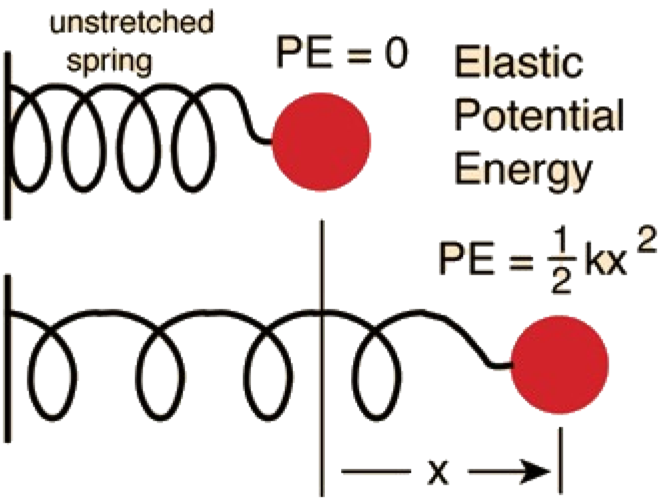
Energia E
Quantità di moto **p**
Momento angolare **L**

Conservazione di E,**p**,**L** in sistemi isolati.

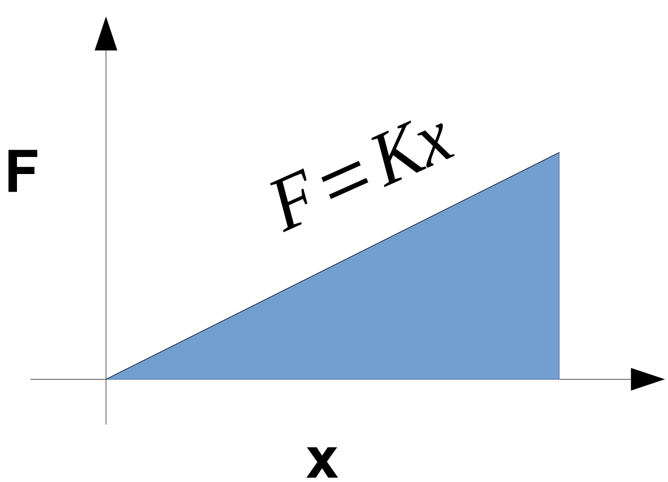
Energia potenziale elastica



Energia potenziale = lavoro fatto CONTRO la forza che genera l'energia potenziale

Il lavoro fatto per estendere/comprimere la molla è:

$$L = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} K x_i \, dx_i = \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{1}{2} K x_2^2 - \frac{1}{2} K x_1^2$$

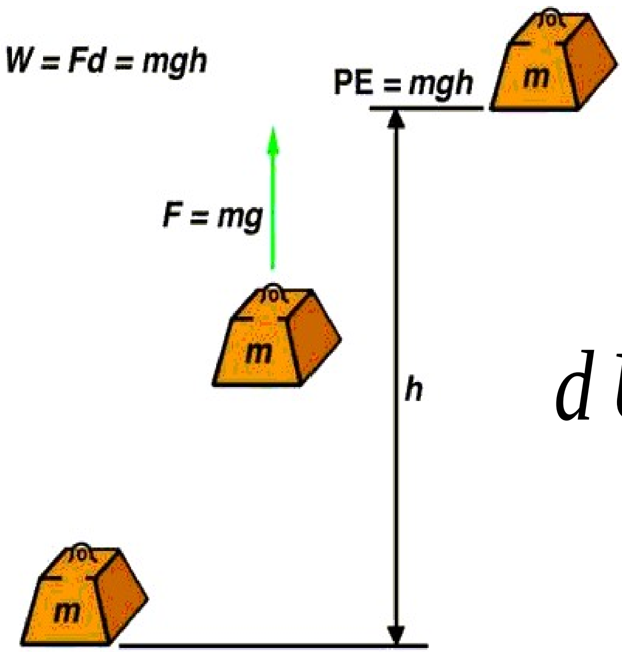


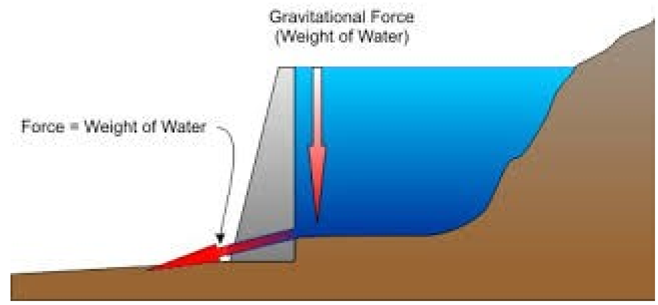
Se x_1=0 (molla a riposo) allora

$$L = Area = \frac{1}{2} K x^2$$

$$\boxed{U_p = \frac{1}{2} K x^2}$$

Energia potenziale gravitazionale



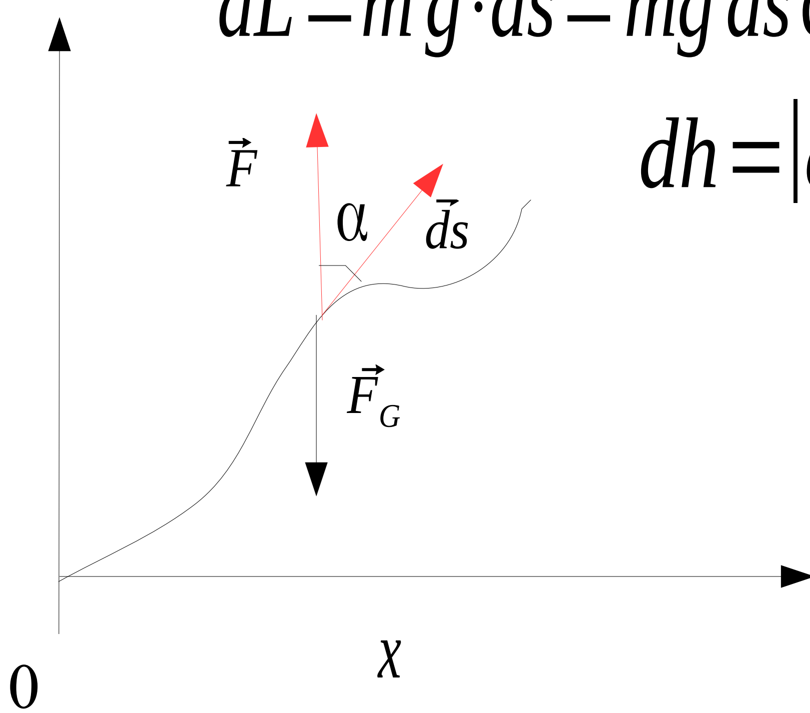


$$dU_p = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Con $\vec{F} = -\vec{F}_G$

$$dL = m\vec{g} \cdot \vec{ds} = mg\, ds \cos(\alpha) = mg\, dh$$

$$dh = |ds| \cos(\alpha)$$



$$L = \sum_{i=1,N} m\,g\,dh_i = \int_0^h mg \cdot d\,h' = mgh$$

Energia potenziale gravitazionale è:

