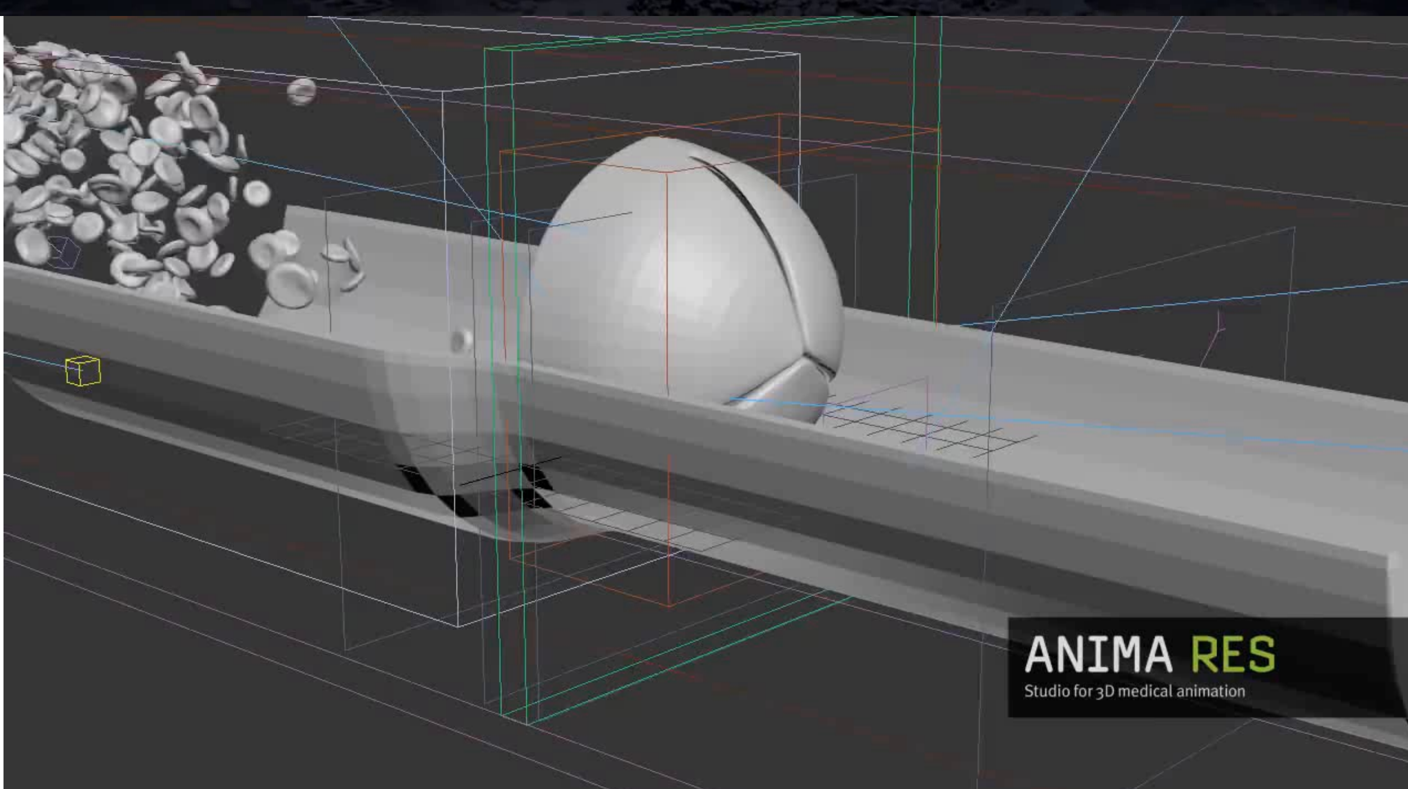
Dinamica dei fluidi



DINAMICA DEI FLUIDI

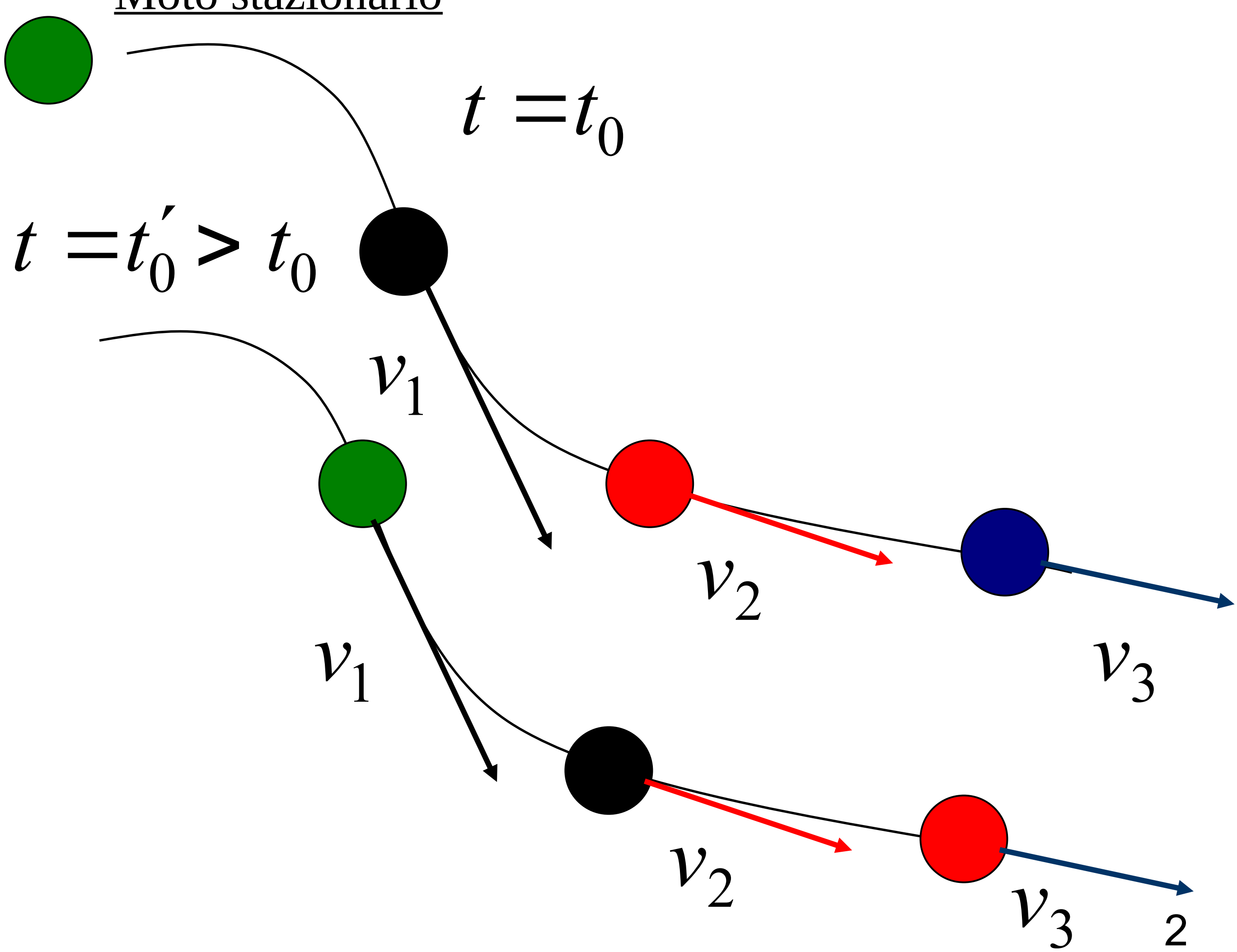
Fluidi: sistemi privi di forma propria. Si suddividono in

a) gas, privi anche di un proprio volume

b) liquidi, dotati di volume ben definito.

Immagineremo un fluido come un continuo, costituito da volumetti infinitesimi, ogni volumetto muovendo lungo una sua traiettoria.

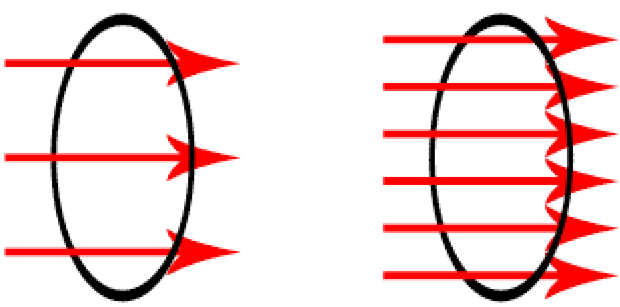
Moto stazionario



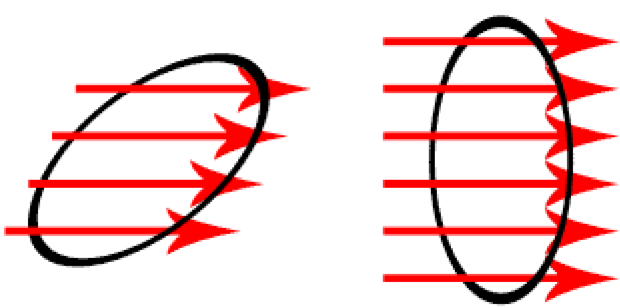
Legge della portata

Portata Q: quantità di fluido che attraversa una sezione di area S nell'unità di tempo. Si può misurare in volume o massa i.e. m^3/s o kg/s.

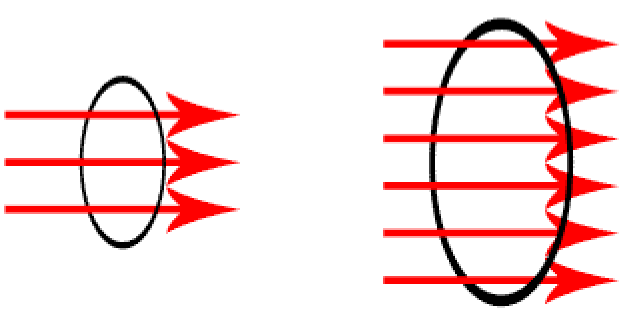
Flusso Φ: concetto più generale che nel caso di un fluido coincide con la portata



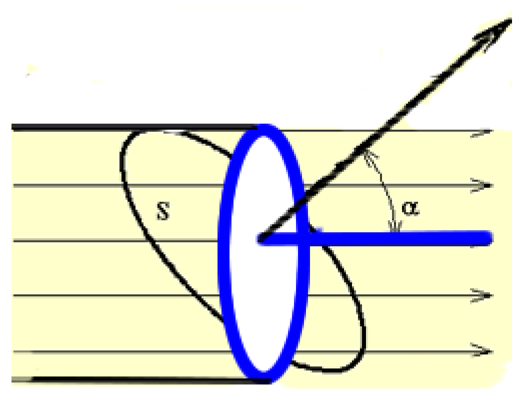
Flux is proportional to the density of flow.



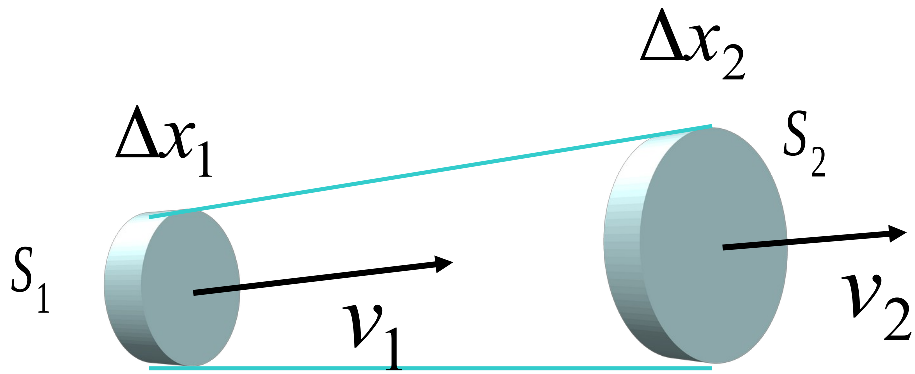
Flux varies by how the boundary faces the direction of flow.



Flux is proportional to the area within the boundary.



