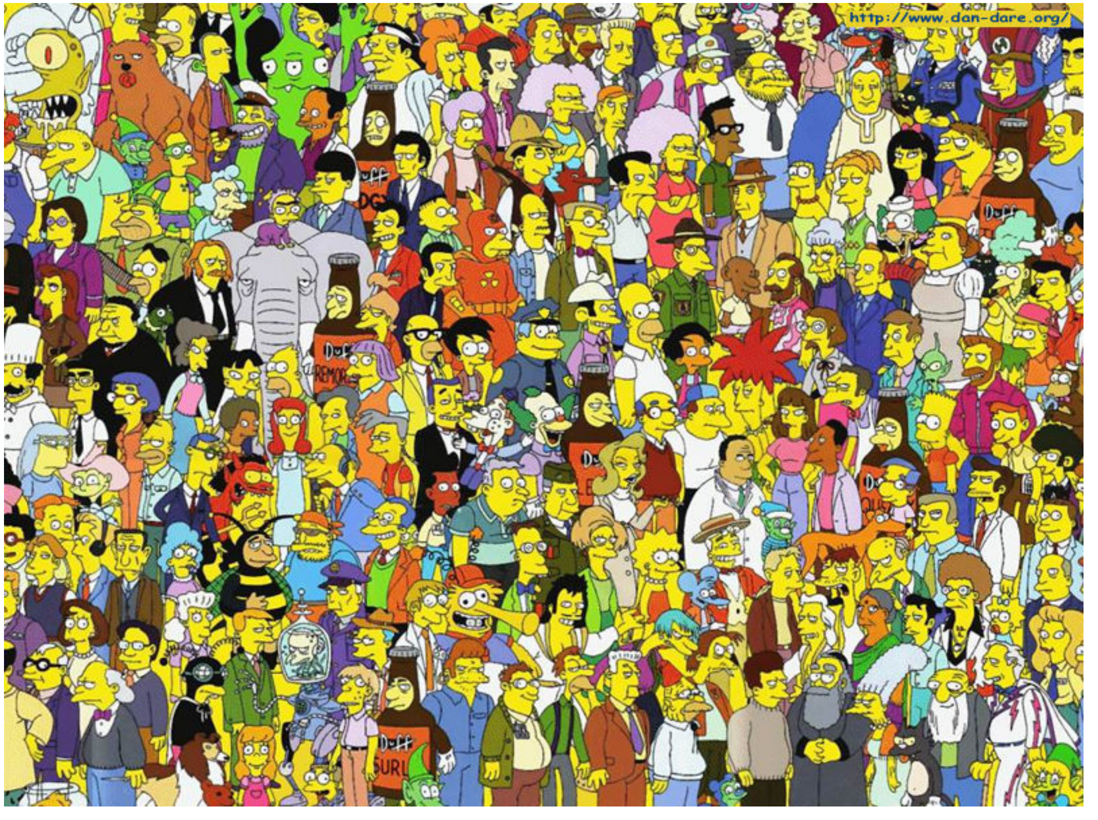
Le superleggi del microcosmo: le teorie della relatività

alessandro pascolini 2025

La scienza deve essere universale

⇒ il principio e le teorie della relatività

***le leggi della natura non possono dipendere da chi e come le osserva, ma solo dai fattori dinamici effettivamente coinvolti*.**



Principio di relatività di “Archimede”

Le leggi naturali rimangono invariate rispetto a:

- spostamenti da un posto a un altro
- osservazioni in momenti differenti

se le altre condizioni non mutano ...

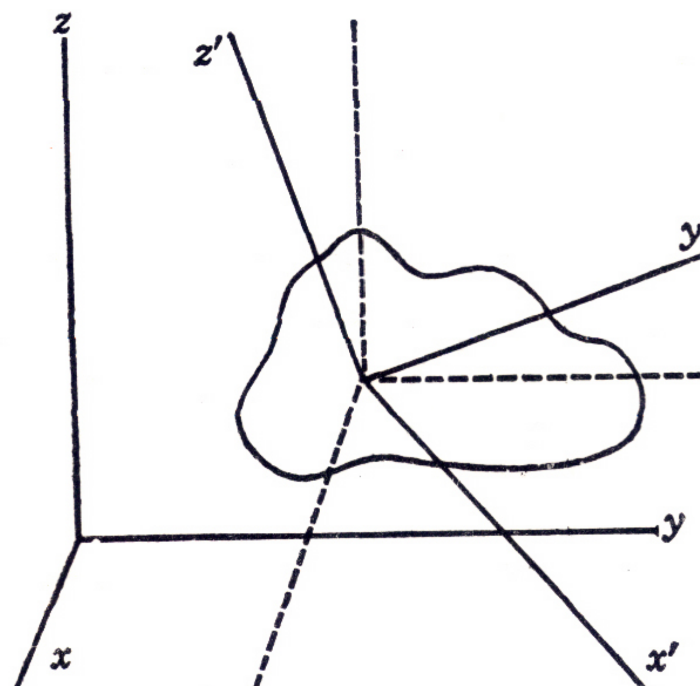
$\Rightarrow$ la posizione di un corpo non è una quantità assoluta, ma relativa all’osservatore

$\Rightarrow$ la data e l’orario d’inizio di un evento non sono grandezze assolute: di un dato fenomeno conta la durata, indipendente dall’osservatore

[illegible]