$$\boxed{U_p = mgh}$$

Viene restituita come lavoro fatto dalla forza di gravità

$$L = U(h_2) - U(h_1)$$

$$con\, h_2 > h_1$$

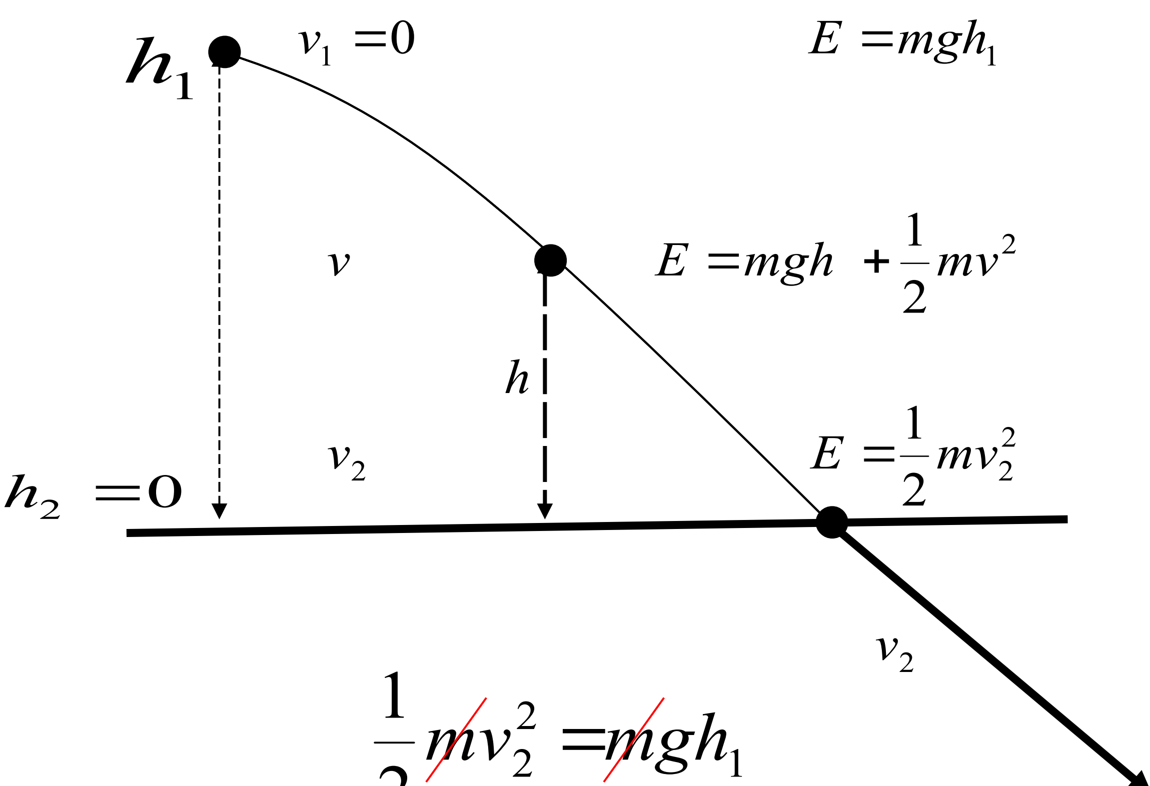
Conservazione dell'energia

Conservazione dell'energia.

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} K x_1^2 + m g h_1 =$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 + m g h_2$$

Esempio di applicazione della conservazione dell'energia



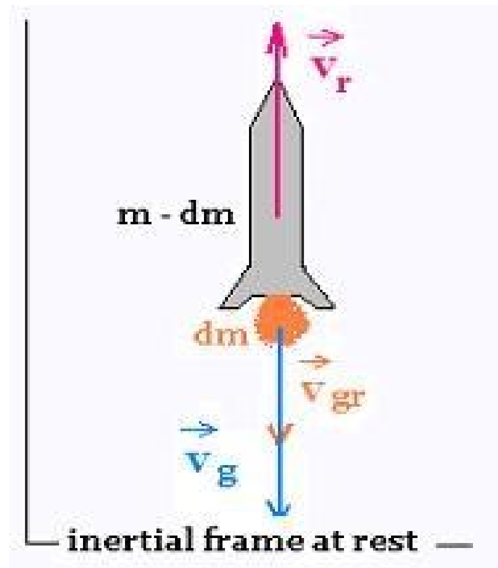
$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_2^2 = \cancel{m} g h_1$$

$$v_2 = \sqrt{2 g h_1}$$

Conservazione della quantità di moto p.

$$\vec{p}=m\vec{v} \qquad \vec{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Moto del razzo: accelerazione dovuta all'espulsione di gas dai motori. Conservazione della quantità di moto spiega la spinta.



$$mv=(m-\Delta m)(v+\Delta v)-\Delta m(v_e-v)$$

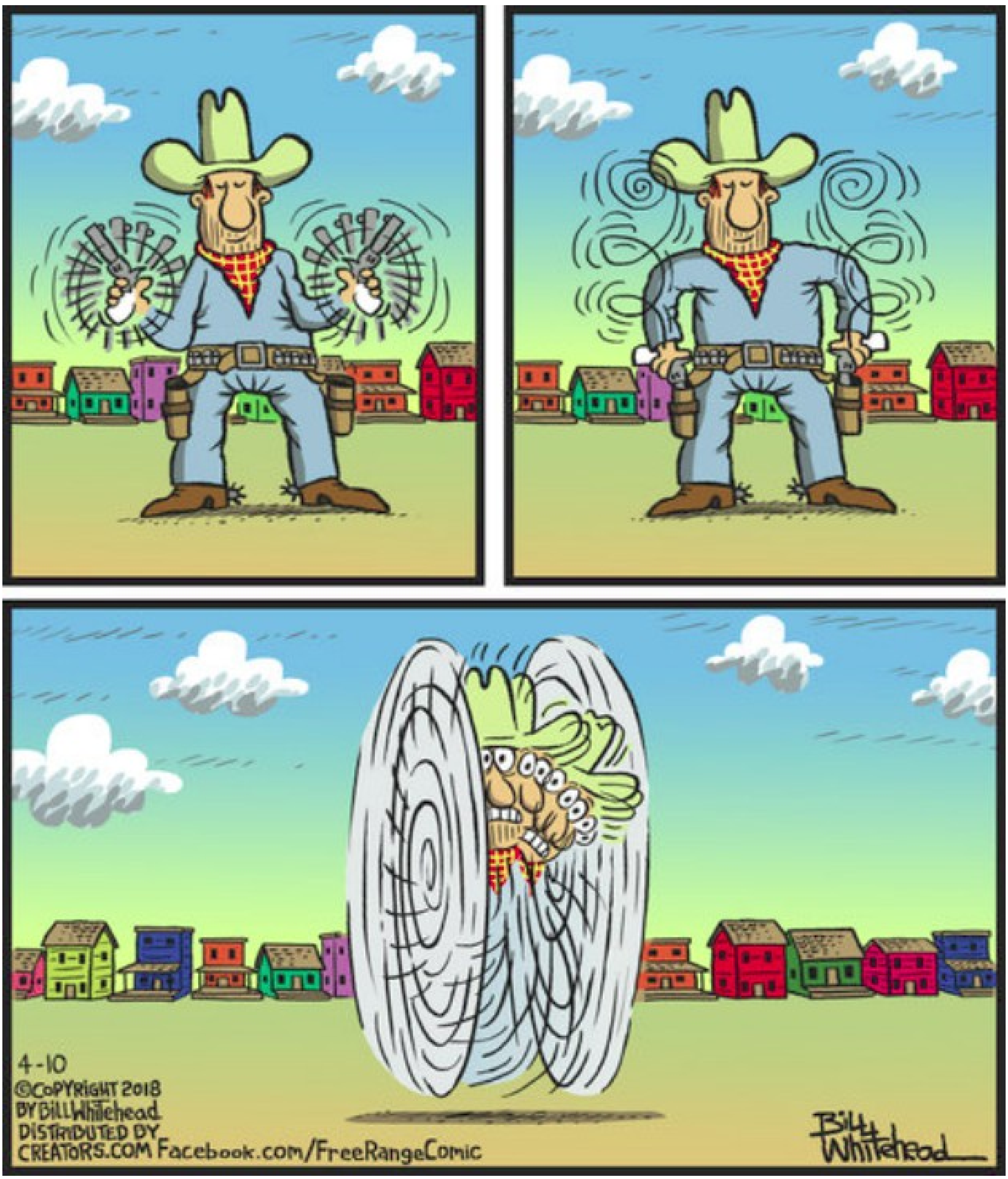
$$\cancel{mv}=\cancel{mv}-\cancel{\Delta m\, v}+m\Delta v-\cancel{\Delta m\Delta v}-\Delta m\, v_e+\cancel{\Delta m\, v}$$