Per un fluido a densità costante (incomprimibile), con flusso stazionario (v costante) e pareti del condotto rigide, vale la relazione



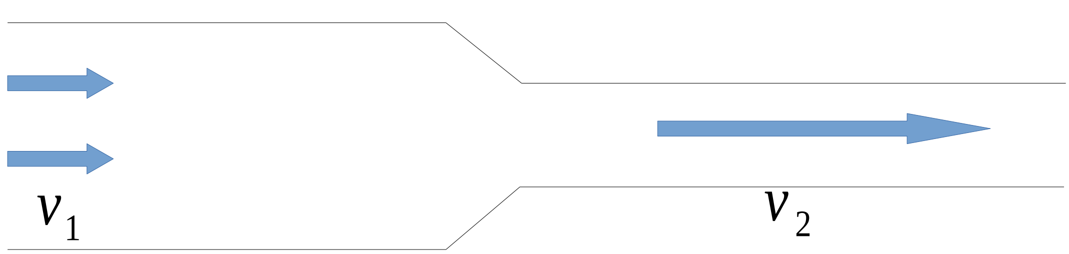
$$V_1 = S_1 \Delta x_1 = S_1 v_1 \Delta t \qquad V_2 = S_2 \Delta x_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

Per la conservazione della massa (equazione di continuità) vale:

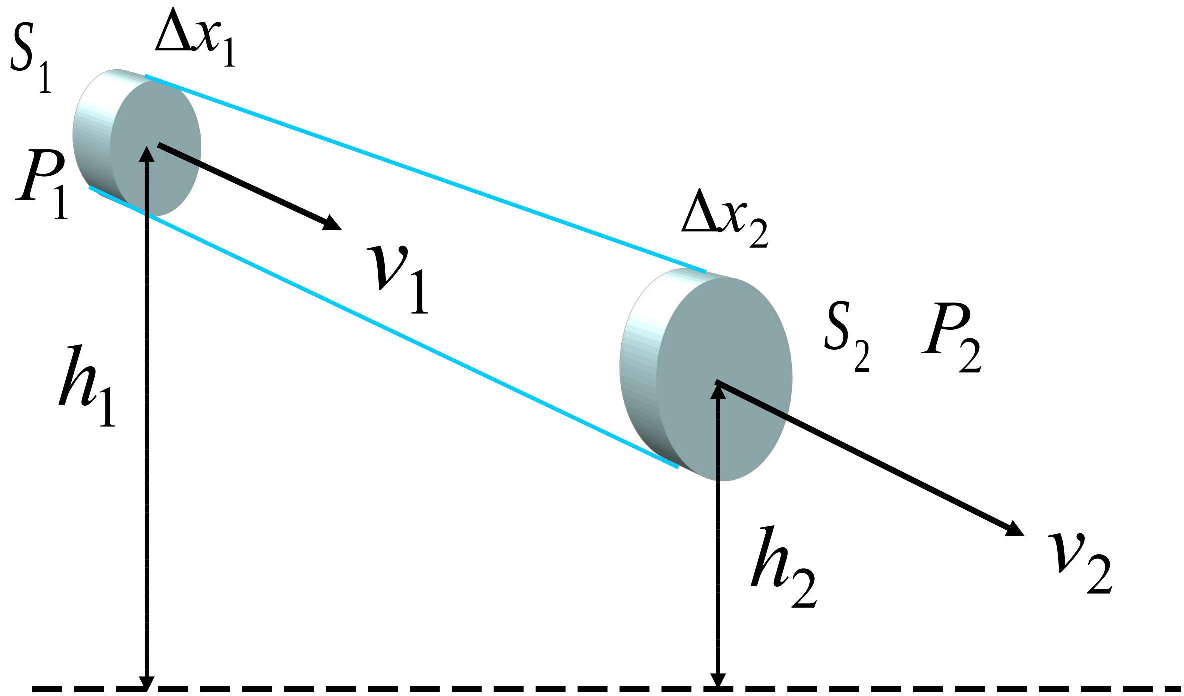
$$M_1 = V_1 \rho = M_2 = V_2 \rho \Rightarrow V_1 = V_2$$

$$S_1 v_1 \cancel{\Delta t} = S_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$



Teorema di Bernoulli



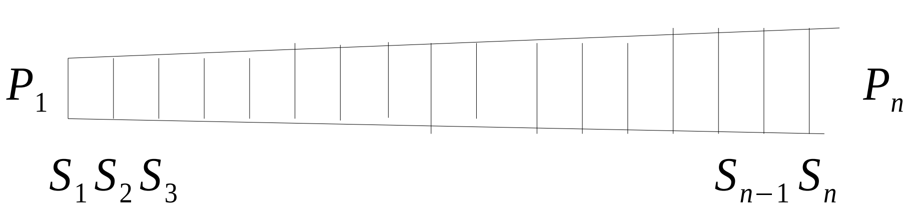
$$L = \Delta E_K + \Delta E_p = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + g m \left(h_2 - h_1\right)$$

Dove $m = S_1 \Delta x_1 \rho = S_2 \Delta x_2 \rho$

Il lavoro è fatto dallo forze di pressione che agiscono su S_1 e S_2

$$L = P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2$$

$$P_1 S_1 - P_2 S_2 + P_2 S_2 - P_3 S_3 + \ldots. - P_{n-1} S_{n-1} + P_{n-1} S_{n-1} - P_n S_n$$



$$\frac{1}{2}m v_2^2+P_2 S_2 \Delta x_2+g\,m h_2=\frac{1}{2}m v_1^2+P_1 S_1 \Delta x_1+g\,m\,h_1$$

Per la legge della portata: $Q=S\,v=const.$

$$S_1 v_1 dt=S_1 \Delta x_1=S_2 v_2 dt=S_2 \Delta x_2$$

$$m=\rho S_1 \Delta x_1=\rho S_2 \Delta x_2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho}\,\cancel{S_1 \Delta x_1}\,v_1^2+\frac{\cancel{\rho}}{\rho}P_1 \cancel{S_1 \Delta x_1}+g\,\cancel{\rho}\,\cancel{S_1 \Delta x_1}\,h_1=$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho}\,\cancel{S_2 \Delta x_2}\,v_2^2+\frac{\cancel{\rho}}{\rho}P_2 \cancel{S_2 \Delta x_2}+g\,\cancel{\rho}\,\cancel{S_2 \Delta x_2}\,h_2$$

$$\frac{1}{2}v_1^2+\frac{P_1}{\rho}+g\,h_1=\frac{1}{2}v_2^2+\frac{P_2}{\rho}+g\,h_2$$

$$\boxed{\frac{1}{2g}v^2+\frac{P}{\rho g}+h=const}$$

Può anche essere scritta come:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho h g = const$$

$\frac{1}{2}\rho v^2$ $\Rightarrow$ Densità di energia cinetica

$$(\rho \equiv \frac{M}{V}) \ !$$

$\rho g h$ $\Rightarrow$ Densità di energia potenziale

Il teorema di Bernoulli esprime la conservazione dell' energia meccanica applicata alla densità di energia del fluido.

Problema

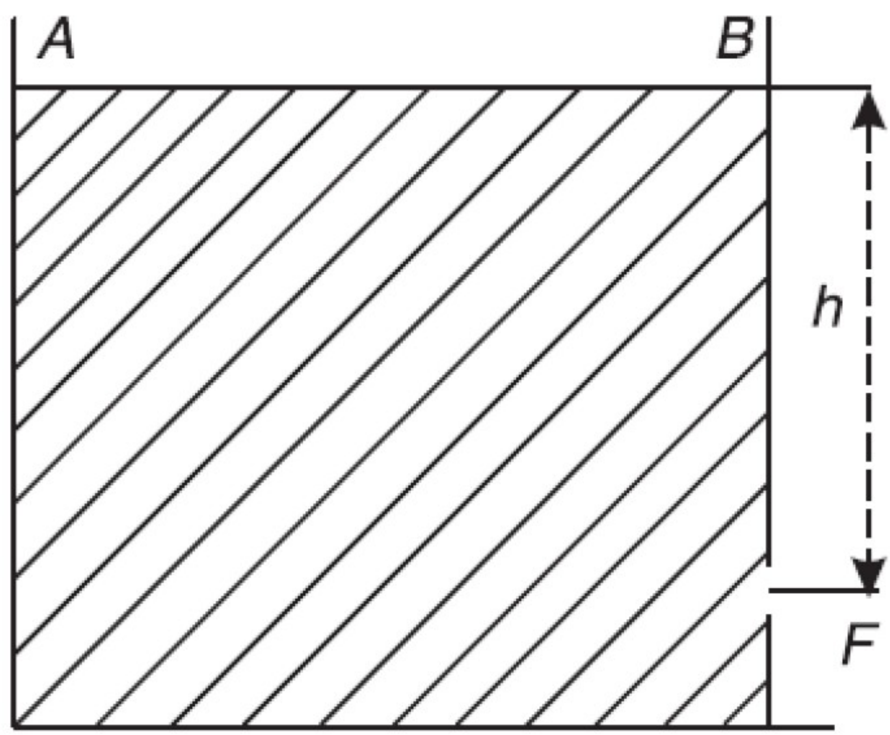
Si consideri un recipiente come in figura F3.2, ripieno di liquido. Il recipiente sia provvisto di un foro ad una profondità *h*.Volendo calcolare la velocità di efflusso del liquido, si può applicare il teorema di Bernoulli. La pressione sulla superficie AB sarà uguale alla pressione atmosferica p_H ; la velocità del liquido all'interno del recipiente può essere considerata trascurabile in quanto la sezione AB è molto grande rispetto a quella del foro in F; h è l'altezza del liquido (presa rispetto ad un asse di riferimento che passa per F e avente l'origine in questo punto). Nel punto F la pressione è p_H , l'altezza 0. Trovare

la velocità di efflusso v.

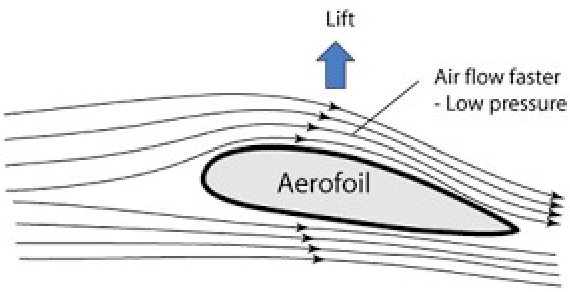
Dal teorema di Bernoulli si ottiene:

$$\frac{p_H}{\rho g}+h=\frac{p_H}{\rho g}+\frac{v^2}{2g} \quad \text{da cui} \quad v=\sqrt{2gh} \qquad \text{[F3.5]}$$

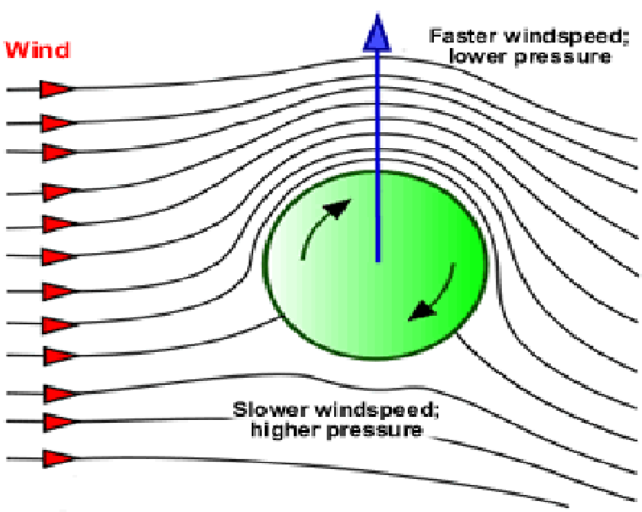
Questo è il cosiddetto "teorema di Torricelli".

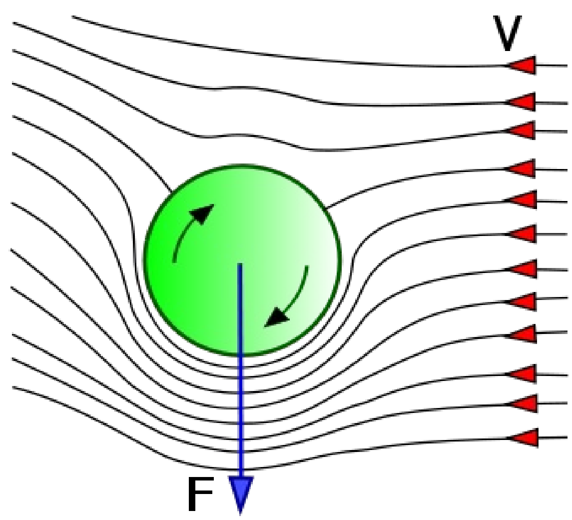


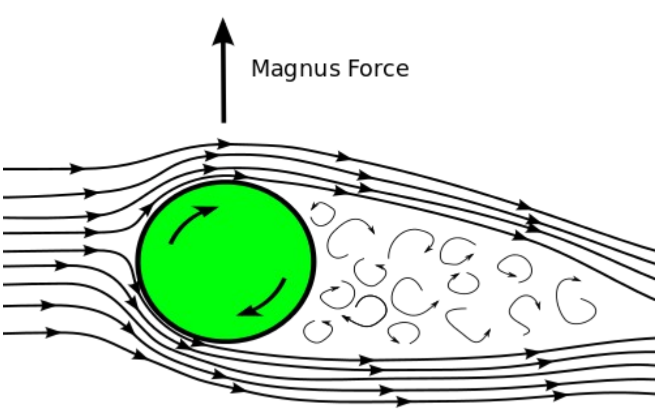
Effetto Magnus



Percorre una traiettoria pià lunga quindi la v del gas è maggiore sopra rispetto a sotto mentre la P cala.

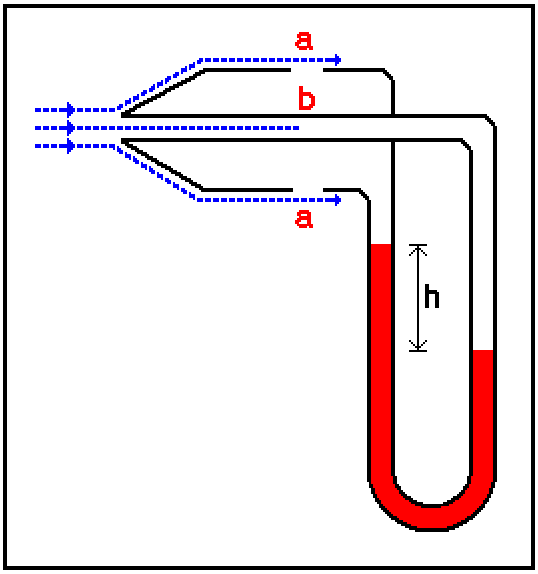






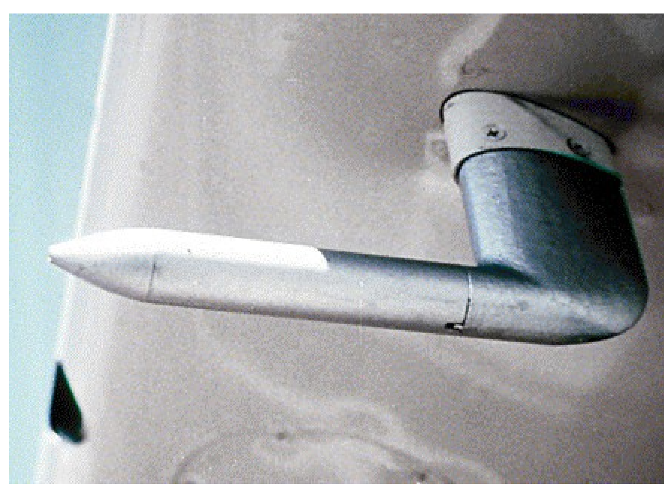
La turbolenza riduce l’effetto accorciando la traiettoria dei filetti di fluido inferiori rispetto a quelli superiori.

