t$ → Cambiamento del modulo di V lungo la direzione della velocità

$\vec{a}_c$ → Cambiamento della direzione Perpendicolare a v, dove varia la direzione di v

Moto circolare uniforme

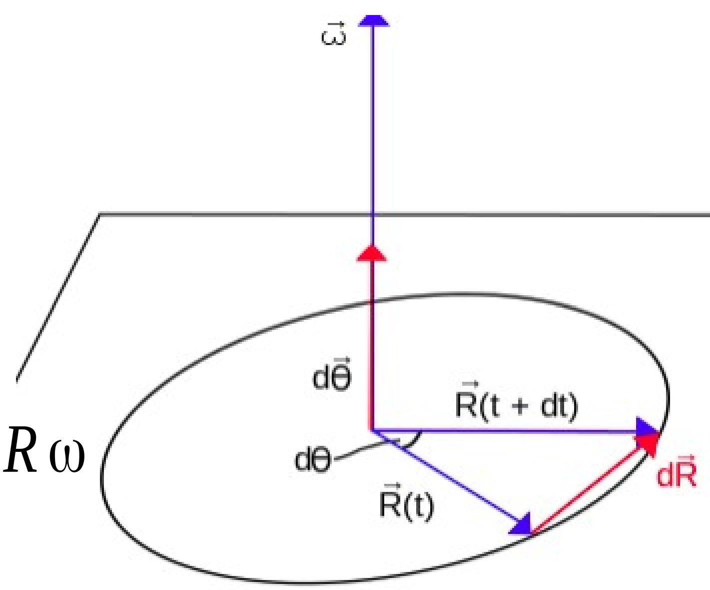


$$x = R\cos(\theta)$$
$$y = R\sin(\theta)$$

$$\boxed{\theta = \omega t}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$

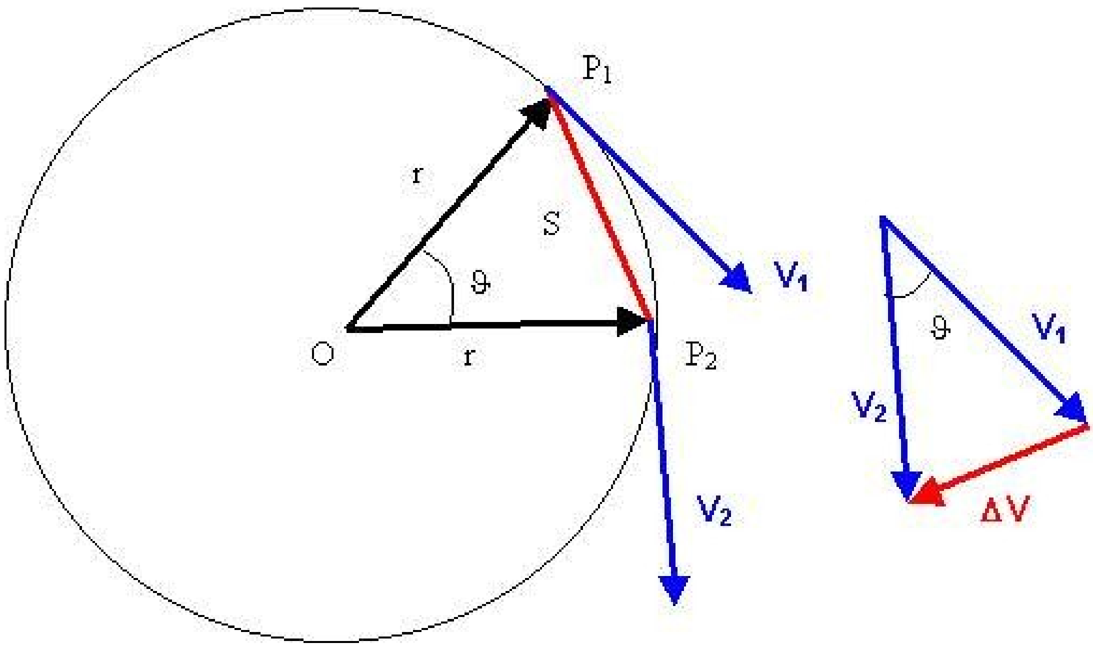
$$x = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\sin(\omega t)$$