$$m\Delta v=\Delta m\, v_e$$

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=v_e\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

$$\boxed{F=ma=v_e\frac{dm}{dt}}$$

Conservazione del momento angolare: tutto ciò che ruota, continua a ruotare…..

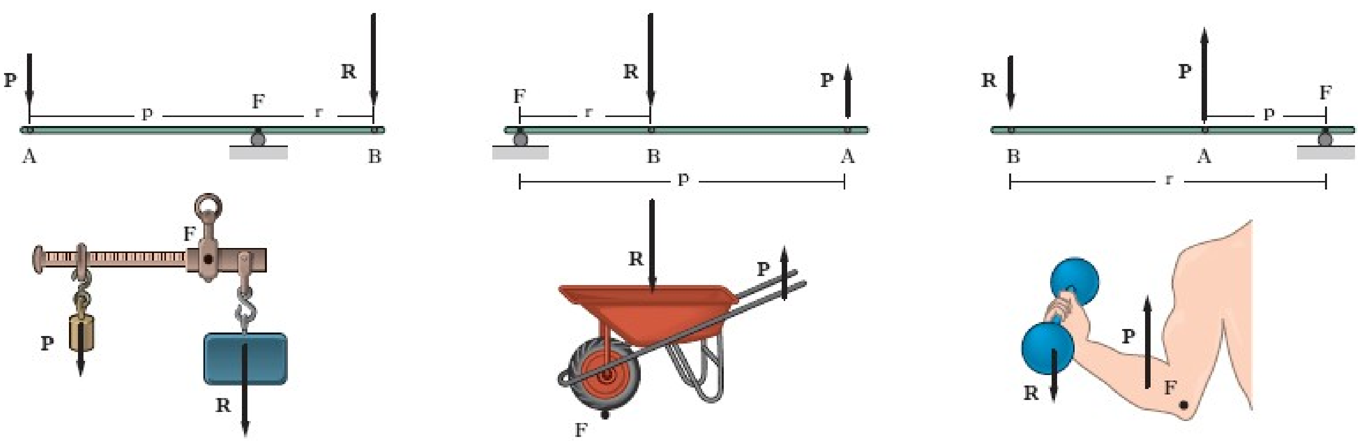


Momento della forza e conservazione del momento angolare

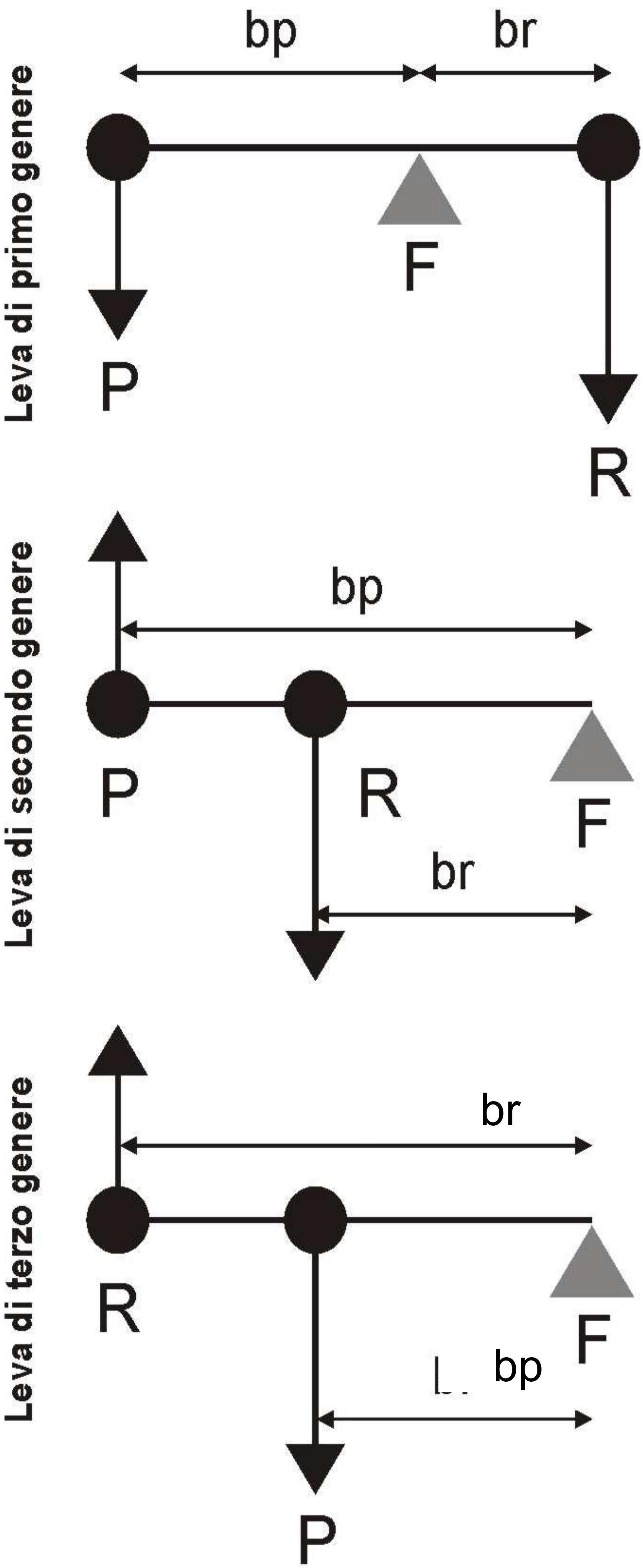
$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{T}$$