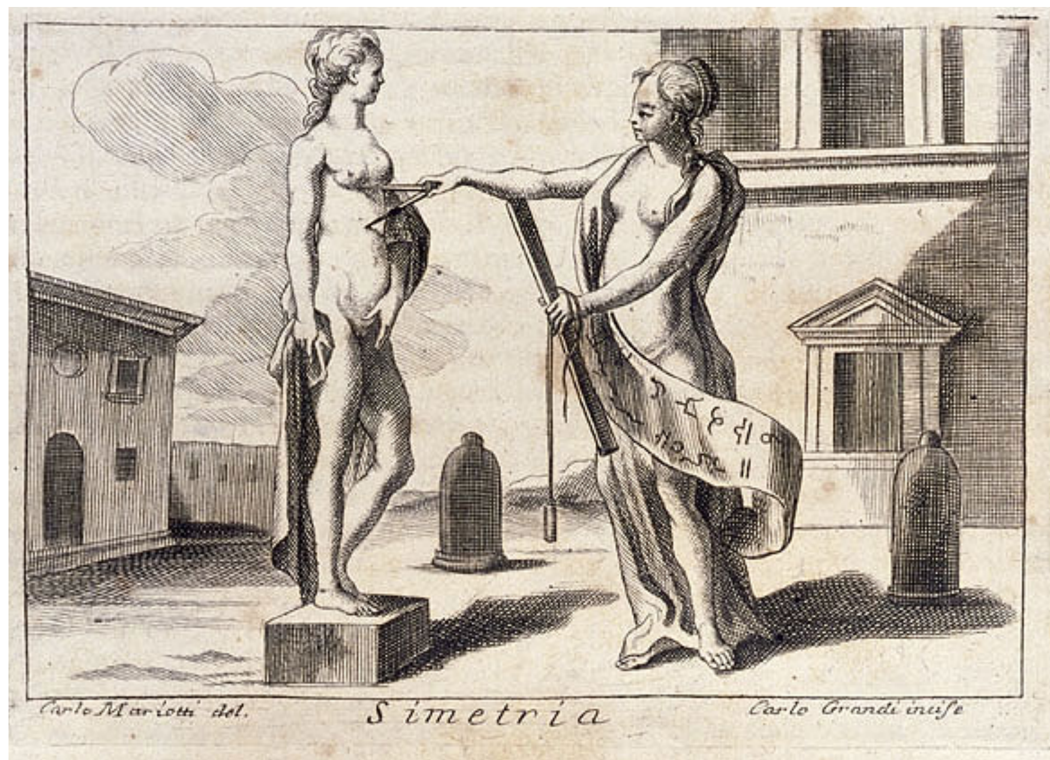
[illegible]


Dialogo sul principio della relatività
Il principio di Archimede
Fate conto che le leggi dell'idrostatica cambino diciamo nel mare fra Siracusa ed Atene.


z
z'
y'
y
x
x'

Dalle proprietà di invarianza conseguenti al principio di relatività archimedeo seguono le simmetrie dello spazio-tempo archimedeo

- **lo spazio è omogeneo**
  ogni sua porzione ha identiche proprietà
- **il tempo è omogeneo**
  ogni suo intervallo ha identiche proprietà
- **lo spazio è isotropo**
  tutte le direzioni sono equivalenti
- **il tempo è isotropo**
  le due direzioni sono equivalenti



Il tempo è isotropo?

- le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo sono invarianti per inversione temporale

  passato ↔ futuro

- la termodinamica e la teoria cinetica dei gas introducono la "freccia del tempo"

  passato → futuro

  consistentemente con il concetto psicologico del tempo

Il tempo è isotropo?

Il principio di conservazione dell'energia richiede che tutti gli eventi naturali siano conservativi. D'altra parte, il principio dell'incremento di entropia insegna che tutti i mutamenti in natura procedono in una direzione. Da questa contraddizione prende origine il compito fondamentale della fisica teorica, la riduzione di un mutamento unidirezionale a effetti conservativi

Max Planck

Principio galileano d'inerzia

lo stato di quiete non si può distinguere dal moto rettilineo uniforme

sistemi di coordinate galileani o inerziali:

sistemi di coordinate rispetto a cui le stelle fisse risultino ferme o in moto rettilineo uniforme

Gedanken Experiment del “Burchiello”

Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo
seconda giornata

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti.
Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; chè (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti.

E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora.

Principio galileano d’invarianza

Le leggi della fisica non cambiano se descritte in sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme.

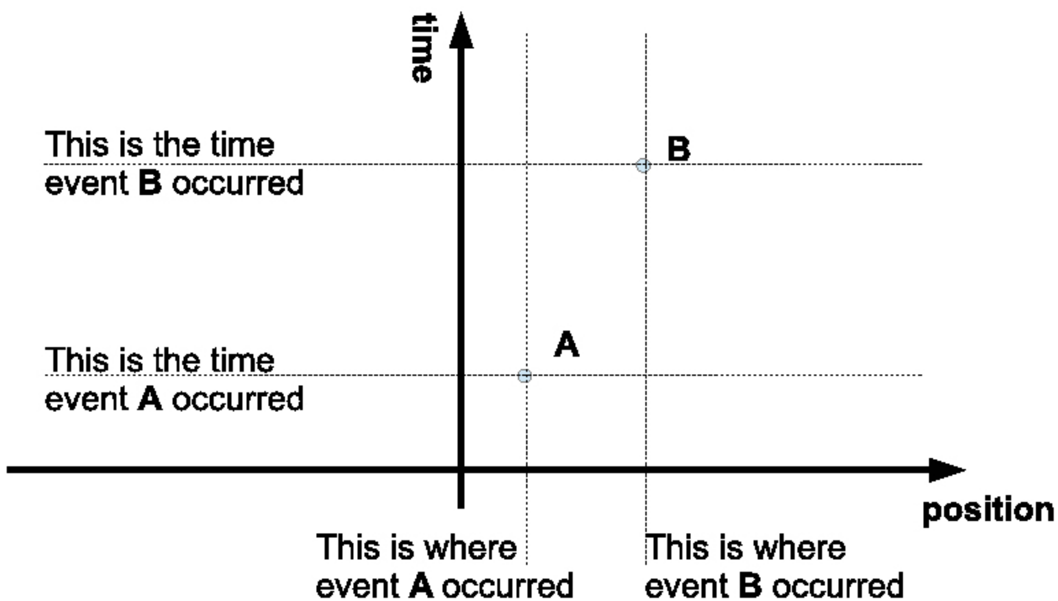
Devono trovare le stesse leggi osservatori in luoghi diversi, a tempi differenti, con sistemi di riferimento comunque ruotati nello spazio e in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale

