Energia potenziale gravitazionale e teorema di Gauss

Lavoro fatto <u>contro</u> la forza gravitazionale per portare un corpo da un punto A ad un punto B. Sulla superficie terrestre, si sceglie il punto A ad altezza 0 e si calcola l'energia potenziale quando il corpo è ad altezza h

$$L = \sum_{i=1,N} m\, g\, dh_i = \int_0^h mg\, d = mgh$$

Nel caso di masse puntiformi

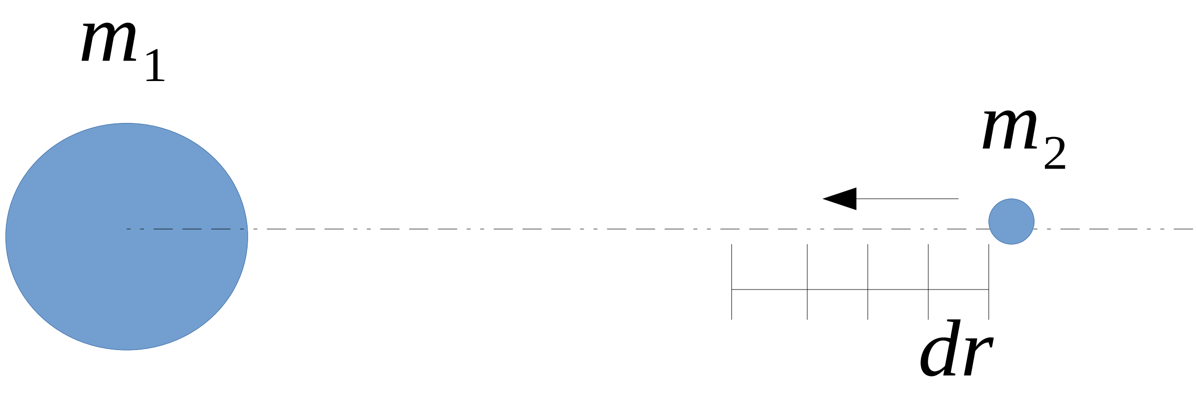
$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Energia potenziale è il lavoro <u>contro</u> la forza per portare la massa m_2 da infinito fino ad una distanza r.

$$L=\int_{\infty}^{r} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr=G m_1 m_2\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr$$

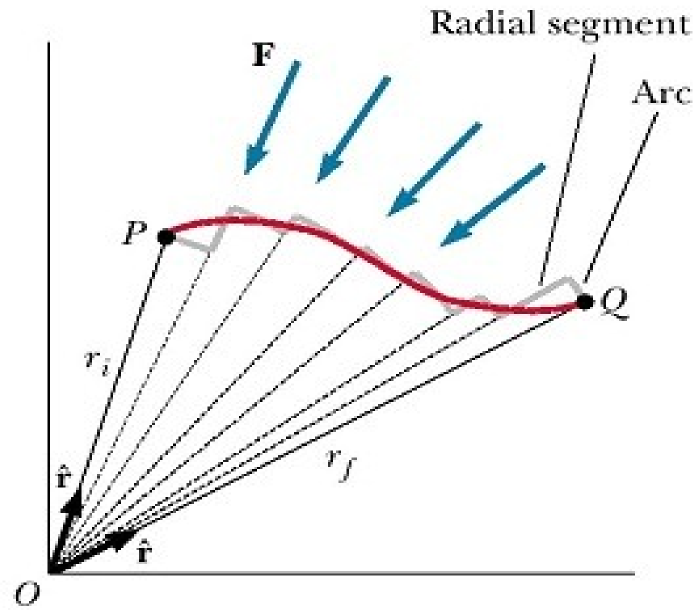
Attenzione! dr è negativo perché parto dall'esterno e mi avvicino.

$$U(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r}$$



Energia negativa perché energia di legame. Bisogna fornire un'analogo valore in energia cinetica per allontanare il corpo all'infinito.

E se lo spostamento non è radiale?



Nella direzione perpendicolare alla direzione radiale il lavoro è nullo. Questo perché la forza è radiale

$$d\,L = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r \cdot \vec{dl}$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + dt\,\vec{u}_t \qquad \vec{u}_r \cdot \vec{dl} = dr + 0$$

$$d\,L = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr$$

Velocità di fuga dalla Terra

La velocità si ottiene dando sufficiente energia cinetica sulla superficie al corpo m_2 per cui all'infinito abbia velocità nulla.