LEVE

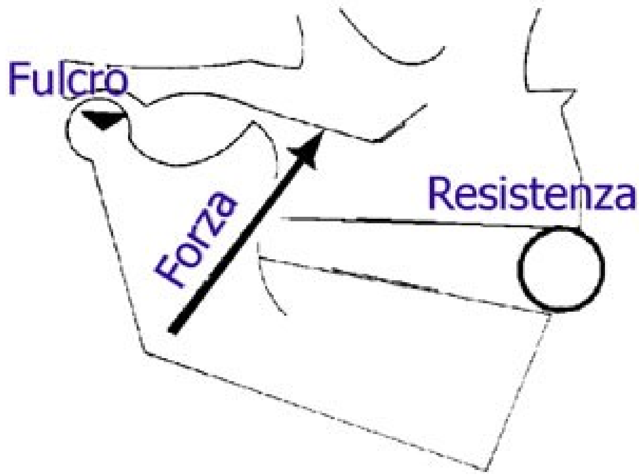


$$Equilibrio \ \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = 0$$



P = lo=potenza = faccio lavoro
R = resistenza = peso da sollevare

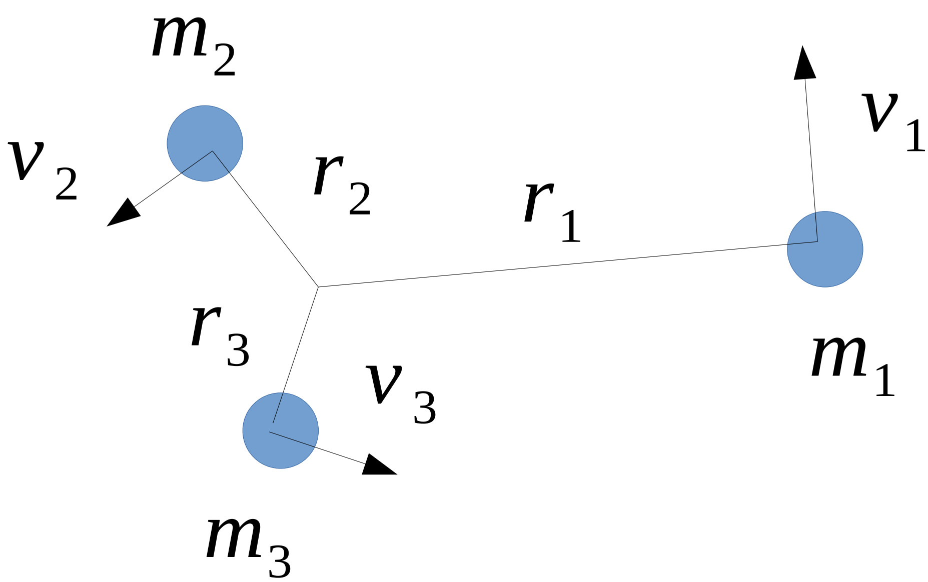
$$T = P\,b_p - R\,b_r = 0$$
$$P\,b_p = R\,b_r$$



La mandibola è una leva del III tipo. In corrispondenza ai molari la forza applicata è molto maggiore rispetto a quella per gli incisivi.

Specie animale	*Forza del morso* (kg/cm^2)
Uomo	80
Licaone	143
Rottweiler	148
iena	450
Tartaruga alligatore	452
Leone	560
Coccodrillo	1125
Squalo bianco	1800

Momento di inerzia e corpi rigidi



$$r_1 \perp v_1$$
$$r_2 \perp v_2$$
$$r_3 \perp v_3$$

I tre corpi m_1,m_2,m_3 ruotano attorno ad un punto

$$\vec{L} = m_1 r_1 v_1 + m_2 r_2 v_2 + m_3 r_3 v_3$$
$$= m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + m_3 \omega r_3^2$$
$$= \omega \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \right)$$
$$\omega I$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

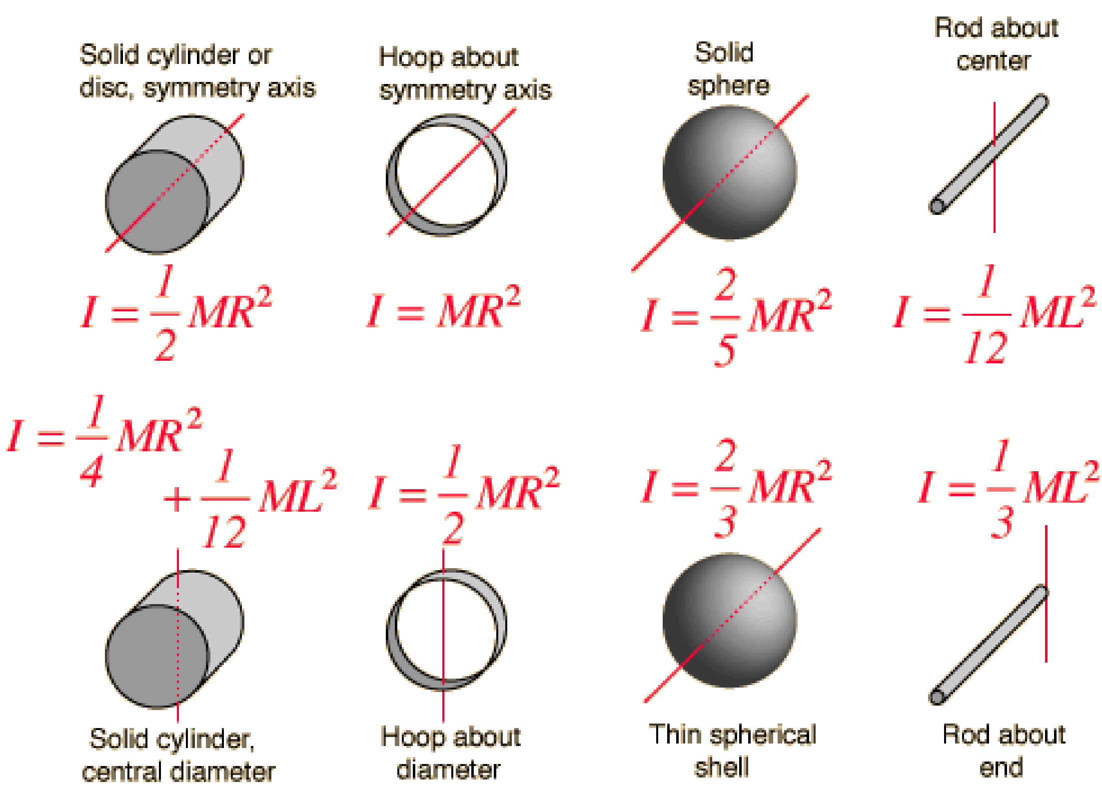
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ldots$$

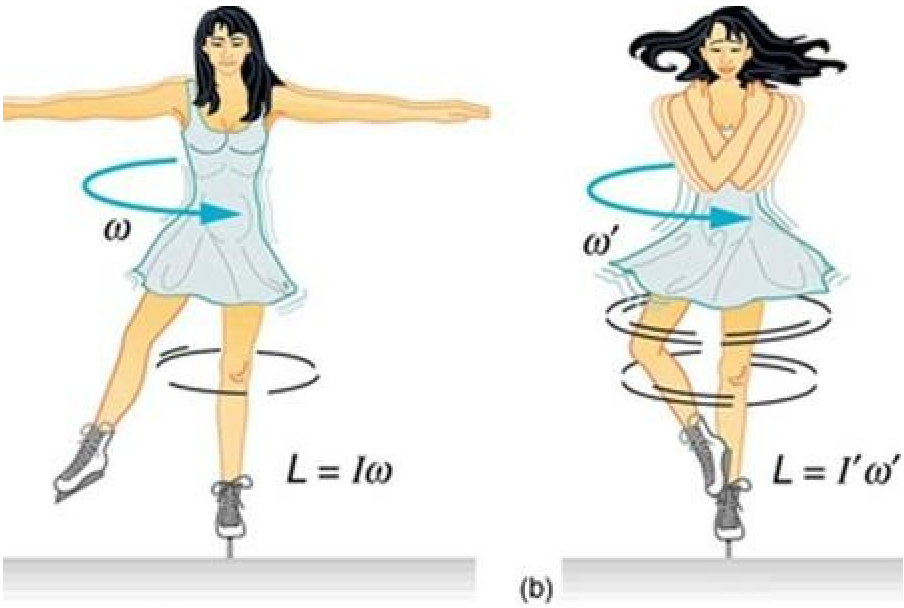
$$= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 \ldots$$