Tubo di Pitot

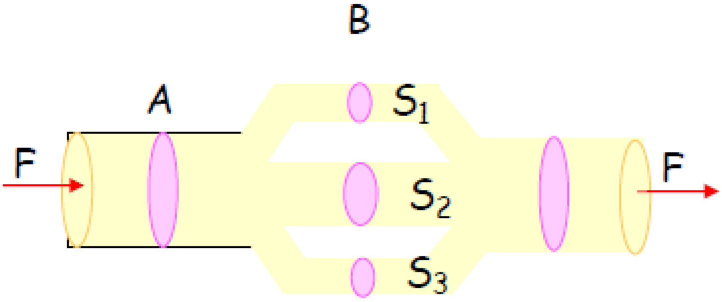


Punto di stagnazione: la v del fluido =0 e tutta la densità di energia cinetica viene convertita in pressione (Th. Bernoulli). Questo avviene per il flusso entrante quando il liquido (rosso) raggiunge l'equilibrio. h misura la differenza di pressione.

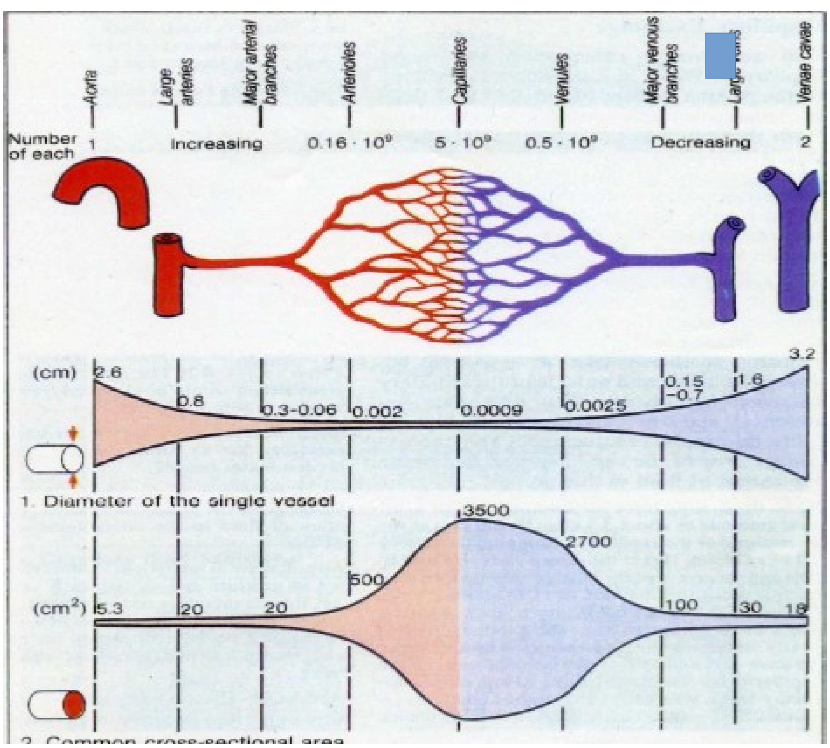
$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \Delta P$$



Circolazione



$$A = \pi R^2$$
$$S_i = \pi s_i^2$$
$$Se \quad A < \sum_i S_i \quad la \ velocità \ del \ flusso \ cala$$

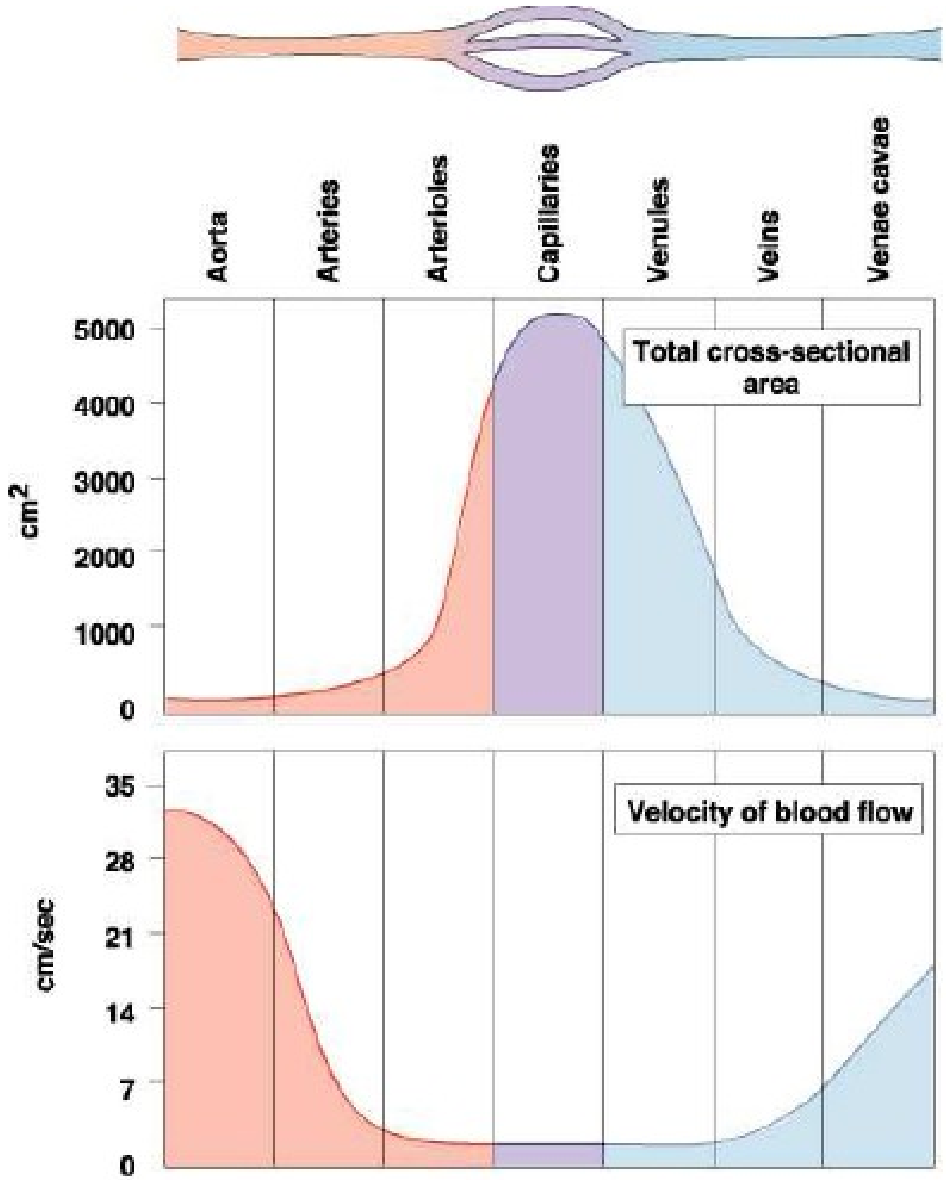


Numero vasi

Letto vascolare

Diametro del singolo vaso

Sezione trasversa totale



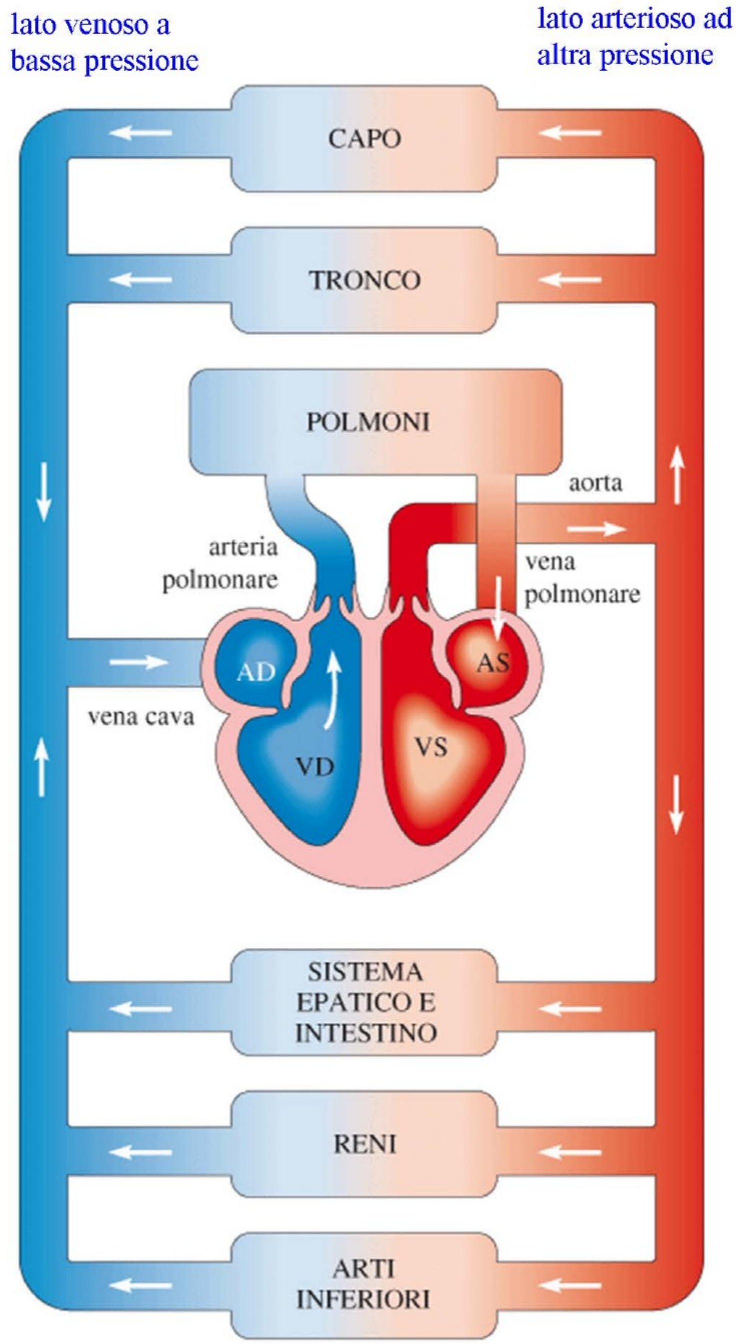
Nei capillari la sezione totale aumenta e quindi la velocità del sangue diminuisce favorendo lo scambio di ossigeno e nutrienti tra sangue e cellule.

Volume totale=6 l

Portata media (a riposo)= 60 cm^3 /s

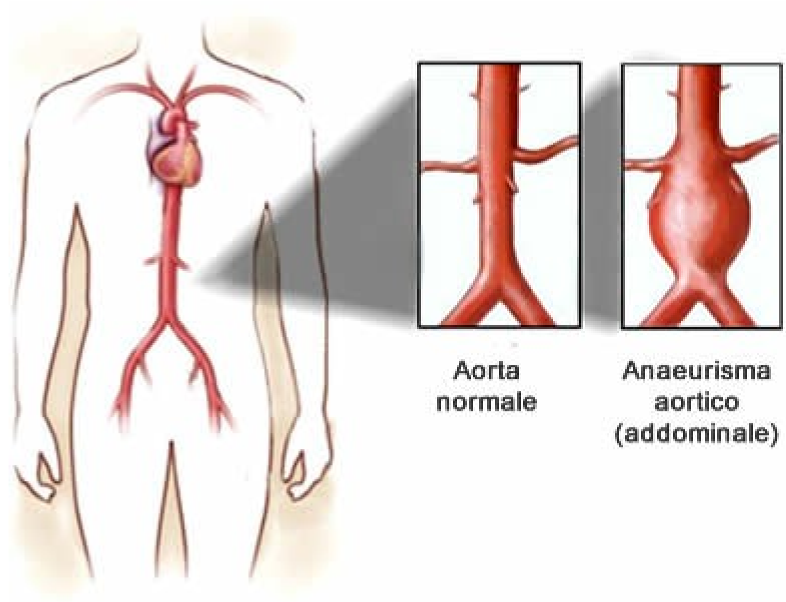
V media = 2 cm/s

N. pulsazioni per circolo totale=100

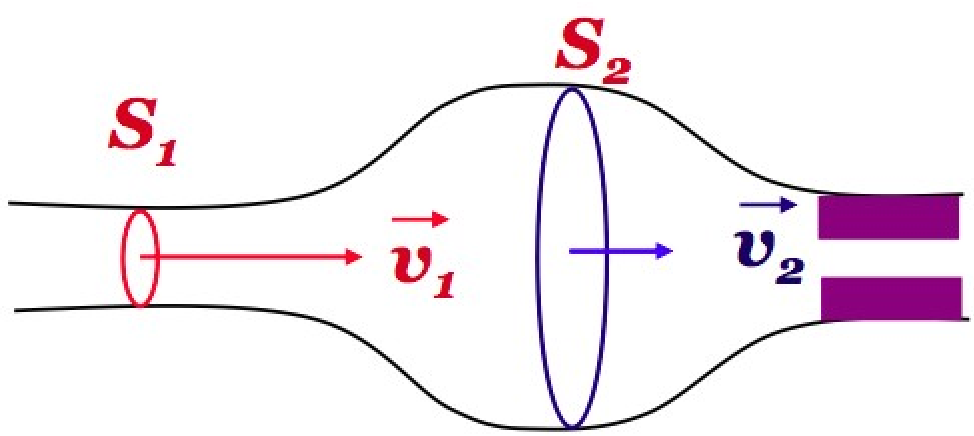


	Lunghezza media	Diametro medio	Intervallo medio di pressione (p_1–p_2, mmHg)	Velocità media del sangue	Numero di vasi
Aorta	15 cm	18 mm	100–97	~30 cm/s	1
Grandi arterie Arterie terminali	60 cm 11 cm	10 mm 1.6 mm	97–90 90–80	~48 cm/s	160
Arteriole	2 mm	50 µm	80–30	~4 cm/s	1.4×10^5
Capillari	1 mm	8 µm	30–10	< 1 mm/s	3.9×10^9
Venule	2 mm	60 µm	10–5	~5 cm/s	3.2×10^8
Vene principali Grandi vene	10 cm 60 cm	1.6 mm 20 mm	5–0	~30 cm/s	60