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\sin(\Delta\theta)}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

$$\boxed{v = R\omega}$$

Accelerazione centripeta



$$\Delta v = v \sin(\Delta\theta) = v\,\Delta\theta$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\,\omega$$

$$\boxed{a = v\,\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

In forma vettoriale (ricordare la regola della mano destra per il verso del vettore rotazione):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$
$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Se l' accelerazione è diversa da zero deve esistere una forza diretta verso il centro che tiene il corpo vincolato alla traiettoria:

$$F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

N.B. Questa relazione è di natura generale, vale per qualunque moto circolare uniforme, in quanto segue dalla natura cinematica del moto. Quale forza stia agendo dipende dal particolare problema.

Fionda $\Longrightarrow$ Tensione della fionda

Sistema Terra-Luna $\Longrightarrow$ Forza gravitazionale

Atomo H $\Longrightarrow$ Forza elettrica

Un velocista corre i 100 m in 10 s. Si approssima il moto ipotizzando una accelerazione costante **a** per i primi 15 m e poi una velocità costante **v** per i rimanenti 85 m. Si calcoli: a) il tempo $\mathbf{t_1}$ impiegato per percorrere i primi 15 m, b) il tempo $\mathbf{t_2}$ impiegato per percorrere gli 85 m, c) la accelerazione **a** dei primi 15 m, d) La velocità finale $\mathbf{v_2}$

$$x(t_1) = 1/2\, a\, t_1^2 = 15\ m$$

$$v(t_1) = a\, t_1$$

Cercare equazione in t_1

$$x(t_f) = x(t_1) + v(t_1)(t_f - t_1) = x(t_1) + a\, t_1 (t_f - t_1)$$

$$x(t_f) = x(t_1) + \frac{2\, x(t_1)\, t_1}{t_1^2}(t_f - t_1)$$

$$Con\ \ t_f = 10\ \ s,\ \ x(t_f) = 100\ \ m,\ \ x(t_1) = 15\ \ m$$

$$\boldsymbol{t_1} = \frac{2\, t_f\, x(t_1)}{x(t_f) + x(t_1)} = \frac{2*10*15}{100+15} = 2.61\, s$$

$$\boldsymbol{t_2} = t_f - t_1 = 7.39\ \ s \qquad \boldsymbol{a} = 2\, x(t_1)/t_1 = 4.4\ \ m/s^2$$

$$\boldsymbol{v_f} = a\, t_1 = 11.4\ \ m/s = 41\ \ km/h$$

La centrifuga di una lavatrice compie 1500 giri al minuto. Se il cestello ha un diametro di 55 cm, calcolare la velocità angolare, la frequenza e il periodo del moto.

$$\omega = \frac{1500 * 2\pi}{60} = 157 \ \ rad/s$$

$$\omega T = 2\pi \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.04 \ \ s \qquad \nu = \frac{1}{T} = 25 \ \ s^{-1}$$

Un treno stà viaggiando ad una velocità v= 100 km/h e deve affrontare una curva di raggio R = 1 km. Poichè la massima accelerazione accettabile dai passeggeri è 0.6 m/s^2, calcolare se il macchinista deve frenare prima della curva.

$$v = \omega R \ \rightarrow \ \omega = \frac{v}{R} = 100\, rad/h = 2.78 \times 10^{-3} \ \ rad/s$$

$$a = \omega^2 R = 0.77 \ \ m/s^2 \qquad SI\,, \ deve \ \ frenare$$

$$a = v^2/R = 0.77 \ \ m/s^2$$

Davide fa ruotare la corda della sua fionda lunga 30 cm per lanciare un proiettile. Quando lascia andare, il proiettile viaggia a 200 km/h. Qual'è la velocità angolare della fionda nel momento in cui Davide lascia la presa?

$$v = \omega R = \frac{200 * 1000}{3600} = 55.6 \ m/s$$

$$\omega = \frac{55.6}{0.3} = 185.1 \ rad/s$$

$$n \ giri \ al \ secondo \ \ 29.5$$