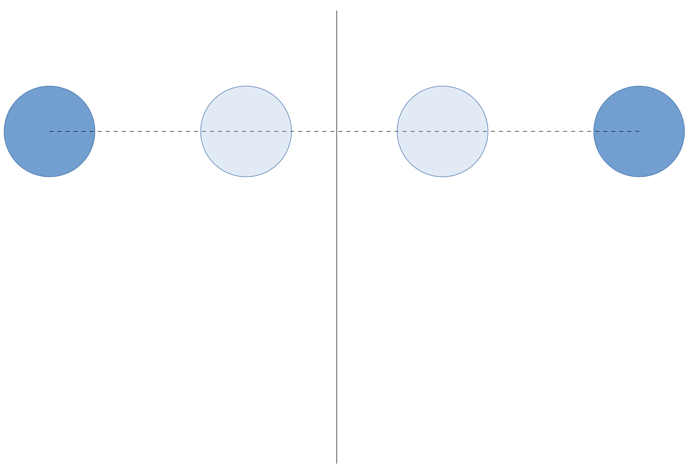
$$= \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$



Conservazione del momento angolare: esempio del pattinatore:





$$L = m r v + m r v = 2 m r^2 \omega$$

$$L' = 2 m r'^2 \omega'$$

$$\boxed{\omega' = \omega \frac{r^2}{r'^2}}$$

$$r' < r \;\Rightarrow\; \omega' > \omega$$

Accelerazione angolare

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

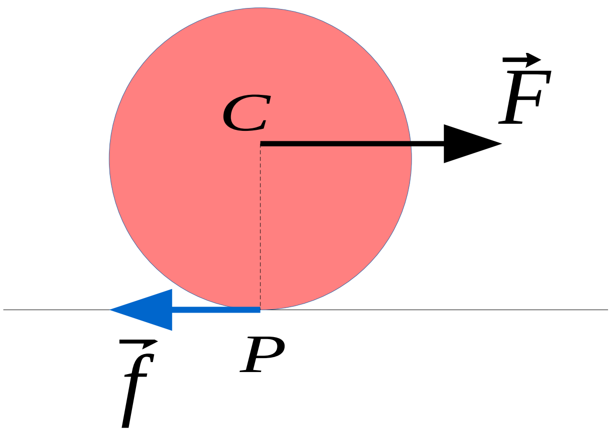
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{T}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}}$$

$$\vec{T} = I \vec{\alpha}$$

Moto di puro rotolamento



Condizioni di puro rotolamento

$$v_P = 0$$

$$\omega R = v_{CM}$$

$$\alpha R = a_{CM}$$

$$F - f = m\, a_{CM}$$

$$R f = I \alpha$$

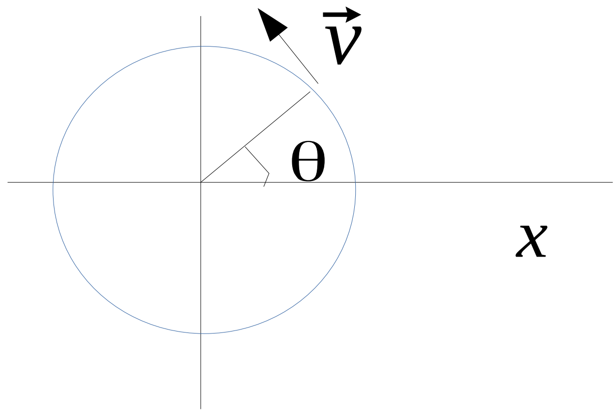
$$\alpha R = a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{m R^2}\right)}$$

$$f = \frac{F I}{\left(I + m R^2\right)} < \mu_s m g$$

$$F \leq \mu_s m g \left(\frac{I + mR^2}{I}\right)$$

Moto armonico



Moto circolare uniforme con velocità angolare ω

$$t=0 \quad \theta=\phi \quad r=x_0$$

$$x(t)=x_0\cos(\omega t+\phi)$$
$$y(t)=x_0\sin(\omega t+\phi)$$

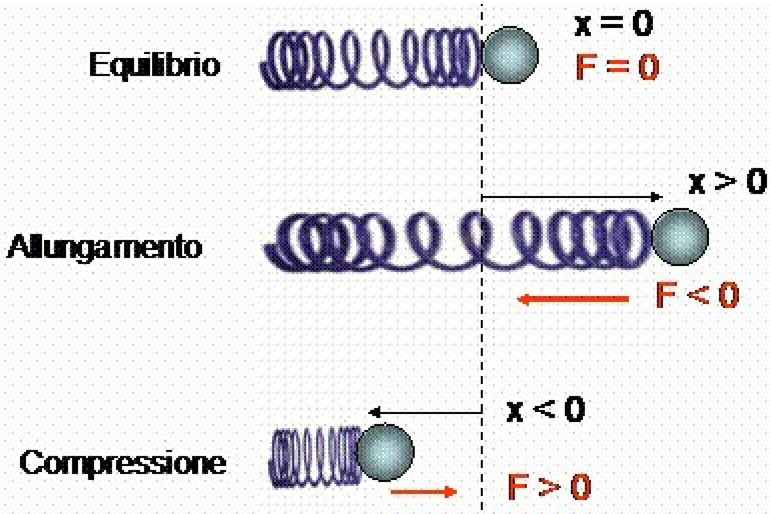
$$v_x(t)=-\omega x_0\sin(\omega t+\phi)$$
$$v_y(t)=\omega x_0\cos(\omega t+\phi)$$

$$a_x(t)=-\omega^2 x_0\cos(\omega t+\phi)$$
$$a_y(t)=-\omega^2 x_0\sin(\omega t+\phi)$$

Moto armonico è quello descritto dalla coordinata x

$$x(t)=x_0\cos(\omega t+\phi)$$
$$v_x(t)=-\omega x_0\sin(\omega t+\phi)$$
$$a_x(t)=-\omega^2 x_0\cos(\omega t+\phi)$$

Esempio di moto armonico: peso attaccato a una molla in assenza di attrito.



$$ma = -kx$$

$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

La soluzione è un moto armonico:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Energia totale è data da combinazione di energia cinetica e potenziale

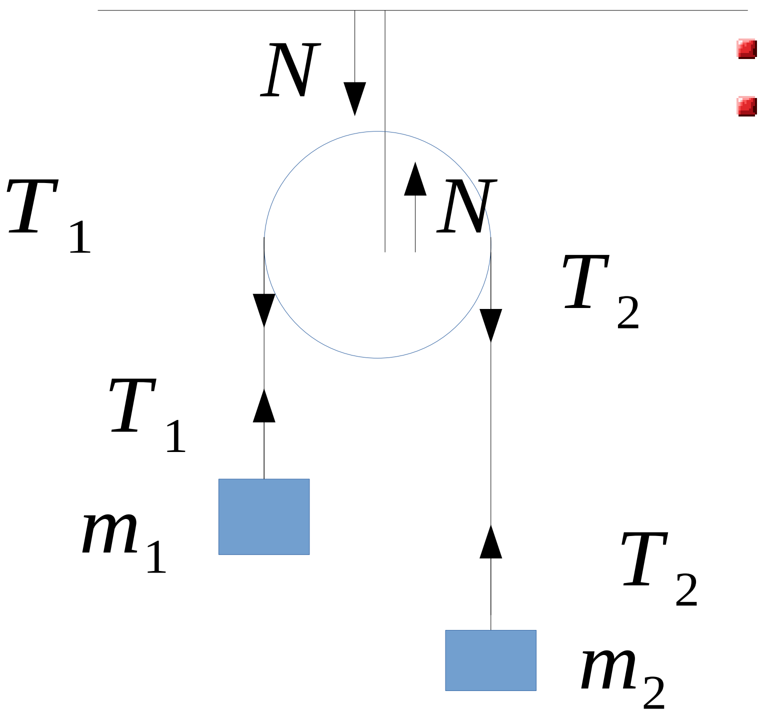
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_T = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$$