Aneurisma tende sempre a peggiorare



Modello semplificato (orizzontale, si trascura gravità e attrito e si assumono condotti qusi rigidi)



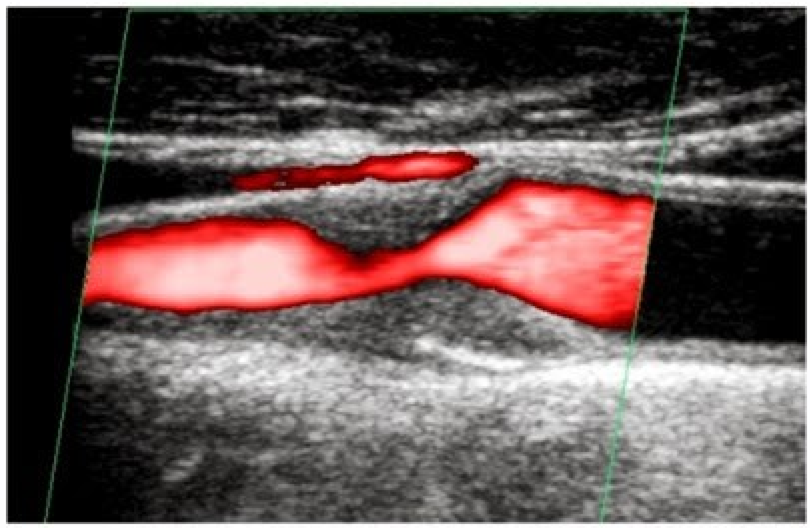
$$h_1 = h_2$$
$$Q = const$$
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\frac{P_1}{d\,g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{d\,g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

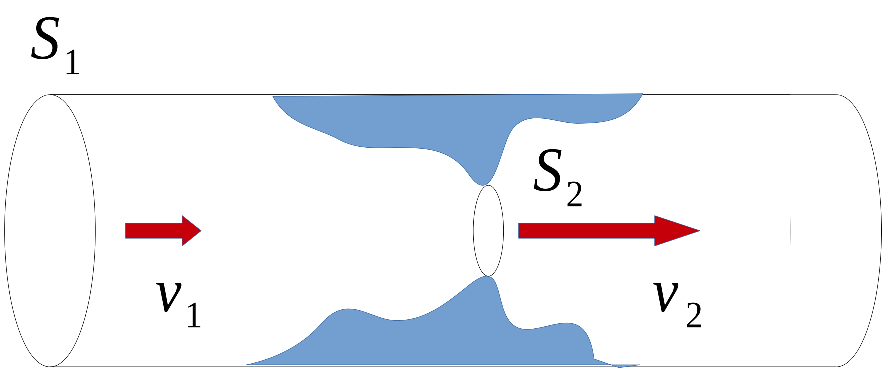
$S_2 > S_1 \quad v_2 < v_1 \quad P_2 > P_1$

La pressione in 2 è maggiore che in 1 e l'aneurisma tende a peggiorare

Anche la stenosi tende sempre al peggioramento



Stenosi carotidea



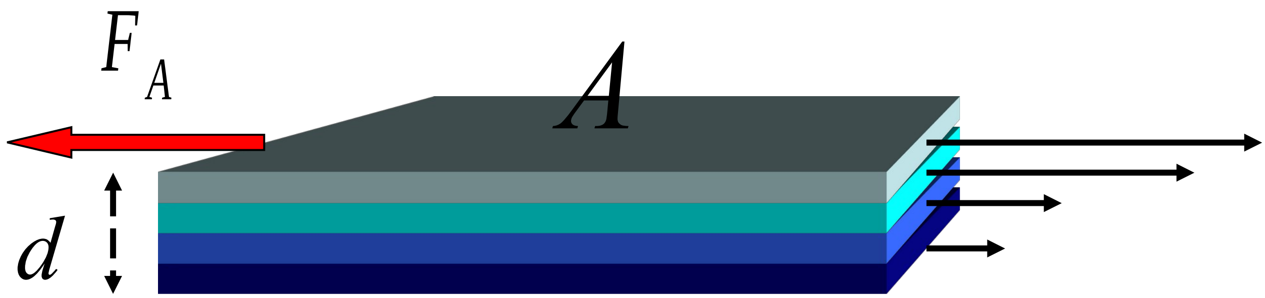
$$h_1 = h_2$$
$$Q = const$$
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\frac{P_1}{dg} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{dg} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$S_2 < S_1 \quad v_2 > v_1 \quad P_2 < P_1$

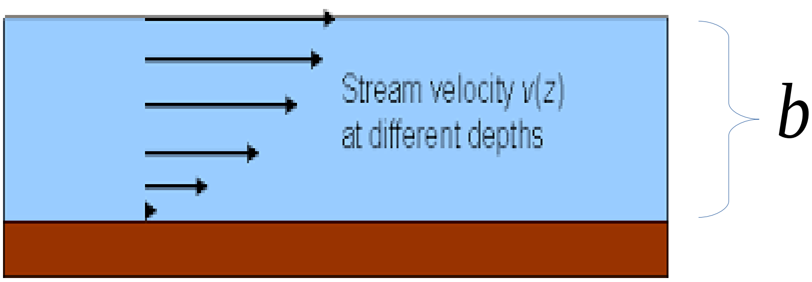
La stenosi tende ad aumentare

Regime laminare: presenza di attrito nel fluido

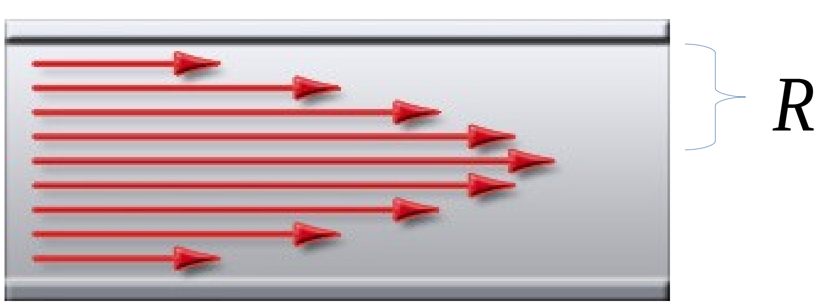


$$F_A = \eta A \frac{dv}{dr}$$

η = viscosità   unità di misura **Poise:** kg/(m s)

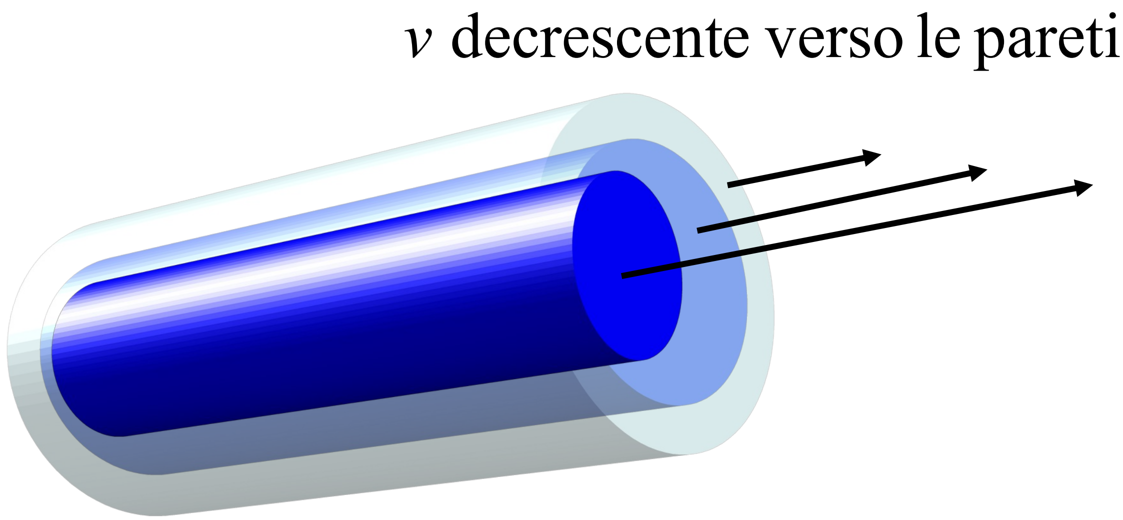


$$v(y) = v(b)\,\frac{y}{b}$$

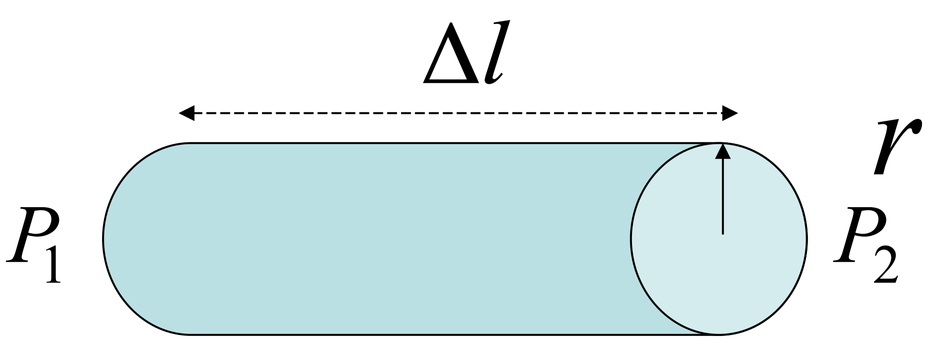


$$v(r) = v(0)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2}$$

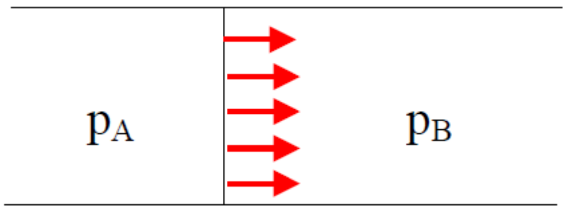
Moto di fluido viscoso in condotto cilindrico



Moto per lamine cilindriche concentriche con velocità decrescente dal centro alle pareti.



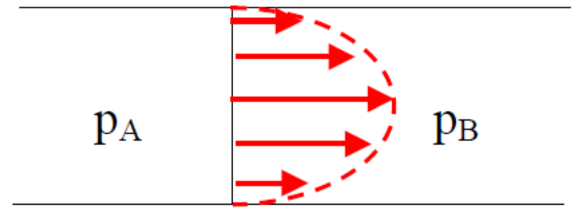
$\Delta P = P_1 - P_2 > 0$ per vincere la forza viscosa un fluido ideale



v costante nella sezione A

$p_A = p_B$ costante

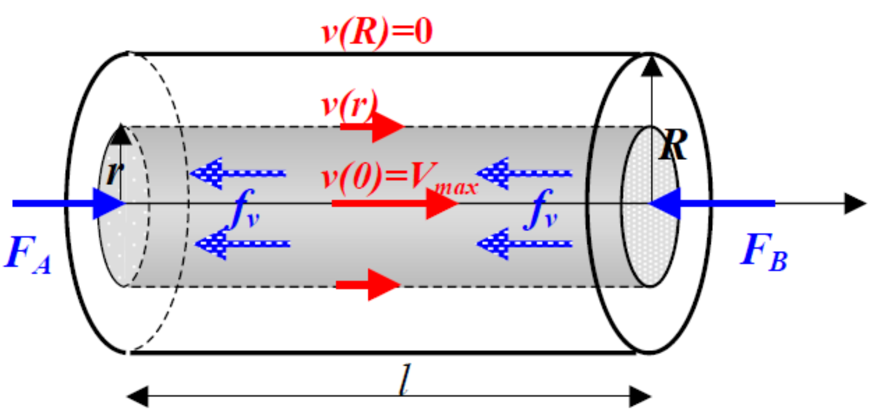
un fluido reale



v variabile nella sezione A

$p_A > p_B$

La velocità è distribuita in modo laminare con v(R) = 0 e V(0) = Vmax



$$F_A = p_A \cdot \pi r^2$$

$$F_B = p_B \cdot \pi r^2$$

$$F_V = \eta A \frac{dv}{dr} \quad \text{con } A = 2\pi r \cdot l$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4 (p_A - p_B)}{8\eta l}}$$

LEGGE DI POISEUILLE

La portata è proporzionale al quadrato del raggio e inversamente proporzionale alla lunghezza del condotto. Esempio: quando c'è vasocostrizione per mantenere costante la portata bisogna aumentare la differenza di pressione.