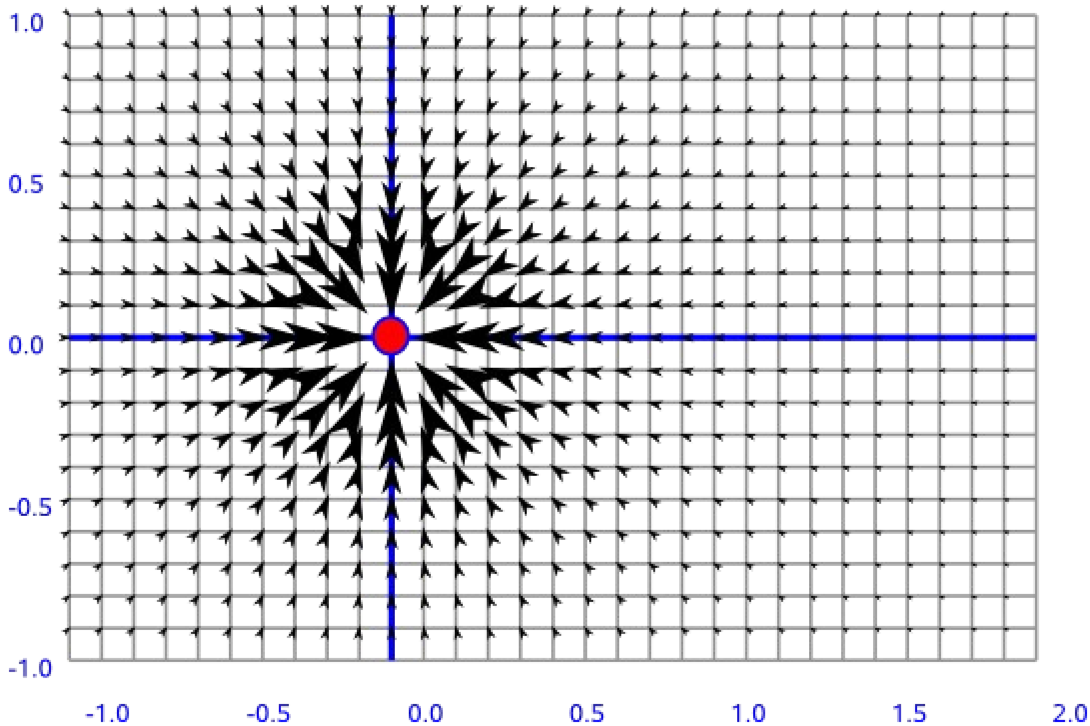
$$E_{tot} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{2} m_2 v_{esc}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\infty}^2 = 0$$