x_0 è l'ampiezza del moto armonico

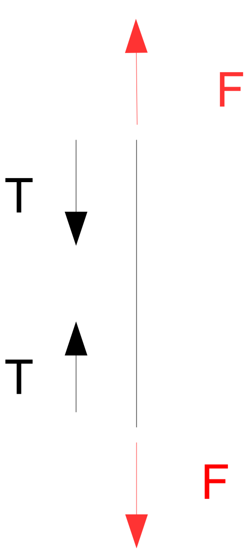
Carrucola semplice



- Massa della puleggia nulla
- Filo inestensibile

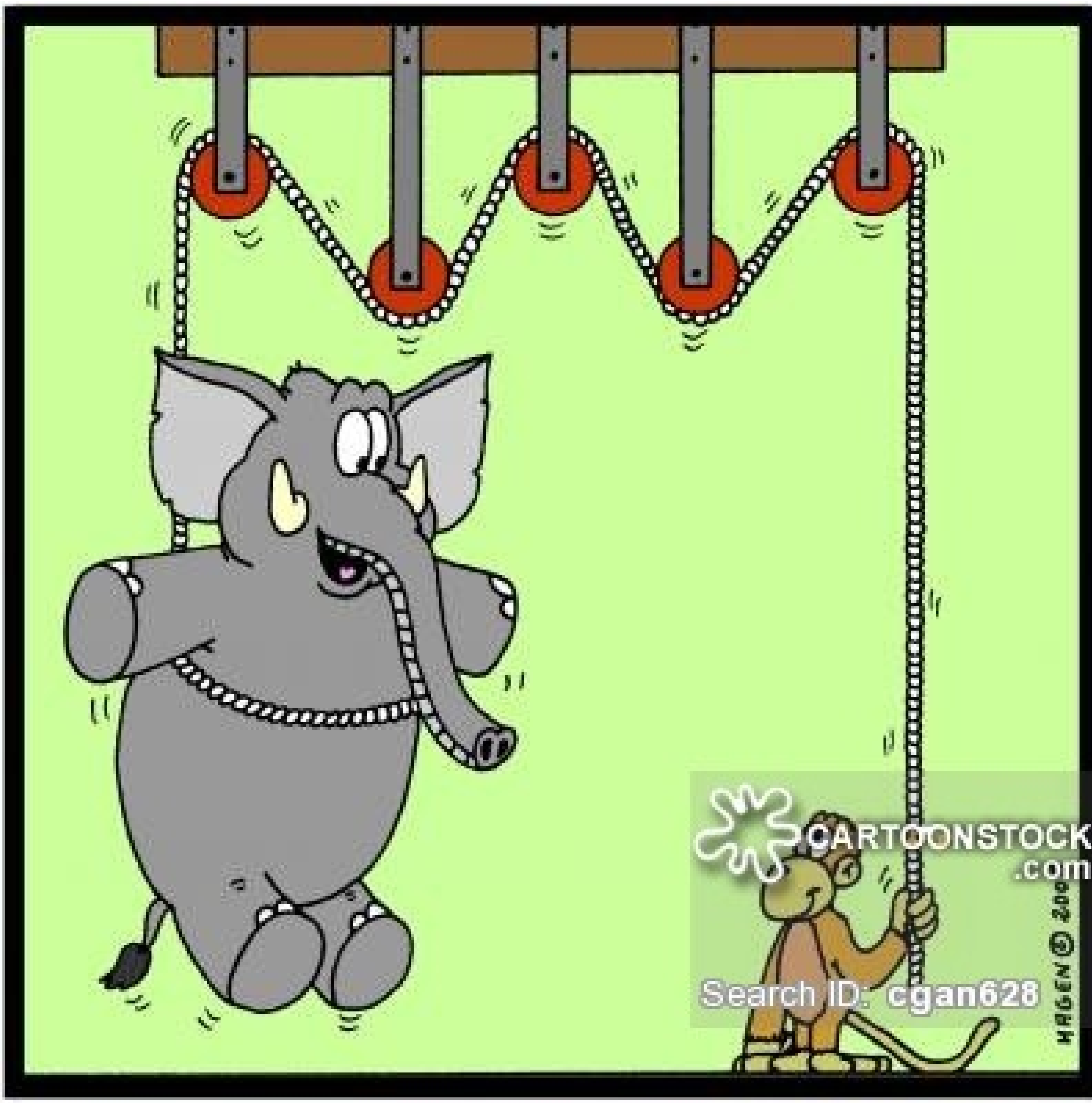
$$T_1 = T_2 = T$$
$$m_1 a_1 = -m_1 g + T$$
$$m_2 a_2 = -m_2 g + T$$
$$N = 2T$$
$$a_1 = -a_2 = a$$

$$m_1 a = -m_1 g + T$$
$$m_2 a = m_2 g - T$$



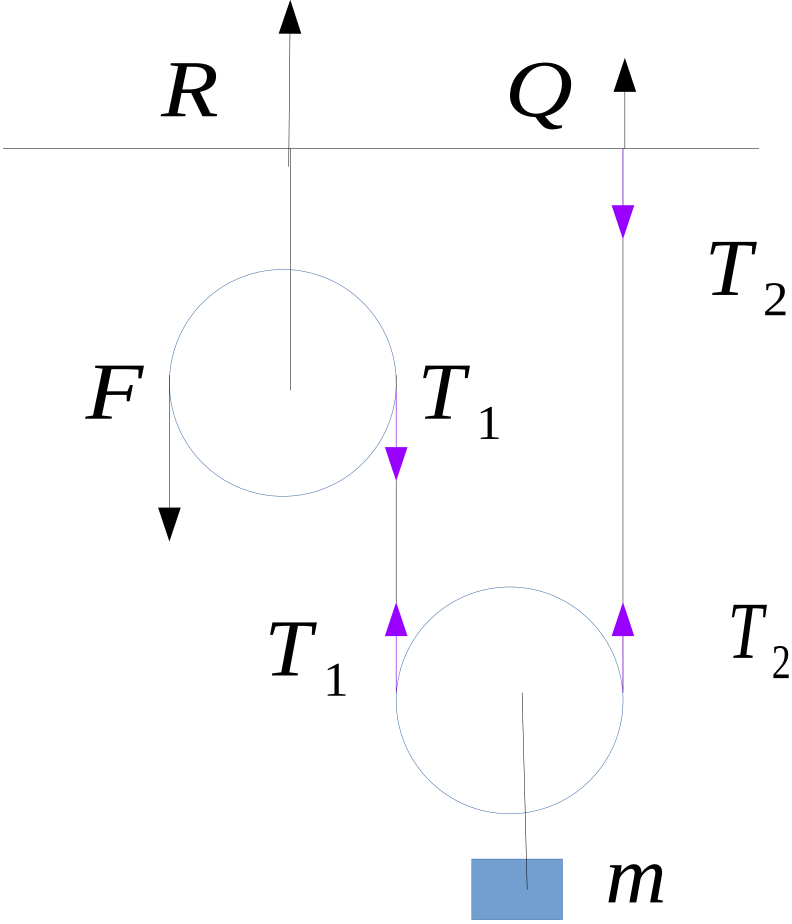
$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Carrucola composta