Il cronotopo

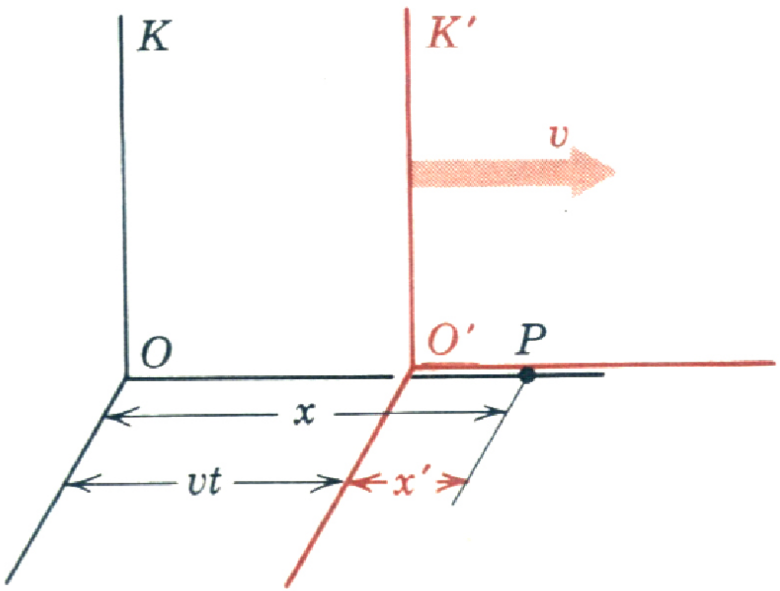
per studiare il movimento dei corpi conviene lavorare con *eventi* anziché con *punti*.

Un evento è caratterizzato dalla posizione nello spazio e nel tempo *P = (x, y, z, t)* e quindi è un punto di uno spazio a quattro dimensioni, il *cronotopo*.

Graficamente si usa il diagramma di Minkowski



Trasformazione galileana



Rappresentiamo l'evento in due sistemi di coordinate *K* e *K'* (consideriamo una sola coordinata *x* e il tempo *t*). *K'* si muova con velocità uniforme *v* rispetto a *K* lungo l'asse *x*.

In questo caso si ha la trasformazione galileana

$$x' = x - vt$$
$$t' = t$$

con il tempo lo stesso sia in *K* che *K'*.

❖ lo spazio è *relativo* all'osservatore,
il tempo scorre con la stessa velocità: è *assoluto*

Combinazione galileana delle velocità

- il sistema inerziale *K'* si muova di velocità *v* rispetto al sistema inerziale *K*
- il punto *P* si muova di velocità *u'* nel sistema *K'*

⇒ nel sistema *K* il punto *P* ha velocità

$$u = u' + v$$

somma della velocità *propria* u' e di quella di *traslazione* (o *trascinamento*) v

tenuto conto che le velocità sono vettori a tre componenti $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $u = (u_x, u_y, u_z)$

$$u_k = u'_k + v_k \qquad con \quad k = x, y, z$$

Isaac Newton introduce la dinamica nel cronotopo galileano

per i sistemi materiali con vale il principio d'inerzia

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

in presenza di una forza *f* su un corpo di massa *m*:

$$f = m\,a = m\,du/dt = d(m\,u)/dt = \mathrm{d}p/dt$$

dove $p=mu$ *è* la quantità di moto (*momento* lineare)

Energia cinetica: lavoro che una massa in moto produce fermandosi

$$dE = dW = dr \cdot f = u\,dt \cdot dp/dt = u\,dp$$

$$E = \int u\,dp = \int u\,m\,du = m \int u\,du = 1/2\,m\,u^2$$

$E = 1/2\,m\,u^2$ *m* costante, *u* variabile l'accelerazione è la stessa in tutti in sistemi inerziali

$$a' = du'/dt' = d(u-v)/dt = du/dt = a$$

in mancanza di forze ($a' = a = 0$) in ogni sistema inerziale si conservano :

- la quantità di moto (momento) $p = mu$

$$dp'/dt' = d(m\,u')/dt' = m\,d(u-v)/dt = d(mu)/dt = 0$$

- l'energia cinetica

$$dE/dt = 1/2\,m\,d(u^2)/dt = m\,u\,du/dt = m\,u\,a = 0$$
$$dE'/dt' = 1/2\,m\,d(u'^2)/dt' = m\,u'\,du'/dt' = m\,u'\,a' = 0$$

le simmetrie galileane dello spazio-tempo sono ancora quelle archimedee

- lo spazio è omogeneo
- il tempo è omogeneo
- lo spazio è isotropo
- il tempo è isotropo

Il principio di relatività galileano impone l'equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali

$\Rightarrow$ simmetria rispetto a differenze di velocità rettilinee uniformi

$\Rightarrow$ invarianza dell'accelerazione $a' = a$

La legge dell'addizione delle velocità vale per tutti i sistemi inerziali, sia sulla terra che per il moto degli astri, sia nel modello tolemaico che in quello copernicano
ma vale anche per la velocità della luce?