Dimostrazione un po' a spanne:

Attenzione, il segno negativo del termine viscoso è dovuto al verso della derivata della velocità.

$$\left(P_1 - P_2\right) \pi r^2 = -\eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr}$$

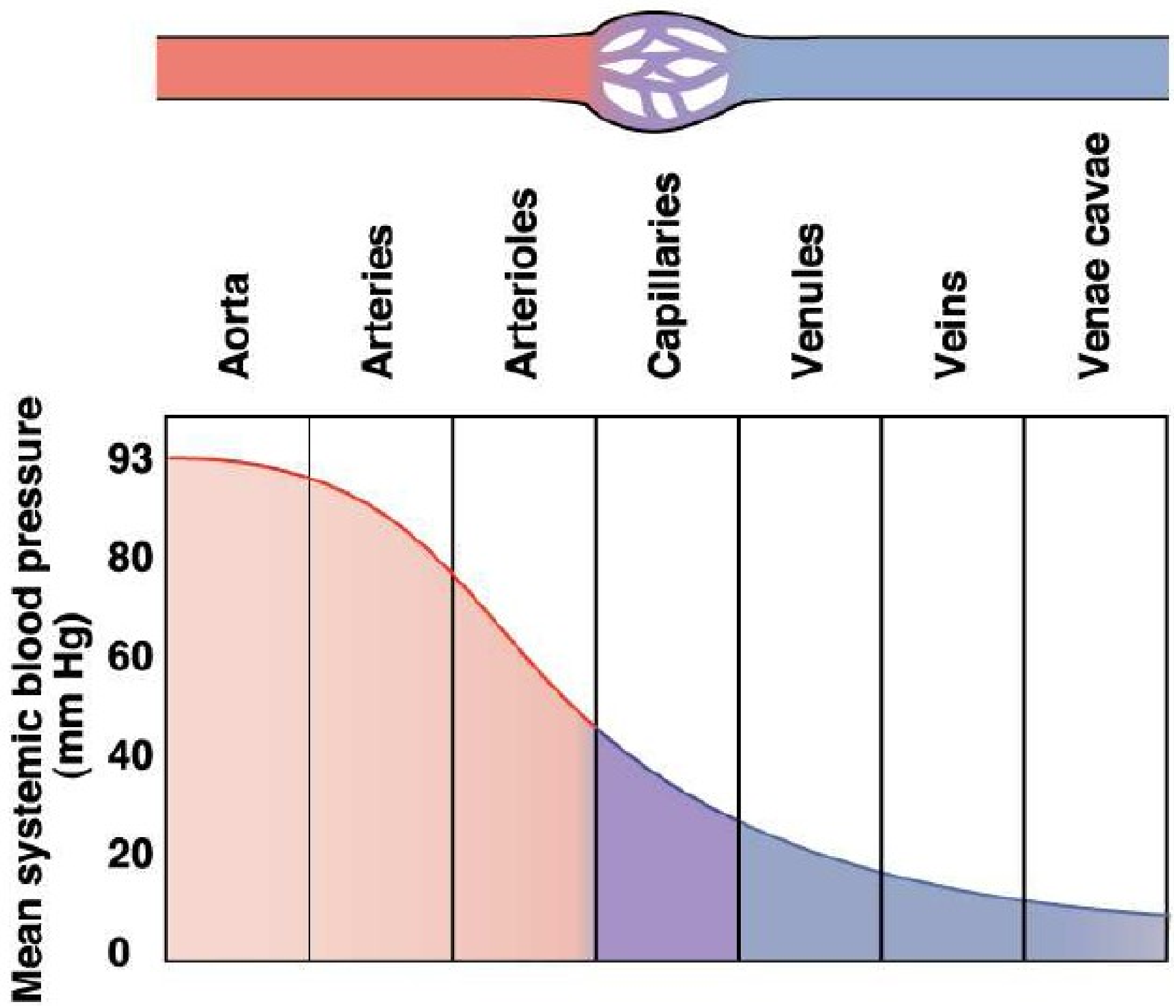
$$-\frac{dv}{dr} = \Delta P \frac{r}{2 \eta l}$$

$$-\int_{v(r)}^{v(R)} dv = \int_{r}^{R} \Delta P \frac{r}{2 \eta l} dr$$

$$v(r) - 0 = \Delta P \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{4 \eta l}$$

$$Q = \int_0^R v(r) 2 \pi r \, dr = \int_0^R \Delta P \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{4 \eta l} 2 \pi r \, dr =$$

$$\pi R^4 \frac{\Delta P}{8 \eta l}$$



Calo di pressione nel sistema circolatorio a causa del moto del sangue.

Resistenza del sistema circolatorio

L'equazione di continuità vale anche per un circuito complesso di vasi interconnessi.

Possiamo stimare la **resistenza idraulica** per l'intero sistema cardiovascolare:

$$R \equiv \frac{p_1 - p_2}{Q}$$

Esempio: per un adulto a riposo, con una caduta di pressione complessiva

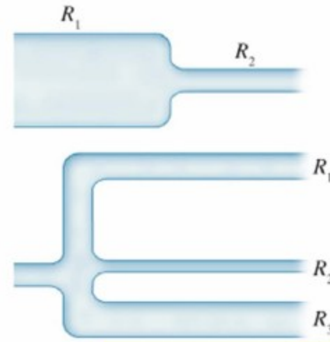
$$p_1 - p_2 = 100 \text{ mmHg} \approx 13.3 \text{ kPa}$$

e una **portata sanguigna complessiva**

$$Q = 60 \text{ cm}^3/\text{s} = 0.6 \times 10^{-4} \text{m}^3/s$$

si ha:

$$R = 2.2 \times 10^8 \text{ N s m}^{-5}$$



Condotti in serie: $R = R_1 + R_2 + \ldots$

Condotti in parallelo: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$

$$\frac{1}{R_{Tot\ \text{arteriole}}} = \frac{N_a}{R_a}; \qquad \frac{1}{R_{Tot\ \text{capillari}}} = \frac{N_c}{R_c}$$

$$R_a < R_c \qquad \text{ma} \qquad N_a << N_c$$

$$R_{Tot\ \text{arteriole}} = \frac{R_a}{N_a} > \frac{R_c}{N_c} = R_{Tot\ \text{capillari}}$$

La più rapida caduta di pressione si ha tra gli estremi del distretto delle arteriole.

Di quanto aumenta la resistenza di una carotide con un'ostruzione del 25%?

$$R_0 = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4} \quad R = \frac{8\eta L}{\pi (0.75\, r_0)^4} = 3.16\, R_0$$

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{0.75^{-4} - 1}{1} = 2.16$$

Vasodilatazione e vasocostrizione

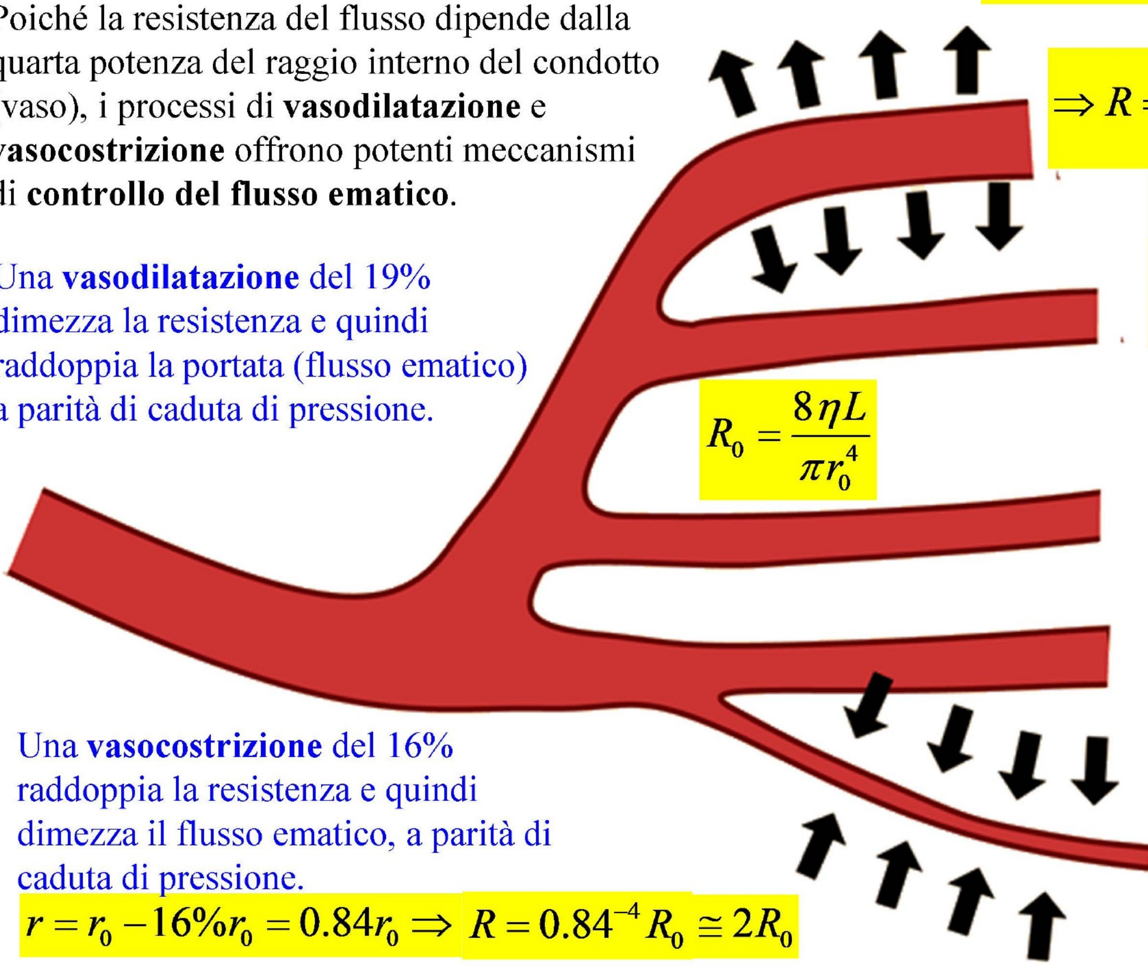
Poiché la resistenza del flusso dipende dalla quarta potenza del raggio interno del condotto (vaso), i processi di **vasodilatazione** e **vasocostrizione** offrono potenti meccanismi di **controllo del flusso ematico**.

$$r = r_0 + 19\% r_0 = 1.19 r_0$$

$$\Rightarrow R = \frac{8\eta L}{\pi (1.19 r_0)^4} = 1.19^{-4} R_0 \cong \frac{R_0}{2}$$

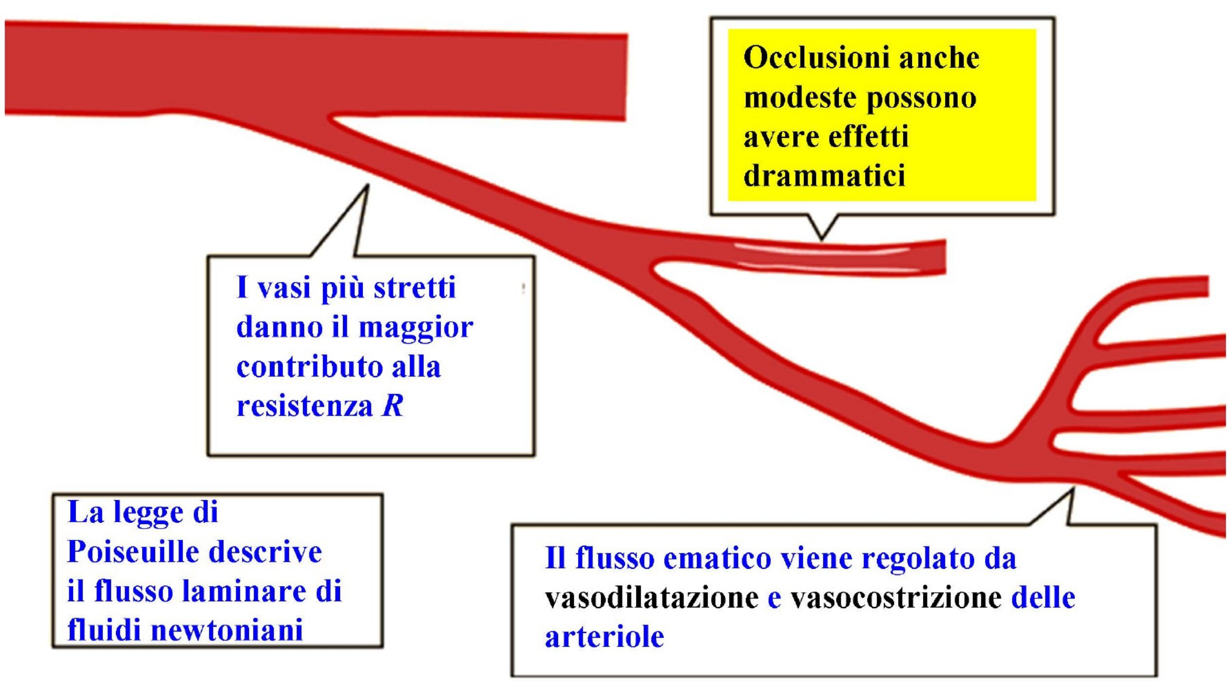
Una **vasodilatazione** del 19% dimezza la resistenza e quindi raddoppia la portata (flusso ematico) a parità di caduta di pressione.

$$R_0 = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4}$$



Una **vasocostrizione** del 16% raddoppia la resistenza e quindi dimezza il flusso ematico, a parità di caduta di pressione.

$$r = r_0 - 16\% r_0 = 0.84 r_0 \Rightarrow R = 0.84^{-4} R_0 \cong 2R_0$$



Esempio 1

La quantità di sangue che il cuore immette nell'aorta ad ogni pulsazione sta tra i 60 e i 110 cm^3 . Poiché le pulsazioni sono circa 1/s, ne consegue che la portata nell'aorta è fra i 60 e i 110 cm^3/s. Qual'è la velocità media del sangue? (Parliamo di velocità media perché assumiamo di essere in regime di Poiseuille, ove la velocità varia con la distanza dal centro del condotto. Quindi la velocità viene mediata in una sezione del condotto). Il raggio dell'aorta si aggira intorno ai 9 mm.