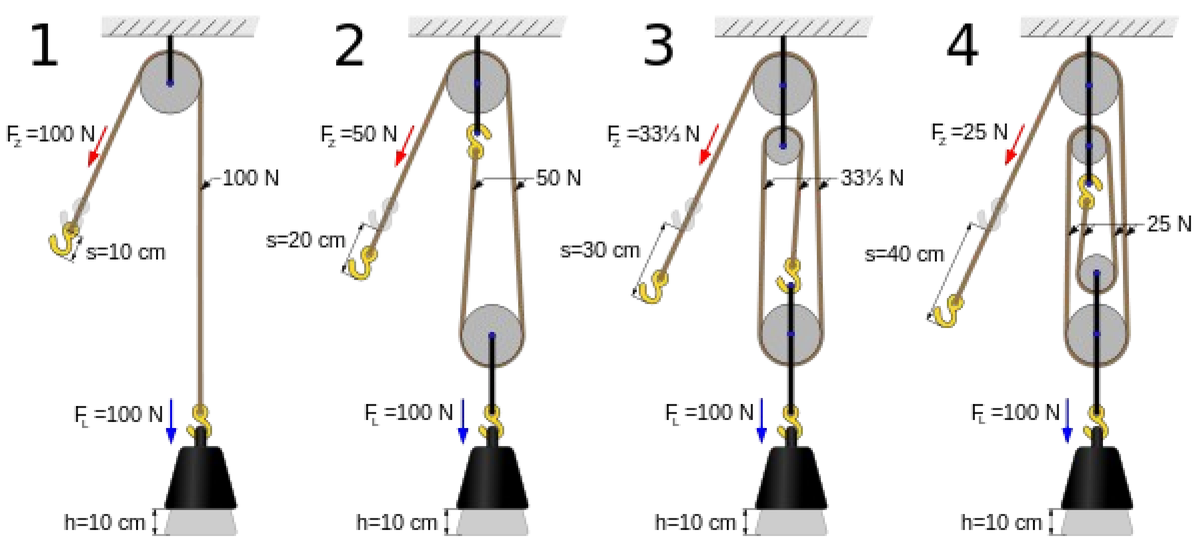
Alright, alright, you've won your bet:
You can lift me with one hand...

Paranco



$$T_1 = T_2 = T$$
$$F = T$$
$$T_1 + T_2 = 2T = mg$$
$$R = F + T_1$$
$$Q = T_2 = T$$

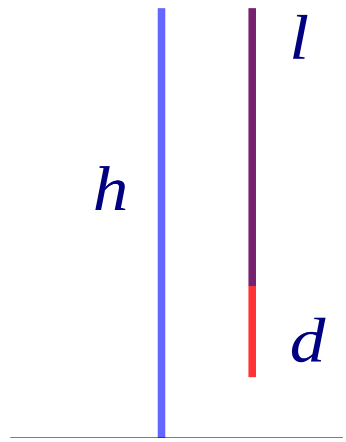
$$\boxed{F = \frac{m\,g}{2}}$$



Un jumper che pesa 61 kg si trova su un ponte alto h=45 m. La corda elastica ha lunghezza a riposo l=25 m e costante elastica K= 160 N/m. A quale altezza da terra arriva il jumper?

Chiamiamo d l'allungamento elastico della molla. Al momento di massimo allungamento, la caduta si ferma e quindi l'energia cinetica è nulla.

$$E_{tot} = m\,g\,y + \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2} K\,d^2$$



$$E_0 = mgh$$

$$E_1 = mg(h - l - d) + \frac{1}{2} K\,d^2$$

$$E_1 = E_0 \;\rightarrow\; mgh = mgh - mgl - mgd + \frac{1}{2} K\,d^2$$

$$\frac{1}{2} K\,d^2 - mgd - mgl = 0$$

$$d = \frac{mg \pm \sqrt{m^2\,g^2 + 2\,k\,m\,g\,l}}{K} = \begin{array}{c} 17.9\;\;m \\ -10.5\;\;m \end{array}$$

La soluzione negativa non è fisica quindi d = 17.9 m e il jumper si ferma a

$$x = h - l - d = 45 - 25 - 17.9 = 2.1\;\;m$$

In palestra un atleta solleva un peso di 5 kg all'altezza di 1 m per 20 volte al minuto. Qual'è la potenza media?

$$L_0 = mgh \quad Lavoro\ per\ singolo\ sollevamento$$

$$L = n\,L_0 = 20\ L_0 \quad Lavoro\ totale$$

$$P = \frac{d\,L}{dt} = \frac{\Delta\,L}{\Delta\,t} \quad potenza\ \ media$$

$$P = mgh\frac{20}{60} = 8.2\ \ watt$$

Un ascensore di massa m = 500 kg precipita da un'altezza h=40 m all'interno di un sistema di guide frenanti. Al termine della corsa è presente un pistone a molla con costante elastica K = 1000 N/m. Quando l'ascensore arriva a fondo corsa la molla si comprime di una quantità s = 1.5 m prima che l'ascensore si fermi. Calcolare la forza di attrito che si esplica lungo le guide frenanti.

$$\Delta E = E_f - E_i - L_A = 0$$

Dove L_A è il lavoro compiuto dalla forze di attrito che trasforma energia cinetica in calore.

$$E_i = m g h = 196\,000\ J$$

$$E_f = \frac{1}{2} K s^2 = 1125\ J$$

$$L_A = E_f - E_i = 1125 - 196000 = -194875\ J$$

$$F = \frac{L_A}{h} = \frac{-194875}{40} = -4872\ N$$

Una motovedetta di massa m_1=200 ton, inizialmente ferma, spara contemporaneamente una palla di cannone di massa m_2 = 70 kg con velocità v_2 = 50 m/s e un siluro di massa m_3=400 kg e v_3 = 10 m/s verso una barca di contrabbandieri di massa m_4 = 8 ton che si muove verso la motovedetta a velocità v_4 = 4.5 m/s. Calcolare: a) il modulo della velocità della motovedetta dopo lo sparo e il lancio del siluro, b) Il modulo della velocità della barca assumendo che sia il proiettile che il siluro rimangano conficcati nella chiglia.

Conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_1 = 0 = m_1 v_1' - m_2 v_2 - m_3 v_3$$

$$v_1' = \frac{m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1} = 0.0375\, m/s = 0.14\, km/h$$

$$m_4 v_4 - m_2 v_2 - m_3 v_3 = (m_2 + m_3 + m_4) v_4$$

$$v_4' = \frac{m_4 v_4 - m_2 v_2 - m_3 v_3}{m_2 + m_3 + m_4} = 3.36\, m/s = 12.1\, km/h$$

Una piattaforma circolare con momento di inerzia I = 20000 kg m^2 e raggio R = 20 m ruota con una velocità angolare w = 0.5 rad/s. Un uomo di massa m = 70 kg si trova inizialmente al bordo della piattaforma. Ad un certo punto l'uomo cammina lungo un raggio della piattaforma e raggiunge il centro. Qual'e' la nuova velocità angolare w'? Di quanto varia l'energia cinetica?