La velocità della luce è finita

lo intuisce Galileo, ma non riesce a misurarla

Ole Christensen Rømer osservando il moto del satellite Io attorno a Giove trova che la luce nel vuoto percorre 220 000 km al secondo

Via via si sono avute misure sempre più accurate

Nel 1983 si è deciso di fissare

$$c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$$

come valore esatto da usare come unità di misura della lunghezza al posto del metro campione

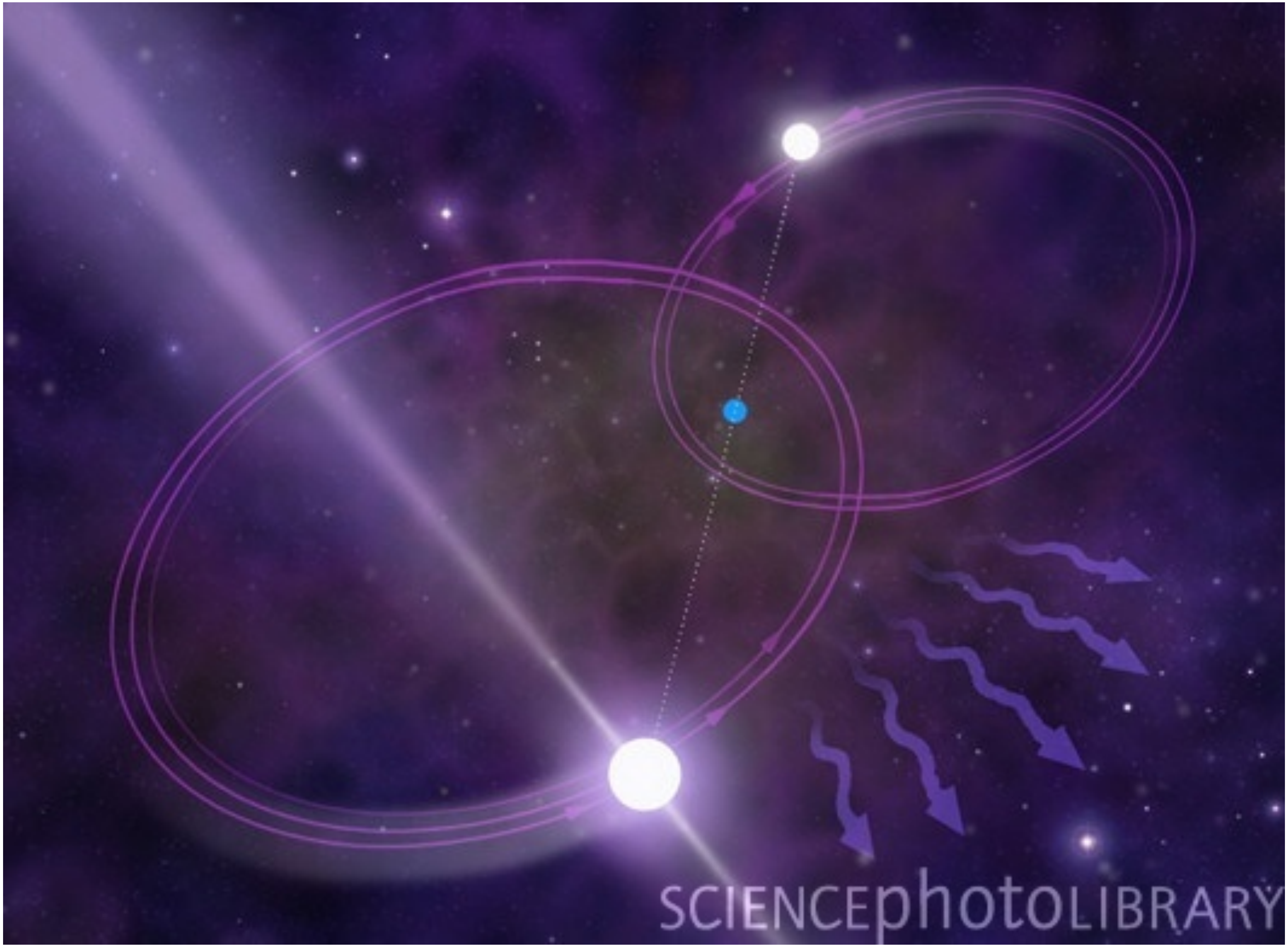
[illegible]

<1638	Galileo, covered lanterns	inconclusive[118][119][120]:1252[Note 15]	
<1667	Accademia del Cimento, covered lanterns	inconclusive[120]:1253[121]	
1675	Rømer and Huygens, moons of Jupiter	220 000[94][122]	–27% error
1729	James Bradley, aberration of light	301 000[105]	+0.40% error
1849	Hippolyte Fizeau, toothed wheel	315 000[105]	+5.1% error
1862	Léon Foucault, rotating mirror	298 000 ±500[105]	–0.60% error
1907	Rosa and Dorsey, EM constants	299 710 ±30[108][109]	–280 ppm error
1926	Albert A. Michelson, rotating mirror	299 796 ±4[123]	+12 ppm error
1950	Essen and Gordon-Smith, cavity resonator	299 792.5 ±3.0[111]	+0.14 ppm error
1958	K.D. Froome, radio interferometry	299 792.50 ±0.10[115]	+0.14 ppm error
1972	Evenson *et al.*, laser interferometry	299 792.4562 ±0.0011[117]	–0.006 ppm error
1983	17th CGPM, definition of the metre	299 792.458 (exact)[92]	exact, as defined

Postulato di Einstein (1905)