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{2G\frac{m_1}{r}}}$$

$Se\ E_{tot} < 0$ **Stato legato**

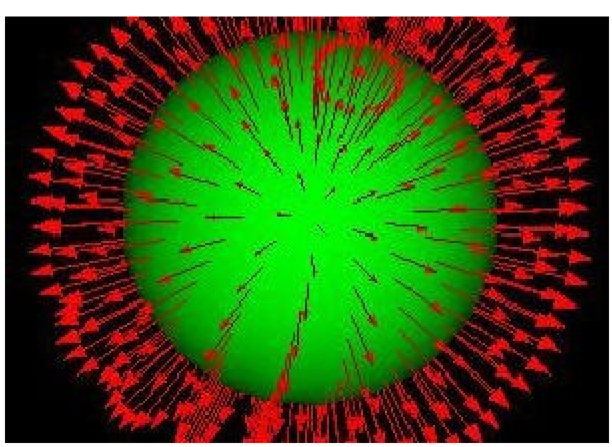
$Se\ E_{tot} > 0$ **Stato libero**

Campo gravitazionale nello spazio

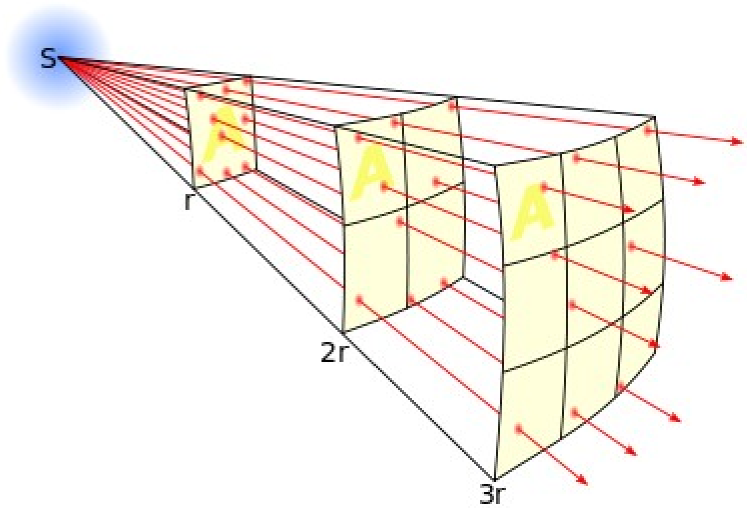


$$\vec{G} = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r$$

Con γ al posto di G come simbolo per la costante gravitazionale



Flusso del campo:



$$d\Phi = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{n}\, dS = \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS$$

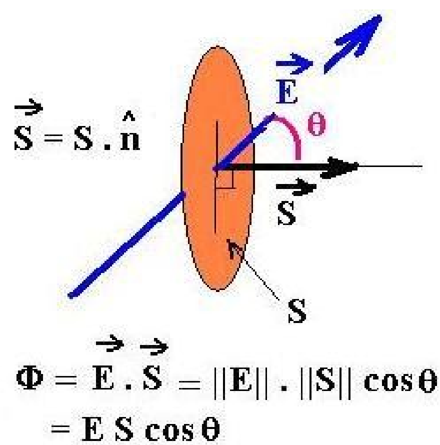
$$\Phi = -\gamma\, m_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_r \cdot \vec{n}_i\, dS_i = \int_S \vec{G}\, ds$$

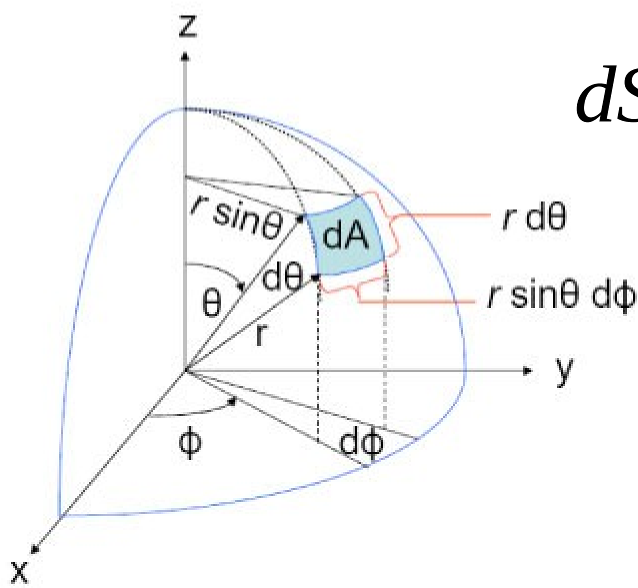
Flusso del campo su una sfera

$$\Phi = -\gamma\, m_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_r \cdot \vec{n}_i\, dS_i = \int_S \vec{G}\, ds$$

1) Il prodotto scalare per un campo radiale su elementi di sfera = 1

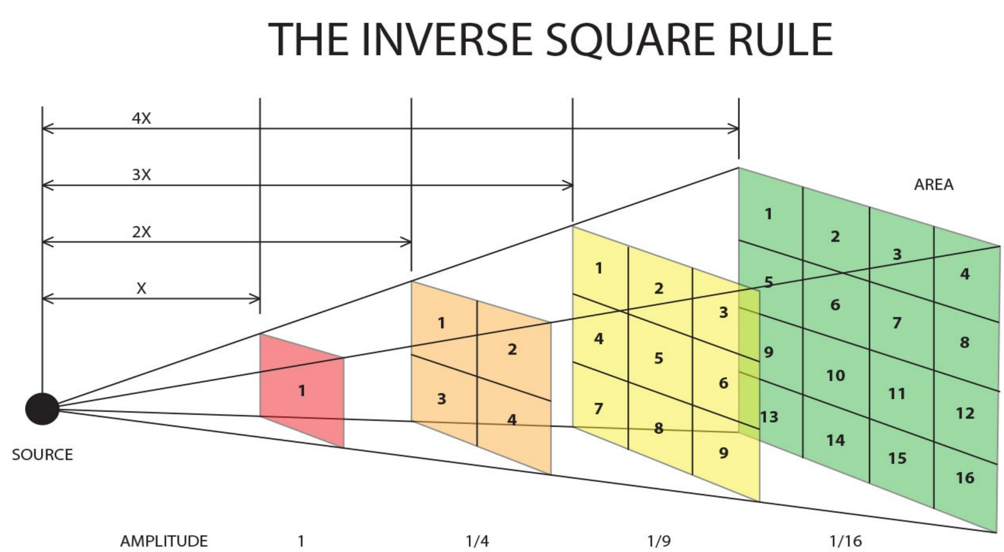
$$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_i = 1$$