Sappiamo che:

$$\bar{q} = \pi \cdot r^2 \cdot \bar{v} = \pi \cdot (9 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \bar{v} = 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{v}$$

da cui

$$\overline{v_{max}} = \frac{110 \cdot 10^{-6}\ m^3/s}{2.5 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 0.43\ m/s$$

e

$$\overline{v_{min}} = \frac{60 \cdot 10^{-6}\ m^3/s}{2.5 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 0.24\ m/s$$

Esempio 2:

Consideriamo le arteriole del circuito sanguigno. La differenza di pressione media all'inizio e fine delle stesse è circa 30 mmHg. La loro lunghezza media è di 0.2 cm e il diametro di 40 um. Cacolare la portata.

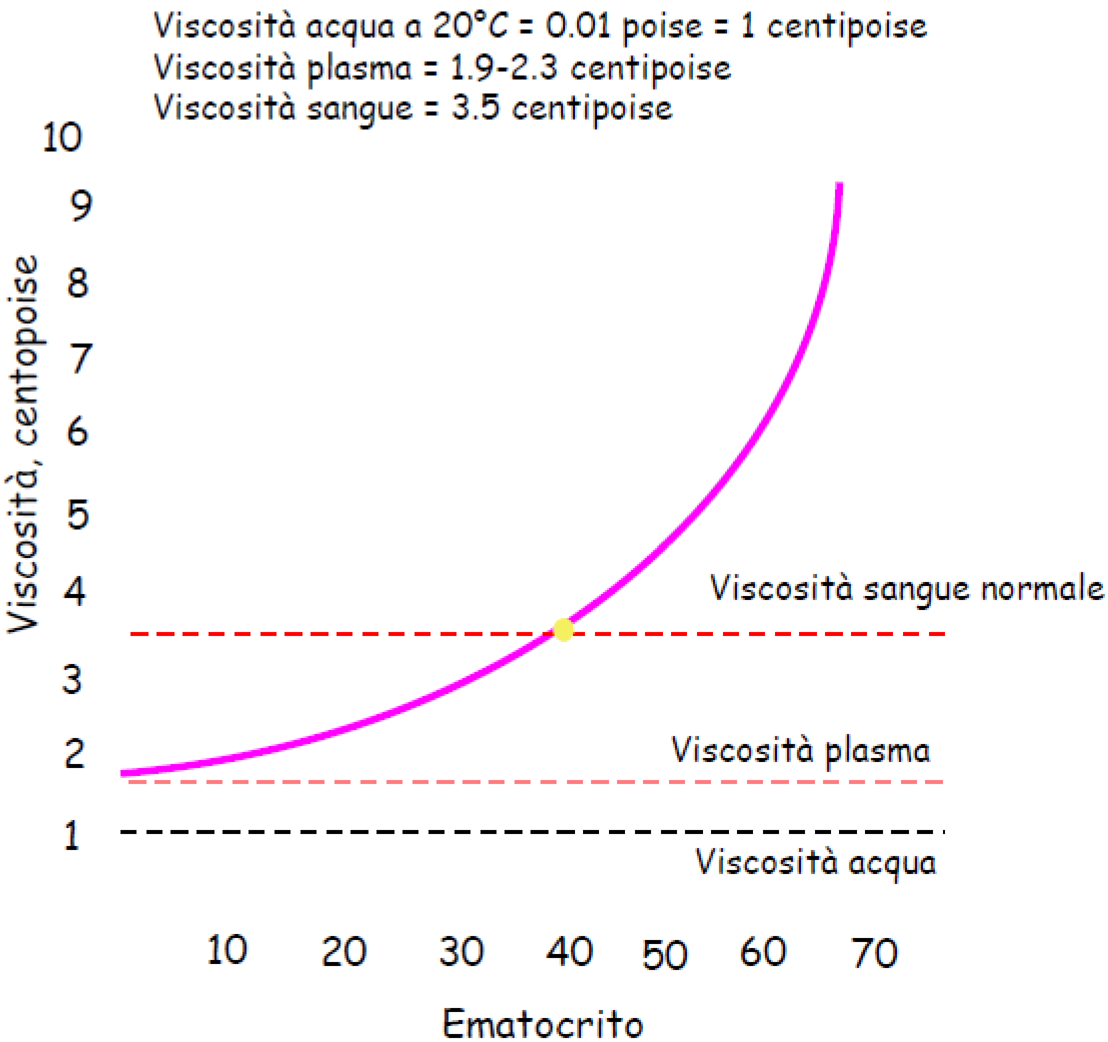
$$r = 20 \times 10^{-6}\ m \qquad \Delta P = 30\ mmHg = 4000\ Pa \qquad l = 0.2\ cm = 2 \times 10^{-3}\ m$$

$$\eta = 2.3 \times 10^{-2}\ Poise = 2.3 \times 10^{-3}\ PI$$

$$p_{PA} = P_{mmHg}\, 133.3$$

$$Q = \Delta P \frac{\pi r^4}{8 \eta l} = \frac{4000 \cdot 3.14 \cdot (20 \times 10^{-6})^4}{8 \cdot 2.3 \times 10^{-3} \cdot 2 \times 10^{-3}} = 5.5 \times 10^{-11}\ m^3/s$$

Poise = 0.1Pl

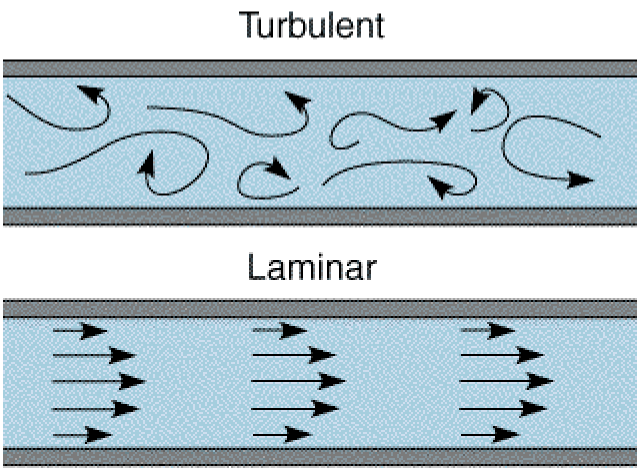


Ematocrito: percentuale del volume del sangue occupato da globuli rossi. Doping: autotrasfusione di globuli rossi concentrati oppure uso di EPO, farmaco per curare anemia. Maggiore viscosità causa rischio di ostruzioni e infarto soprattutto di notte quando il ritmo è più basso.

Moto turbolento e numero di Reynolds

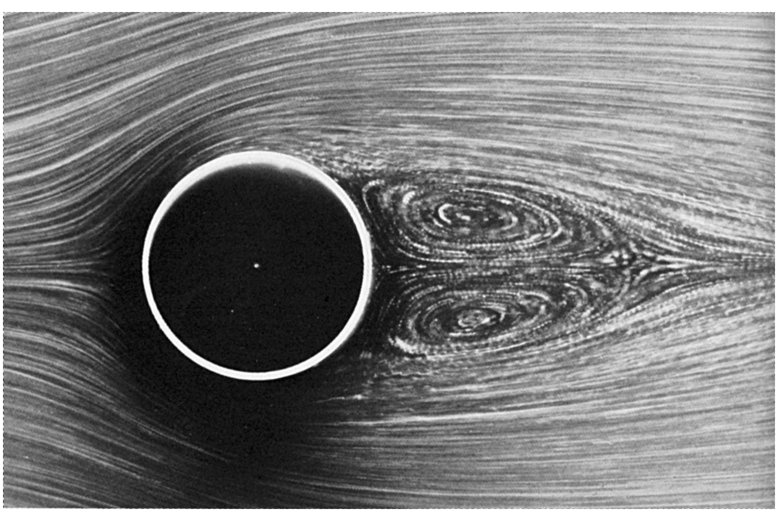
$$R_e = \rho \frac{v\, l}{\eta}$$

Rapporto tra forze viscose (denominatore) e inerziali (numeratore)



$$\rho = densità$$
$$v = velocità\ del\ fluido$$
$$\eta = viscosità$$
$$l = lunghezza\ caratteristica$$
$$(nel\ caso\ di\ tubo\ il\ diametro)$$

Se R < 2000
moto laminare

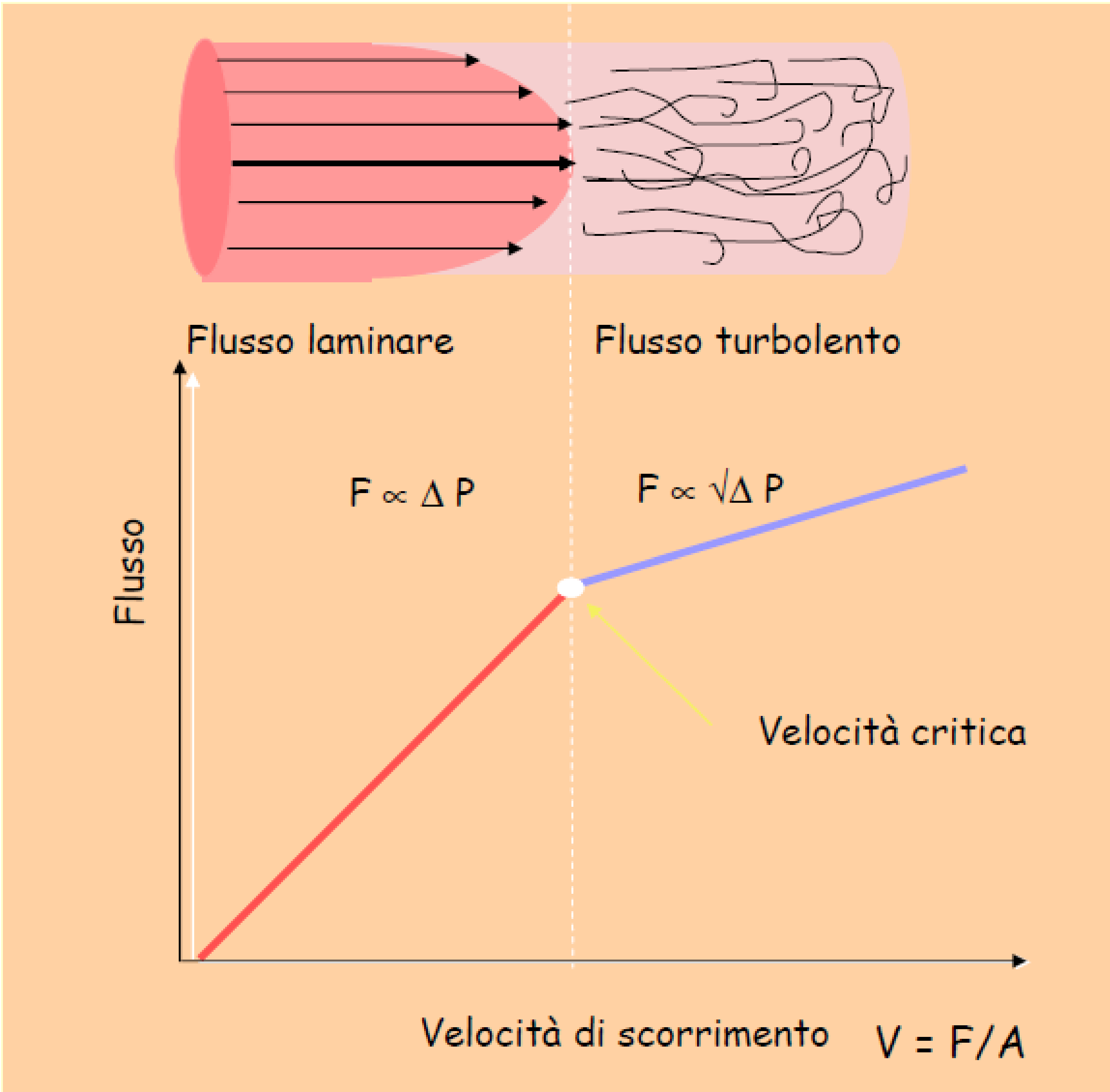


Esempio: aorta

$$\rho \sim 1041\, kg/m^3$$
$$v \sim 0.26\, m/s$$
$$d \sim 0.025\, m$$
$$\eta \sim 3.5 \times 10^{-3}$$

$$R_e \sim 2000$$

Limite tra regime turbolento e laminare



In regime turbolento il flusso non è più proporzionale a ΔP come previsto dalle legge di Poiseuille, ma diventa proporzionale alla **radice** di ΔP a causa del moto vorticoso che dissipa più energia negli urti tra le molecole.

Turbolenza

Esempio: in una sezione di una grande arteria è presente una placca che causa una ostruzione del 25%. Quanto vale il numero di Reynolds nella sezione ridotta se nella sezione normale esso è 1500?

Sezione normale: $N_{R,1} = \dfrac{2\rho r_1 v_1}{\eta(\infty)} = 1500$

Sezione ristretta: $N_{R,2} = \dfrac{2\rho r_2 v_2}{\eta(\infty)}$; con $r_2 = \frac{3}{4} r_1$

La lunghezza caratteristica l qui e' il diametro, cioè 2 volte il raggio

Nota che: $\dfrac{N_{R,2}}{N_{R,1}} = \dfrac{r_2}{r_1}\dfrac{v_2}{v_1}$

Eq. di continuità: $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}$

Conclusione:

$$N_{R,2} = N_{R,2} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1500 \cdot \frac{4}{3} = 2000$$

r2 si riduce di un ¼.

situazione di pericolo, flusso potenzialmente instabile.