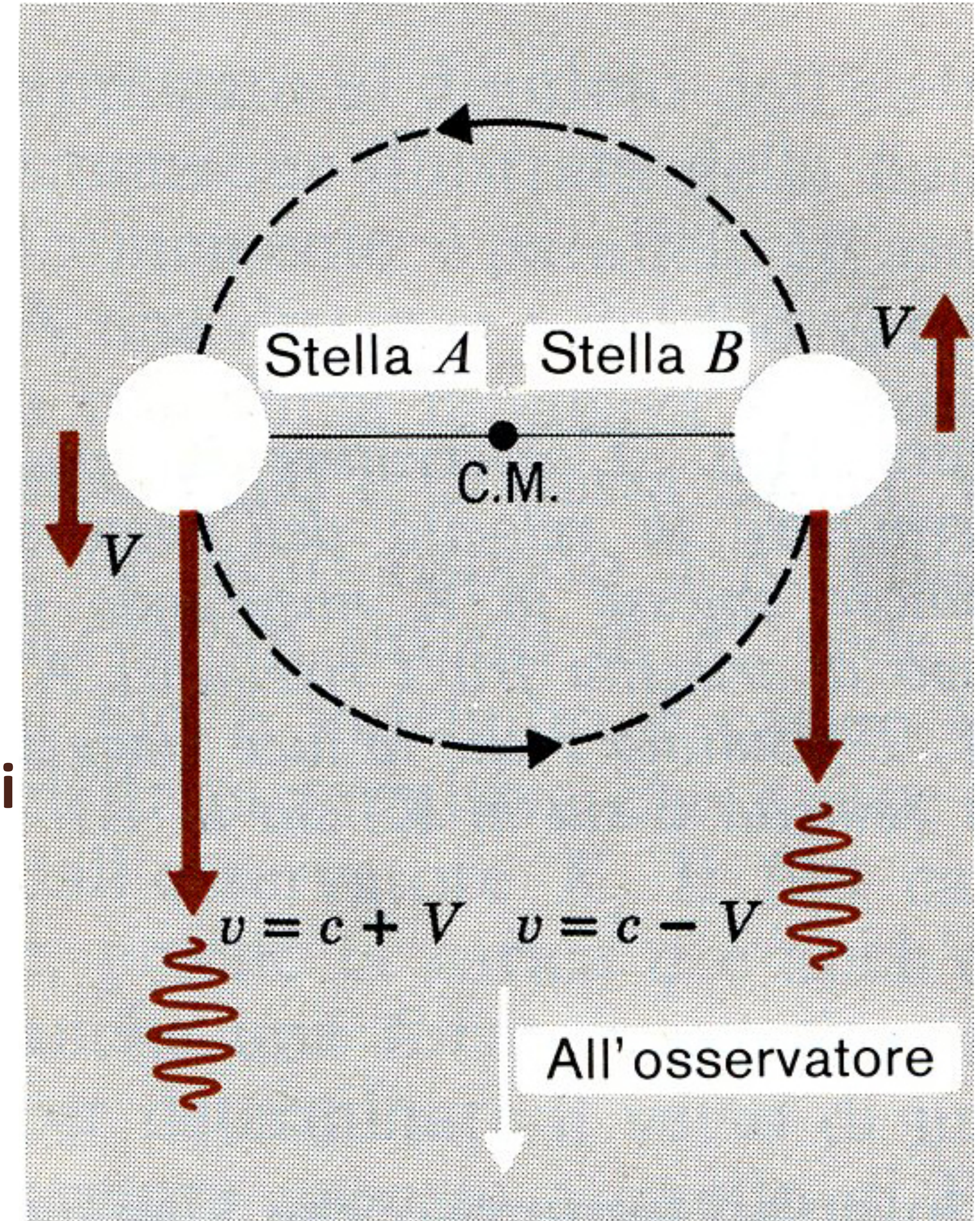
Considerando le proprietà della radiazione elettromagnetica, Einstein si convince che la velocità della luce nel vuoto **deve** essere la stessa per ogni osservatore inerziale