$$dS = r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi$$

2) Legge dell'inverso del quadrato della distanza coincide con l'aumento dell'area di una sfera con il raggio

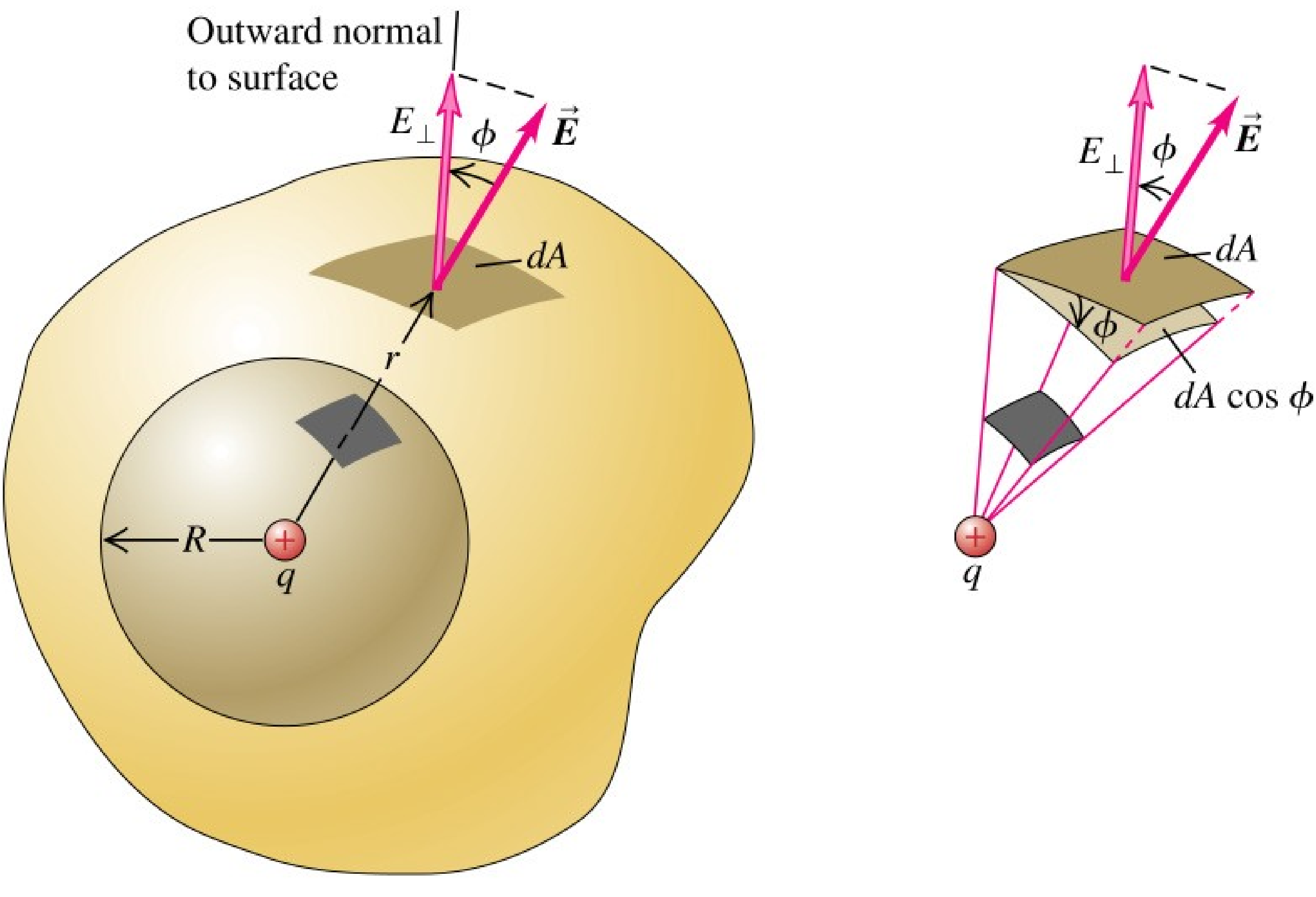


$$-\gamma \frac{m_1}{\cancel{r^2}} 1 n \cancel{r^2} \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi$$