Suoni di Korotkoff (udibli auscultando arteria)

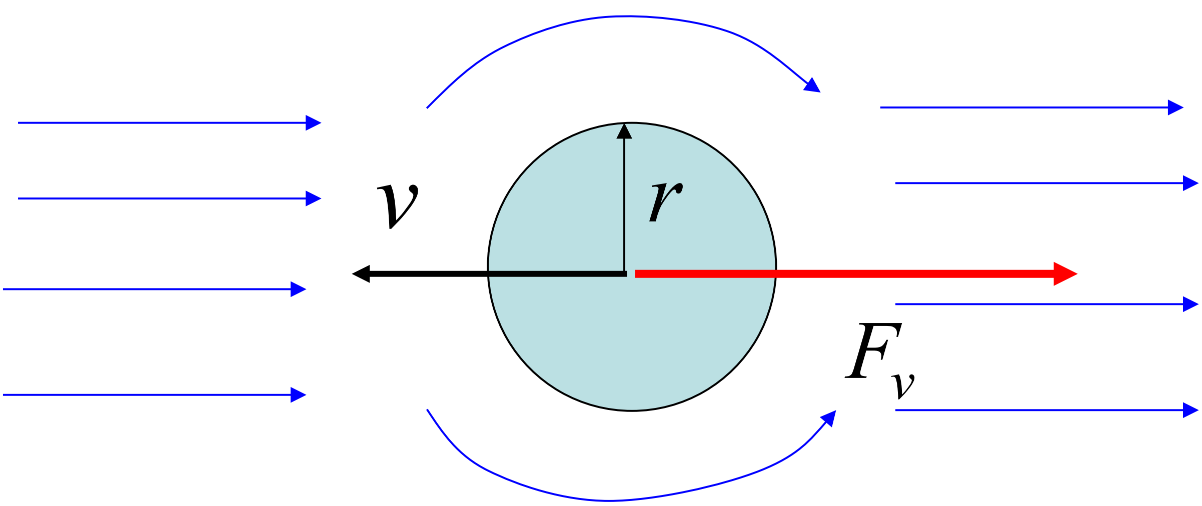
Legge di Poisuille in forma differenziale

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta l}$$

Flusso di volume o
portata (m³/s)

Gradiente di pressione

Le forze viscose si manifestano anche quando un corpo si muove in un fluido: fenomeni di DRAG



$$F_v = -6\pi\,\eta\, r\, v$$ Legge di Stokes

Trasporto in regime viscoso

Una particella che si muove in un liquido sotto l'azione di una forza F ha equazione del moto:

$$m\vec{a}=\vec{F}-f\,\vec{v}$$

Dove il secondo termine è dovuto all'attrito per collisione con le particelle del fluido.

$$\vec{F}_{attr}=-f\,\vec{v}$$

dove f è il coefficiente di attrito

In forma uni-dimensionale l'equazione diventa

$$m\frac{dv}{dt}=F-fv$$

La cui soluzione è

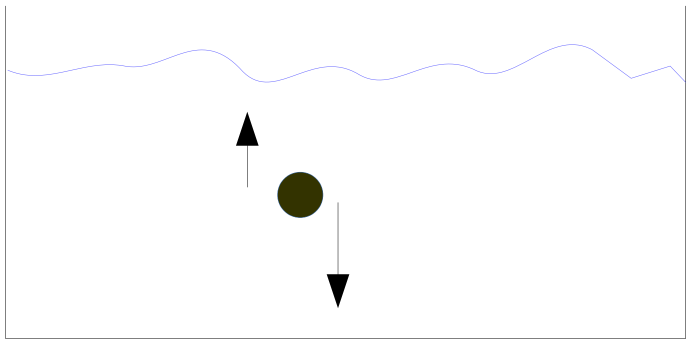
$$v(t)=\frac{F}{f}\left(1-\exp\left(-\frac{f}{m}t\right)\right)$$

Per $t\rightarrow\infty$

$$\boxed{v=\frac{F}{f}}$$

Velocità di trascinamento

Sedimentazione



$$m a = F - f v$$

$$F = mg - F_{Arch} = (\rho - \rho') g V \qquad \rho' \ \textit{densità fluido}$$

$$v_{sed} = \frac{(\rho - \rho') g V}{f}$$

Il coefficiente f può essere espresso come

$$f = 6 \pi r \eta \qquad r = \textit{raggio particella}$$

$$\eta = \textit{viscosità}$$

$$v_{sed} = \frac{(\rho - \rho') g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{6 \pi r \eta} = \boxed{\frac{2}{9} g r^2 \frac{(\rho - \rho')}{\eta}}$$

La formula per la velocità di sedimentazione funziona nel regime a bassa velocità in cui la turbolenza non gioca un ruolo importante. Quando però

$$\frac{\rho' v r}{\eta} > 1$$

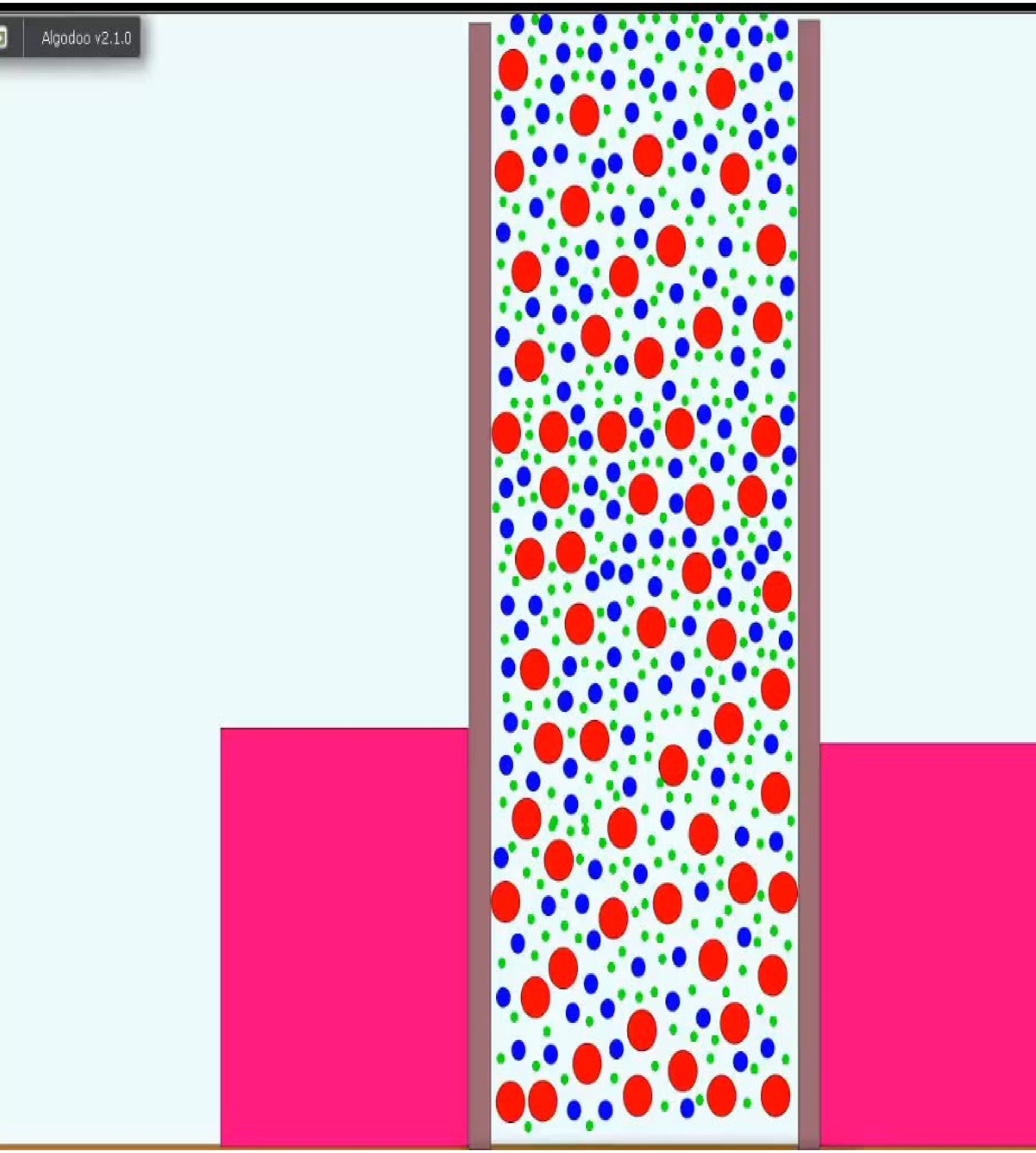
Il fluido attorno all'oggetto inizia a manifestare moti turbolenti. Quindi, la forza di attrito viscoso cambia e dipende dalla velocità relativa al quadrato