postulato all'epoca non verificabile sperimentalmente

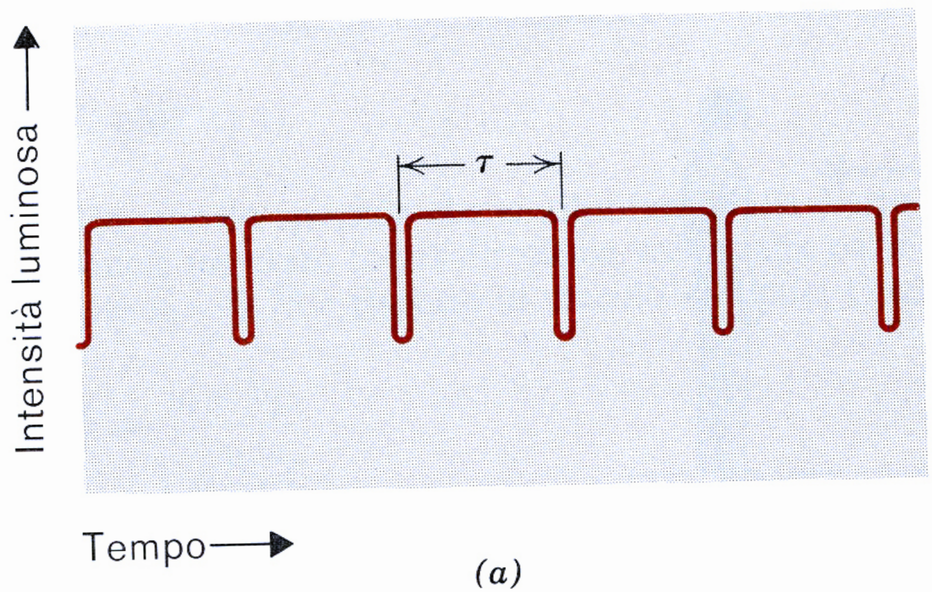


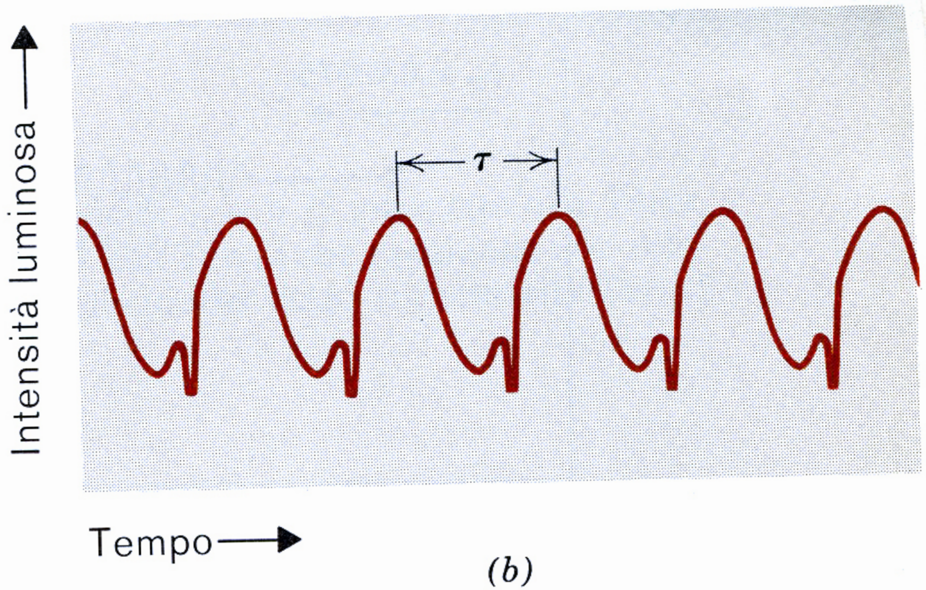
rappresentazione artistica di un sistema stellare binario (pulsar)

in un sistema stellare binario (pulsar)
due stelle ruotano attorno al loro centro di massa ed emettono radiazione luminosa che viene osservata dagli astronomi:
la stella A si avvicina alla terra e la stella B si allontana



intensità luminosa della pulsar binaria





Se la velocità della luce si sommasse a quella della sorgente, prima arriverebbe il segnale emesso dalla stella A (che si muove verso la terra) e poi, in ritardo, si sommerebbe quello della stella B (che si allontana) e il segnale osservato sarebbe il (b).

Invece si osserva (a) consistente col fatto che entrambi i segnali si propagano con la stessa velocità *c*

La teoria della relatività particolare si basa sulla validità simultanea di due postulati:

- **il principio di equivalenza dei sistemi inerziali**
- **la costanza della velocità della luce nel vuoto**

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körpe*
von A. Einstein.

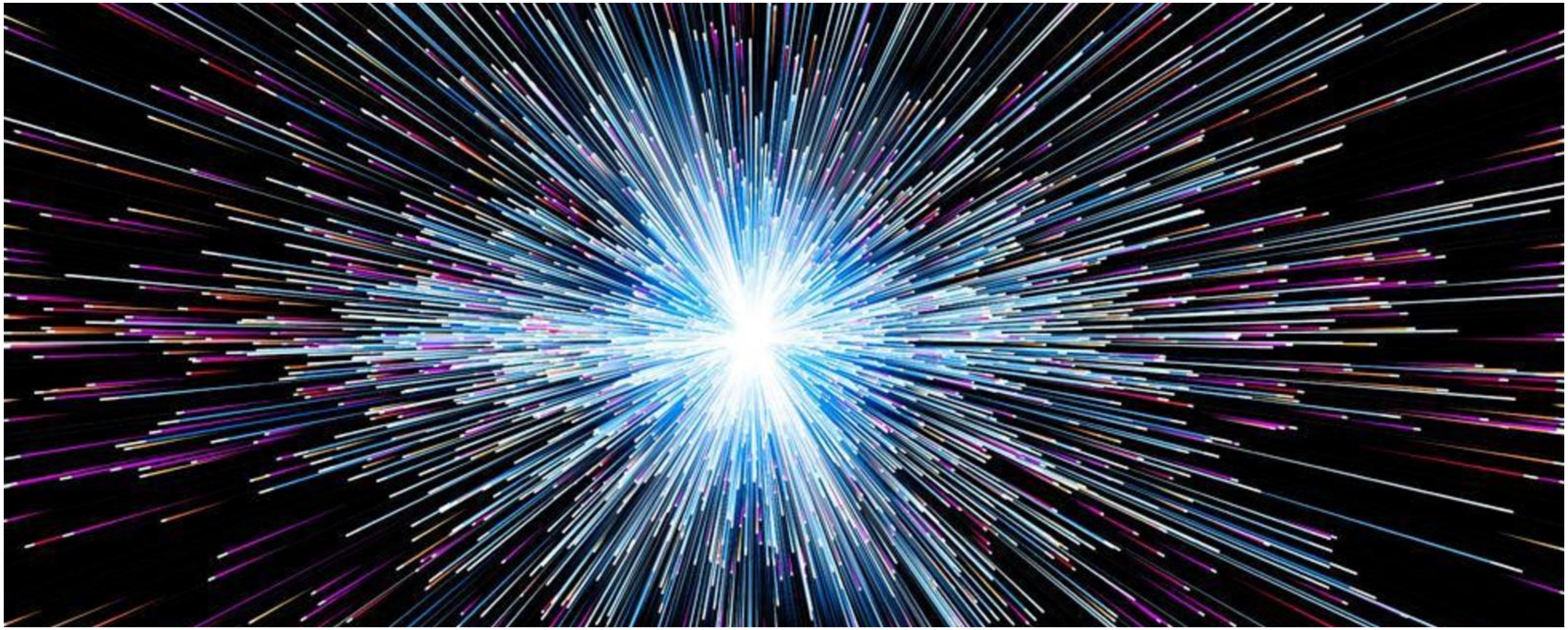
Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselb
wärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwend
bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phä
nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke
die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen eine
neten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänome
hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und
während nach der üblichen Auffassung die beiden Fä
der eine oder der andere dieser Körper der bewegte se
voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich de
und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des M
ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, we
den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, eine
erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich de
so entsteht in der Umgebung des Magneten kein ele
Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft,
an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleich
Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten
vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselb
und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ers
die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen V
eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium"
statieren, führen zu der Vermutung, daß dem Beg
absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern
der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinu
sprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinate
für welche die mechanischen Gleichungen gelten,
gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze ge
dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen
wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden
der Relativität" genannt werden wird) zur Vorausse
heben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unve

Perché tanta importanza alla velocità della luce?