$$\Phi = -\gamma m_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_r \cdot \vec{n}_i \, dS_i = -\gamma m_1 4\pi$$

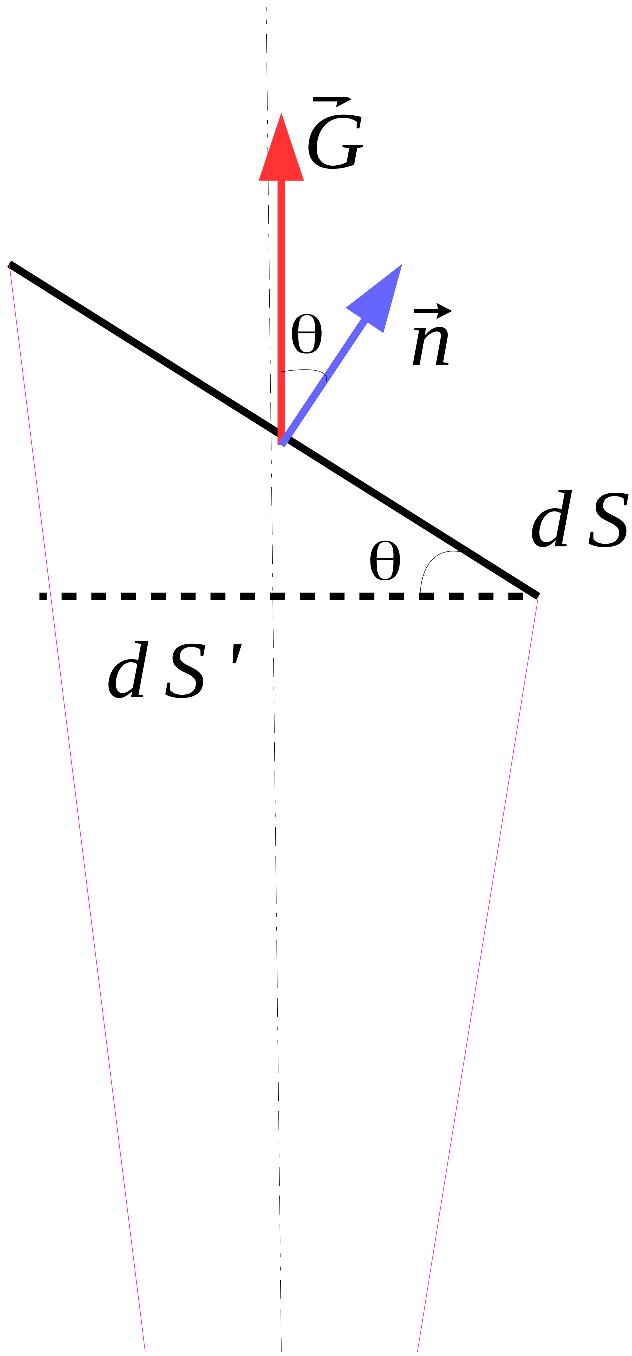
$$\boxed{\Phi = -\gamma m_1 4\pi}$$

Su una superficie qualsiasi ci si riconduce alla sfera interna e il flusso è lo stesso.



(a) (b)

$$\vec{G}\cdot\vec{n}\,dS = G\cos(\theta)\,ds = G\,d\,S'$$



Un pianeta ha una massa tripla rispetto a quella della Terrra e un raggio 4 volte maggiore. Qual'e' la forza gravitazionale che agisce su un corpo di massa 80 kg rispetto a cui sarebbe sottoposto sulla Terra?

$$F_p = \frac{G\,m\,M_p}{R_p^2} = \frac{G\,m\,3\,M_T}{\left(4\,R_T\right)^2}$$

$$F_T = \frac{G\,m\,M_T}{R_T^2}$$

$$F_p = \frac{3}{16} F_T$$