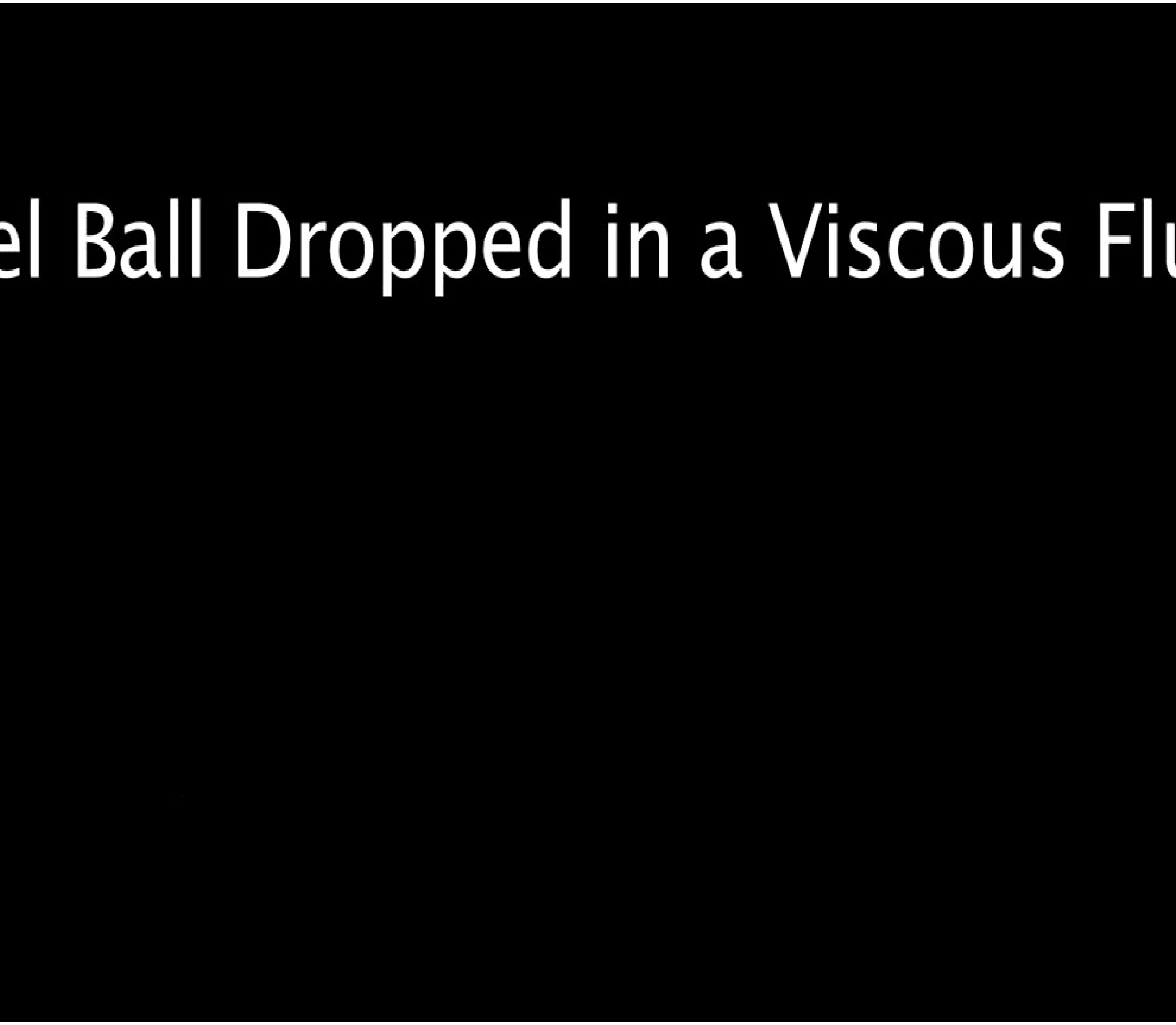
$$F = \frac{C_x}{2} As\ \rho' v^2$$

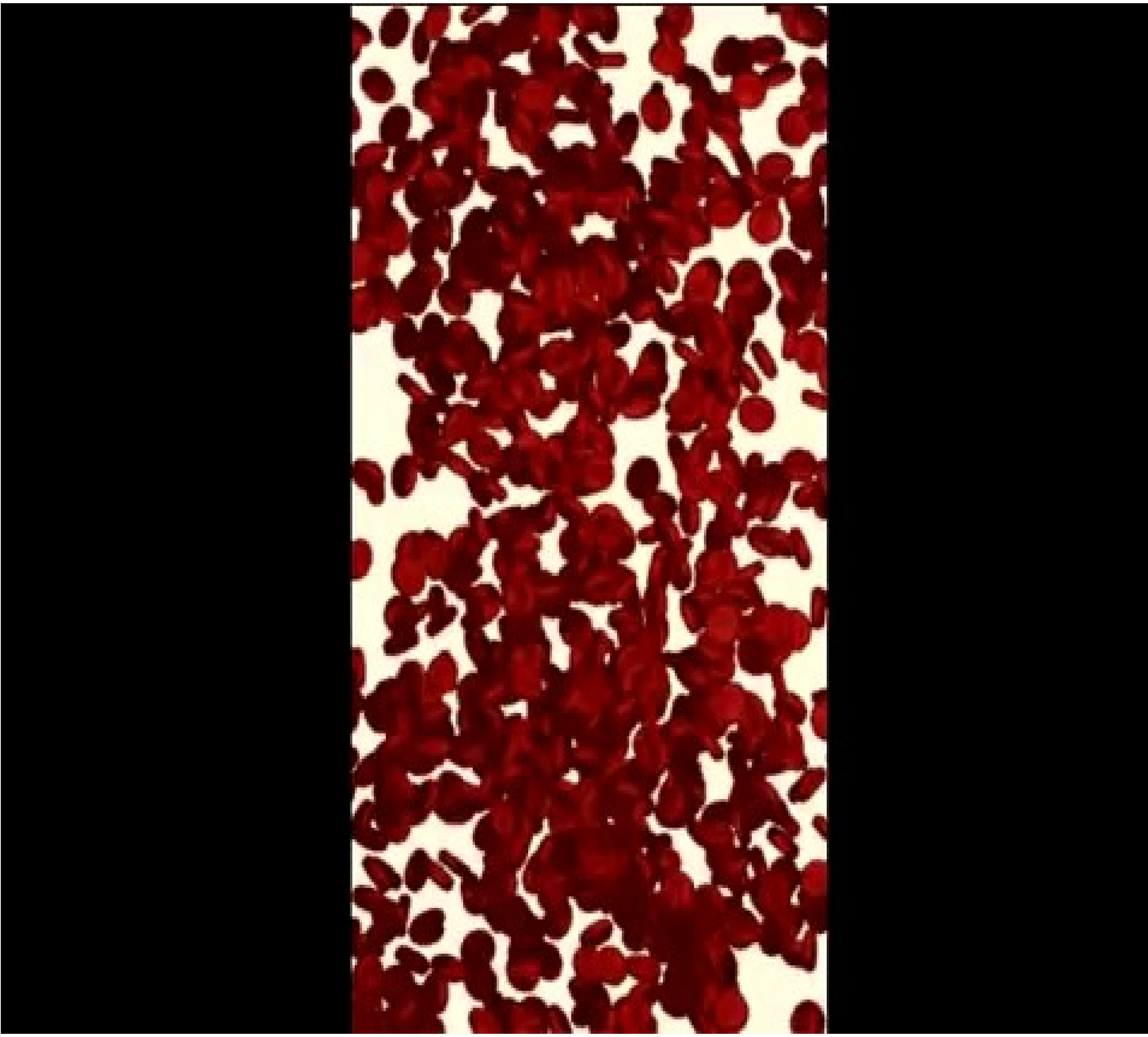
dove Cx è un coefficiente che dipende dalla forma dell'oggetto e As è l'area. La velocità limite in questo caso diventa

$$v = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')}{\rho'} \frac{2gr}{C_x}}$$

per un oggetto sferico dove il valore di Cx si determina sperimentalmente.


Algodoo v2.1.0


el Ball Dropped in a Viscous Flu



Esempio: velocità di eritrosedimentazione (VES)

$$r_{eritrociti} \sim 3.5\,\mu m$$ Raggio globuli rossi

$$\rho_{eritrociti} = 1.0995\, g/cm^3$$ Densità globuli rossi

$$\rho' = 1.0265\, g/cm^3$$ Densità plasma sanguigno

$$\eta = 0.01\, g/cm\, s$$ Valore sperimentale

$$v_{sed} = \frac{2}{9} g r^2 \frac{(\rho - \rho')}{\eta} \sim 1.95 \times 10^{-4}\, cm/s \sim 7\, mm/ora$$

Differenti valori indicano un cambio dei densità e quindi composizione del plasma (infezione e presenza di globuli bianchi e anticorpi)

** Unità di misura di η: $F = 6\,\pi\, r\, \eta\, v$ (legge di Stokes)
$[F] = [m]\,[kg]\,[s]^2 = [m]\,[\eta]\,[m]/[s]$ quindi
$[\eta] = [kg]\,/\,[m]\,/\,[s]$

Un'arteria con raggio r=2.5 mm è bloccata parzialmente da una placca. Nella regione ostruita il raggio effettivo è di 1.8 mm e la velocità del sangue è 50 cm/s. 1) Calcolare la velocità del sangue nella regione non ostruita, 2) Calcolare la variazione di pressione tra la regione ostruita e quella normale (n.b. ρ = 1.04 g/cm^3)

Il teorema della portata dice che $Q = s\,v = \ costante$

Se Q_2 è la portata della zona ostruita e Q_1 quella della zona non ostruita allora:

$$Q_2 = \pi\, 1.8^2 50 = Q_1 = \pi (2.5)^2 v_1 \ \Rightarrow\ v_1 = 25.9\, cm/s$$

Per il teorema di Bernoulli

$$\rho g \left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) = \rho g \left(\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{v_2^2 \rho}{2} - \frac{v_1^2 \rho}{2} = \left(v_2^1 - v_1^2 \right) \frac{\rho}{2} = 951 \ \ baria$$

$$baria = 1\, dyne/cm^2 = 0.1\, Pascal = 7.501 \times 10^{-4}\, mm\, Hg$$

A causa di un aneurisma dell'aorta, l'area trasversale dell'arteria aumenta da A_1 a $A_2 = 2\,A_1$. Se indichiamo con v1 la velocità nel tratto normale e d la densità del sangue, calcolare l'aumento DP di pressione nel tratto dell'aneurisma rispetto al valore P_1 nel tratto normale.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \;\Rightarrow\; v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_1}{2}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

La densità d resta costante quindi

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{3}{8} v_1^2}$$

Si vuole fare un'iniezione con un ago lungo 3.2 cm e avente diametro pari a 0.28 mm. Se la soluzione iniettata ha la stessa densità e viscosità dell'acqua, calcolare la differenza di pressione necessaria per iniettare la soluzione a 1.5 g/s

$$\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3 \quad \eta = 1.005 \times 10^{-3}\ Pa\ s$$

Prima si calcola la portata Q in volume al secondo

$$Q = \frac{1}{\rho}\frac{dm}{dt} = \frac{1}{10^3} \cdot 1.5 \times 10^{-3} = 1.5 \cdot 10^{-6}\ m^3/s$$

Adesso si applica l'equazione di Poiseuille

$$\Delta P = \frac{8\eta l}{\pi R^4} Q$$

$$\Delta P = \frac{8 \cdot 1.005 \times 10^{-3} \cdot 3.2 \times 10^{-2} \cdot 1.5 \times 10^{-6}}{\pi \cdot 0.14 \times 10^{-3}} =$$

$$\boxed{3.2 \times 10^5\ Pa}$$

Valutare la resistenza del sistema circolatorio nel caso di un soggetto

$$\textit{normale} \qquad \Delta P = 100\, mmHg \qquad Q = 60\, cm^3/s$$

$$\textit{Sotto sforzo} \qquad \Delta P = 170\, mmHg \qquad Q = 150\, cm^3/s$$

$$\textit{Iperteso a riposo} \qquad \Delta P = 200\, mmHg \qquad Q = 60\, cm^3/s$$

$$R_N = \frac{\Delta P}{Q} = 2220 \frac{g}{cm^4 s}$$

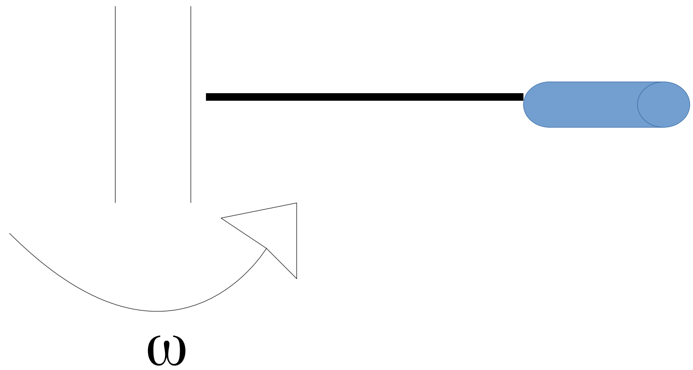
$$R_{SS} = \frac{\Delta P}{Q} = 1490 \frac{g}{cm^4 s}$$

$$R_{IP} = \frac{\Delta P}{Q} = 4440 \frac{g}{cm^4 s}$$

Durante lo sforzo la resistenza diminuisce favorendo l'ossigenazione dei tessuti. In iperteso la resistenza aumenta.

Centrifugazione per accelerare la misura della VES. La forza in questo caso e' quella centrifuga.

$$F_c = m\,\omega^2\,r_0$$



Localmente la forza centrifuga agisce come la gravità ed è diretta parallela al raggio.

$$V_{sed} = \frac{2}{9}\,\omega^2\,r_0\,r^2\,\frac{(\rho - \rho')}{\eta}$$

In condizioni di flusso stazionario di un fluido ideale, attraverso un restringimento del tubo quale delle seguenti affermazioni è vera:

1) La pressione è maggiore all'interno del restringimento
2) Il fluido rallenta quando passa attraverso il restringimento
3) Il flusso di massa è lo stesso prima e dopo il restringimento

Il profilo di velocità per il flusso laminare di un fluido in un tubo di raggio *a* viscoso, dove con m è il coefficiente di viscosità e dP/dx è il gradiente di pressione del tubo, risulta:

$$a \quad v = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(a-r)^2$$

$$b \quad v = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}r(a-r)$$

$$c \quad v = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(a^2-r^2)$$

Si ricordi che

$$v(r) = \Delta P\frac{(R^2-r^2)}{4\eta l} = \frac{dP}{dl}\frac{(R^2-r^2)}{4\eta}$$

3) Una particella di sabbia viene portata da un fiume fino ad un lago dove inizia a sedimentare verso il fondo. La densità della particella è $\rho = 2000 \ kg/m^3$ e il suo raggio è . $r = 3 \times 10^{-5} \ m$ Sapendo che la viscosità dell'acqua del lago è $\eta = 0.001 \ Pa \ s$, calcolare la velocità di sedimentazione del granello di sabbia (si assuma per la densità dell'acqua $\rho = 1000 \ kg/m^3$ e per l'accelerazione di gravità $g = 9.80 \ m/s^2$)

$$V_s = (\rho - \rho') g \frac{V}{6 \pi r \eta} \qquad V_s = 1.96 \times 10^{-3} \ m/s \quad 1.96 \ mm/s$$

Esempio: in un capillare il cui diametro è d=8 μm e la cui lunghezza è L=2 mm il sangue scorre con velocità media v_m= 0.88 mm/s e η = 2.0×10⁻³ PI.

Calcolare la portata del capillare e la caduta di pressione ai capi del capillare.

$$r = \tfrac{1}{2}d = 4\times10^{-6}\ \text{m}$$

$$S = \pi r^2 = \pi(4\times10^{-6}\ \text{m})^2 = 5.0\times10^{-11}\ \text{m}^2$$

$$Q = v_m S \quad = (0.88\times10^{-3}\ \text{m/s})\cdot(5.0\times10^{-11}\ \text{m}^2) = 4.4\times10^{-14}\ \text{m}^3/s$$

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} = \frac{8\cdot(2.0\times10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s})\cdot(2\times10^{-3}\,\text{m})}{\pi\cdot(4\times10^{-6}\,\text{m})^4} = 3.98\times10^{16}\ \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-5}$$

$$p_1 - p_2 = QR \ = 1.76\times10^3\ \text{Pa} \ = 13.2\ \text{mmHg}$$

Un fluido viscoso scorre attraverso un tubo di raggio r. Se la pressione applicata per unità di lunghezza rimane costante e la viscosità non cambia, come varia la portata se il raggio del tubo raddoppia?

a) 8 volte
b) 4 volte
c) 16 volte
d) resta costante

In una raffineria dell'etanolo fluisce attraverso un tubo a velocità costante pari a 1 m/s a una pressione di 101300 Pa. Si vuole raddoppiare la pressione del fluido (202600 Pa) portando il fluido ad un livello più basso. Assumendo che la velocità del fluido non cambi lungo il tubo quando viene piegato verso il basso, di quanto bisogna abbassare l'altezza del tubo stesso per ottenere la pressione voluta? (si assuma per l'etanolo una densità di 789 kg/m^3 mentre $g = 9.8\ m/s^2$)

P1 + rho g h = P2 h=DP/(rho g) = 1.01e5/(.9 * 789) = 13 m

Una sfera di vetro di raggio 1 mm, soggetta alla forza di gravità, si muove all'interno di un liquido di viscosità 10^{-3} Pl.
1) Se ad un certo istante la sfera ha velocità di 1 m/s, calcolare la forza viscosa che agisce sulla sfera
2) Se la sfera ha massa 10^{-5} kg e il liquido è acqua, quanto vale la velocità limite?

$$\frac{\rho' v r}{\eta} = 1000$$

Siamo nel regime ad alta velocità!

..risolvendo con le formule per regime a bassa v:

$$F = 6\pi\eta r v = 1.9\times 10^{-5}$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2400\ kg/m^3$$

$$v = \frac{2}{9}\frac{(\rho-\rho')r^2 g}{\eta} = 3.1\ m/s$$

Utilizzando l'approssimazione ad alta velocità (assumendo ad esempio Cx=0.5) otteniamo

$$v = \sqrt{\frac{(\rho-\rho')}{\rho'}\frac{2gr}{C_x}} = 0.23\ m/s$$