- la luce è un fenomeno universale
- la sua propagazione non dipende dall'osservatore
- le leggi del suo moto sono note con alta precisione

$\Rightarrow$ il principio di relatività deve valere "in primis" per la luce



trasformazione nella relatività particolare

Consideriamo due sistemi inerziali K e K' in moto relativo uniforme lungo l'asse x con velocità v, le cui origini coincidono ($x = x' = 0$) all'istante $t = t' = 0$.
Gli eventi fissi per K hanno in K' coordinate

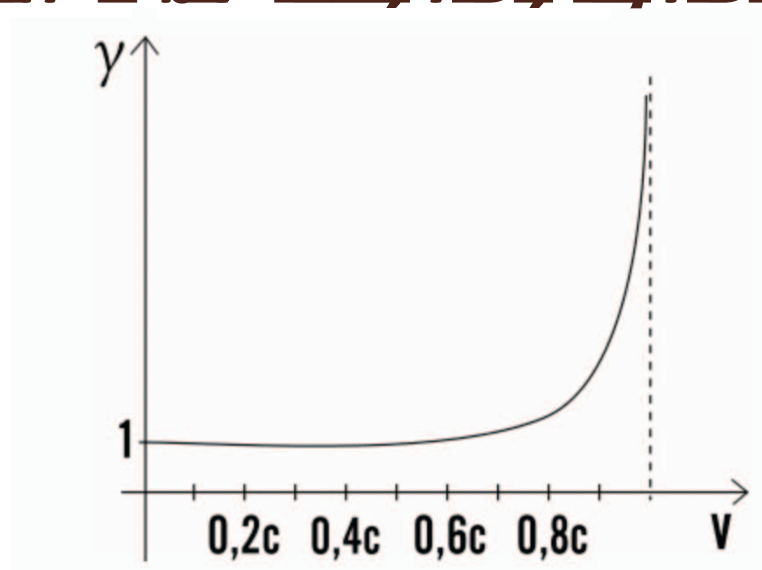
$$x' = A\,(x - v\,t),\; y' = y,\; z' = z,\; t' = B\,t + C\,x$$

con A, B e C funzioni della velocità v da determinare.
All'istante $t = t' = 0$ venga emesso dalla comune origine un segnale luminoso che si propaga in entrambi i sistemi secondo la stessa legge poiché la velocità della luce è la stessa

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,t^2\,;\;\; x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2\,t'^2$$

esprimendo x', y', z' e t' in funzione di x, y, z, t

$$c^2\,(B\,t + C\,x)^2 = A^2\,(x - v\,t)^2 + y^2 + z^2$$



γ
1
0,2c
0,4c
0,6c
0,8c
V

punkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V-v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V-v} = t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2-v^2}x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegte Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2-v^2}x'\right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^2-v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

also

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}y$$

und

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\tau &= \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),\\
\xi &= \varphi(v)\beta(x - vt),\\
\eta &= \varphi(v)y,\\
\zeta &= \varphi(v)z,
\end{aligned}$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden

System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V. Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System k derart in Paralleltranslationsbewegung parallel zur Ξ-Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ-Achse bewege. Zur Zeit $t = 0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t = x = y = z = 0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x,\\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y,\\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander,

Differenza cruciale rispetto alle trasformazioni galileane:

le coordinate spaziali e quella temporale non vengono trattate separatamente, ma sono fra di loro correlate e il tempo si "mescola" con lo spazio;
il termine critico è il *fattore di Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \geq 1$$

la costante *c* compare in ogni corrispondenza fra sistemi inerziali, anche se non riguardano la luce:
è in realtà una costante fondamentale della struttura dello spazio-tempo

Il principio di relatività galileano resta valido con ottima approssimazione per processi lenti rispetto a *c*

per *v* piccola $\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2$

per *v* piccolissima $\gamma(v) \rightarrow 1$

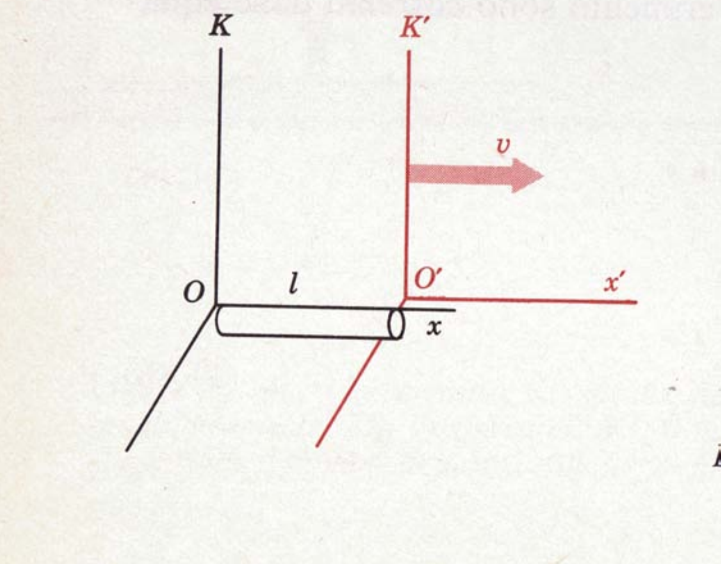
Le differenze non si vedono nei fenomeni ordinari, mentre diventano essenziali nel mondo atomico e sub-atomico, ove si raggiungono velocità prossime a *c*

Conseguenze della legge di Lorentz: contrazione spaziale

Un corpo rigido lungo l'asse *x* con estremi ($x_1 = 0$, x_2) ha lunghezza nel sistema di riferimento *K*

$$l = x_2 - x_1 = \Delta x = x_2$$

Il sistema *K'* sia in moto uniforme rispetto a *K* lungo l'asse *x* con velocità *v;* per misurare la lunghezza *l'* del corpo in *K'* si può misurare il tempo impiegato a passare dall'origine del corpo ($x'_1 = 0$, $t'_1 = 0$) all'estremo del corpo (x'_2, t'_2).