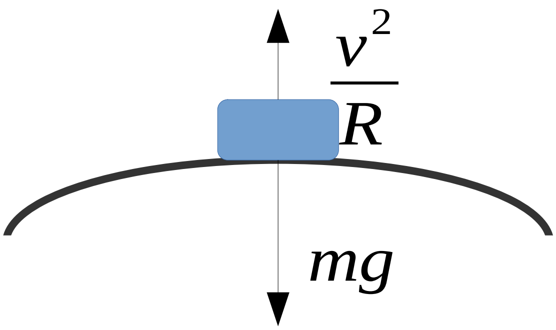
Conservazione del momento angolare

$$L_0 = I\omega_0 + mR^2\omega_0$$

$$L_f = I\omega'$$

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) = 2.5 * 0.5 = 1.2 \ rad/s$$

Un auto di massa m=500 kg percorre con v = 50 km/h un dosso con raggio R=50 m. Calcolare il valore della reazione vincolare sulla cima del dosso.



Equazione del moto:

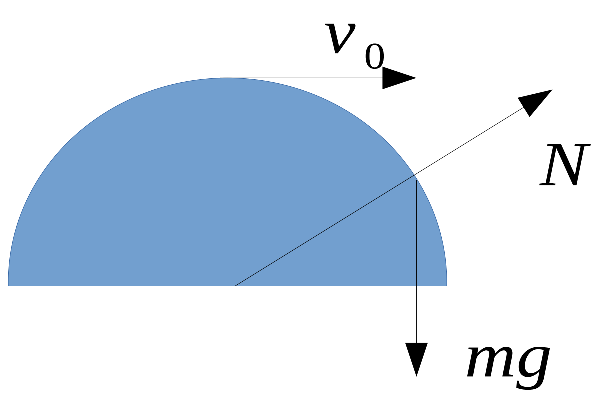
$$ma = m\frac{v^2}{R} = mg - R_V$$

$$R_V = mg - m\frac{v^2}{R}$$

$$v = 50 \;\; km/h = 13.9 \;\; m/s$$

$$R_V = 500 * 9.8 - 13.9^2 * 500/50 = 2968 \;\; N$$

Un punto materiale si trova alla sommità di una semisfera di raggio r = 2 m. Il punto viene messo in moto con una velocità iniziale v_0 tangente alla superficie su cui scivola senza attrito. Trovare: a) come il punto di distacco dipende dalla velocità v_0, b) il valore massimo di v_0 affinché il punto non si stacchi subito dalla sfera.



$$m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}$$

Proiettata lungo la direzione radiale l'equazione diventa

$$mg\sin\alpha-N=m\frac{v^2}{r}$$

Condizione di distacco? Quando non è più necessaria una reazione vincolare cioè N=0

$$N=0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin\alpha=m\frac{v^2}{r}$$

Qual'è l'incognita? α cioè l'angolo a cui avviene il distacco. Bisogna quindi calcolare la velocità v in funzione dell'angolo α.

Per calcolare la velocità su usa la conservazione dell'energia.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g r = \frac{1}{2} m v^2 + m g r \sin\alpha \Rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 g r (1 - \sin\alpha)$$

$$g \sin\alpha = \frac{v_0^2 + 2 g r (1 - \sin\alpha)}{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{v_0^2}{3 r g} + \frac{2}{3}}$$

Perchè non si stacchi subito

$$\sin 90^o = 1 = \frac{v_0^2}{3 g r} + \frac{2}{3} \Rightarrow v_0 = \sqrt{g} r = 4.4 \ m/s$$

Quindi v < v_0 < 4.4 m/s. Perchè non si stacchi mai

$$\sin 0^o = 0 = \frac{v_0^2}{3 g r} + \frac{2}{3} \Rightarrow v_0^2 = -2 g r$$

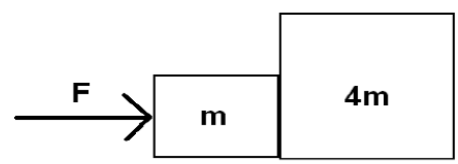
Non ha soluzione: SI STACCA SEMPRE.

1) Due corpi vengono fatti cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza **h**, il primo in caduta libera, il secondo lungo un piano inclinato. Si trascuri ogni tipo di attrito. La velocità con cui i corpi arrivano al suolo è:

1) uguale per i due corpi
2) il corpo in caduta libera possiede velocità maggiore
3) il corpo che scende lungo il piano inclinato possiede velocità maggiore
4) non è possibile rispondere se non si conoscono le masse dei due corpi

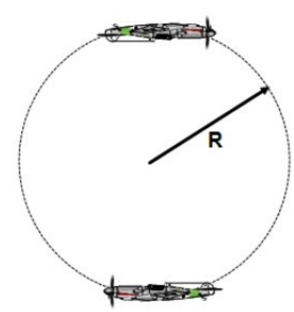
2) Una forza constante **F** viene applicata a due scatole, una di massa **m** e l'altra di massa **4m**, a contatto come in figura. Le scatole si muovono su una superficie priva di attrito. L'accelerazione **a** della scatola più pesante risulta:

1) F/m
2) F/(4m)
3) F/(5m)
4 F/(2m)



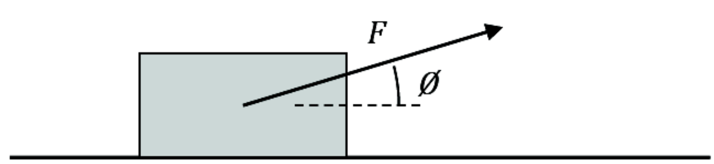
3) Un pilota esegue a velocità costante un un giro completo a forma di cerchio come in figura. Il raggio del cerchio è **R**. Quando si trova nel punto più basso, il peso apparente del pilota è pari a **6 m g** dove **m** e' la massa del pilota e **g** l'accelerazione di gravità. Qual'è l'accelerazione dell'aereo nel punto più basso?

1) g
2) $2\,g$
3) $6\,g$
4) $5\,g$



4) Una forza costante **F** viene applicata ad un corpo di massa **m** ad un angolo ϕ rispetto alla direzione orizzontale. Se il corpo si sposta di una distanza x dalla sua posizione iniziale, il lavoro fatto dalla forza risulta:

1) $F\,x\cos(\phi)$
2) $F\,x$
3) $Fx\sin(\phi)$
4) $F\cos(\phi)$



Un proiettile, che viaggia a velocità v, colpisce una molla orizzontale e la comprime di Δx = 2.0 cm prima di fermarsi temporaneamente. Di quanto viene compressa la molla se la velocità del proiettile è pari a $2v$?

2.0 cm
2.8 cm
4.0 cm
8.0 cm

Un'auto di massa m = 1500 kg viene trainata a velocità costante da una corda inclinata di un angolo pari a θ = 20° rispetto alla direzione orizzontale. Una forza di attrito costante F_a = 320 N si oppone al movimento in avanti dell'auto. Si calcoli: 1) La tensione T del filo 2) La reazione vincolare N del suolo.

Se la velocità è costante allora il sistema è in equilibrio quindi dobbiamo fare il bilancio delle forze

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{T} + \vec{N}$$

suddividendo il problema lungo le due direzioni abbiamo

$$\begin{cases} x: 0 = -F_a + T\cos\theta \\ y: 0 = -mg + T\sin\theta + N \end{cases}$$

ottenendo

$$T = \frac{F_a}{\cos\theta} = 370 \text{ N} \quad e \quad N = mg - T\sin\theta = 14.5 \text{ kN}$$

Due sfere solide di massa m sono connesse tramite un’asta rigida di massa trascurabile. Se l’asta viene incernierata in un punto O distante x dalla prima massa e 2x dalla seconda massa, quanto vale il momento di inerzia del sistema quando ruota attorno a questo punto?

$2mx^2$

$4mx^2$

$5mx^2$

$9mx^2$