In corrispondenza a t'_2 in *K* si ha

$$t_2 = l/v; \text{ e quindi}$$

$$t'_2 = \gamma(v) \; [l/v - (v/c^2)\, l] = l/[v\, \gamma(v)]\;)$$

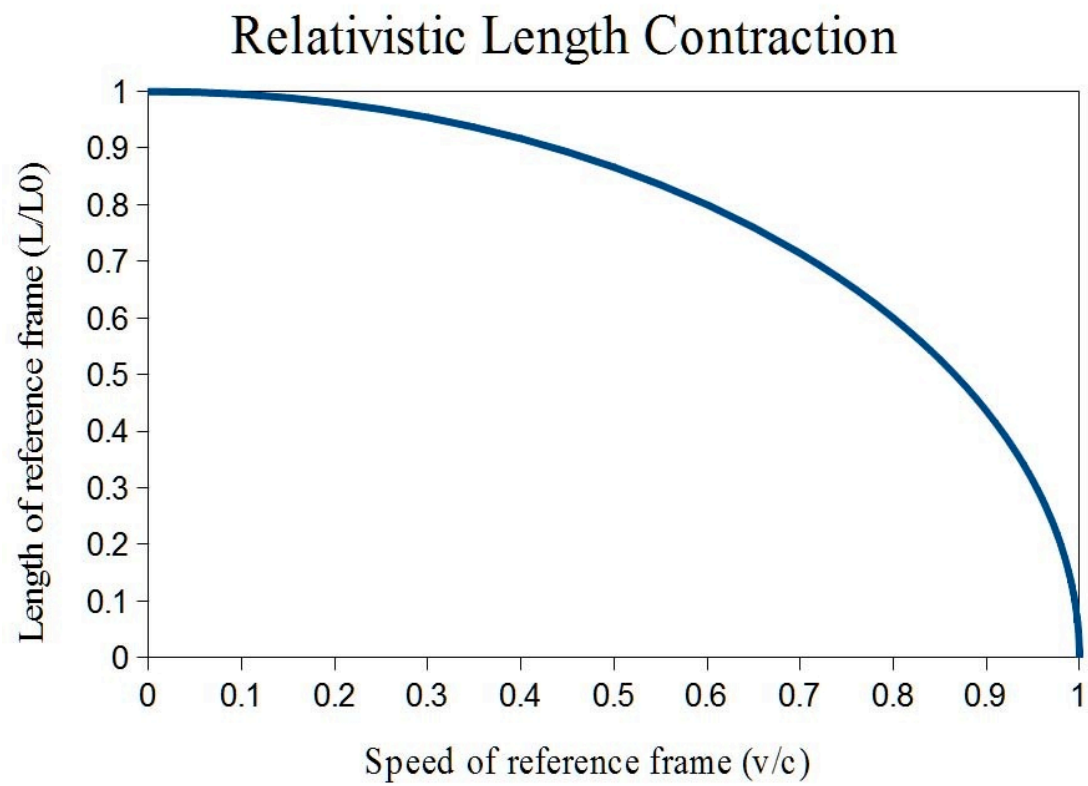
ossia

$$\Delta x' = l' = v\, t'_2 = l/\gamma(v) \quad < \quad l = \Delta x$$

Conseguenze della legge di Lorentz: contrazione spaziale

La lunghezza di ogni corpo rigido di misura L_0 in un sistema di riferimento *K* solidale col corpo in ogni altro sistema inerziale *K'* in moto rettilineo uniforme rispetto a *K* nella direzione del corpo subisce una contrazione rispetto alla l*unghezza propria* L_0

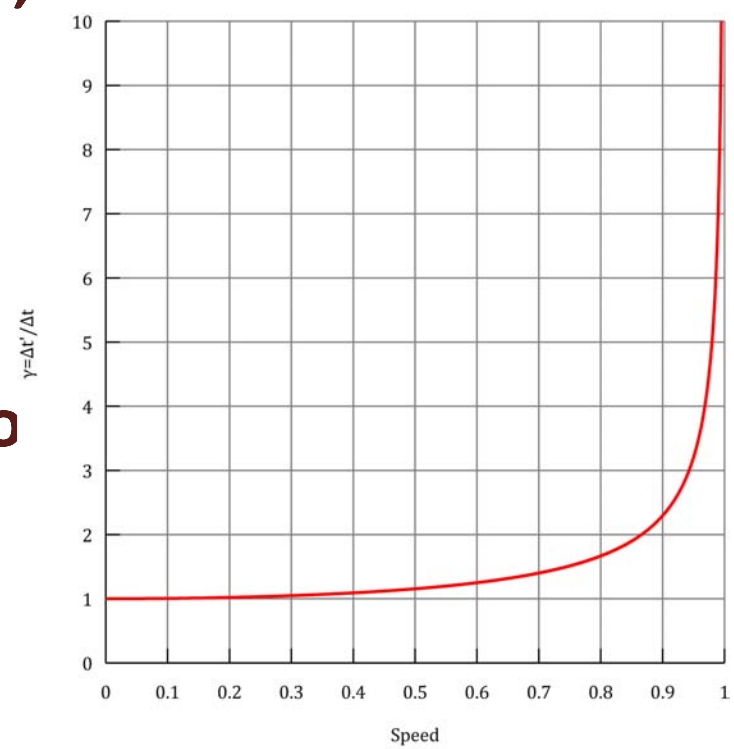
$$L' = L_0 / \gamma(v) \leq L_0$$



ciò vale per ogni distanza

Conseguenze della legge di Lorentz: dilatazione temporale

Dati due sistemi inerziali *K* e *K’* con velocità relativa uniforme *v*, gli eventi *E* e *F* avvengano all’origine *O’* del sistema *K’ (x’ = 0): E* all’istante *t’ = 0* e *F* a *t’ = t**.
In base alla trasformazione di Lorentz, nel sistema *K*
$E = (0, 0)$ e $F = (\gamma(v)\, v\, t^*, \gamma(v)\, t^*)$

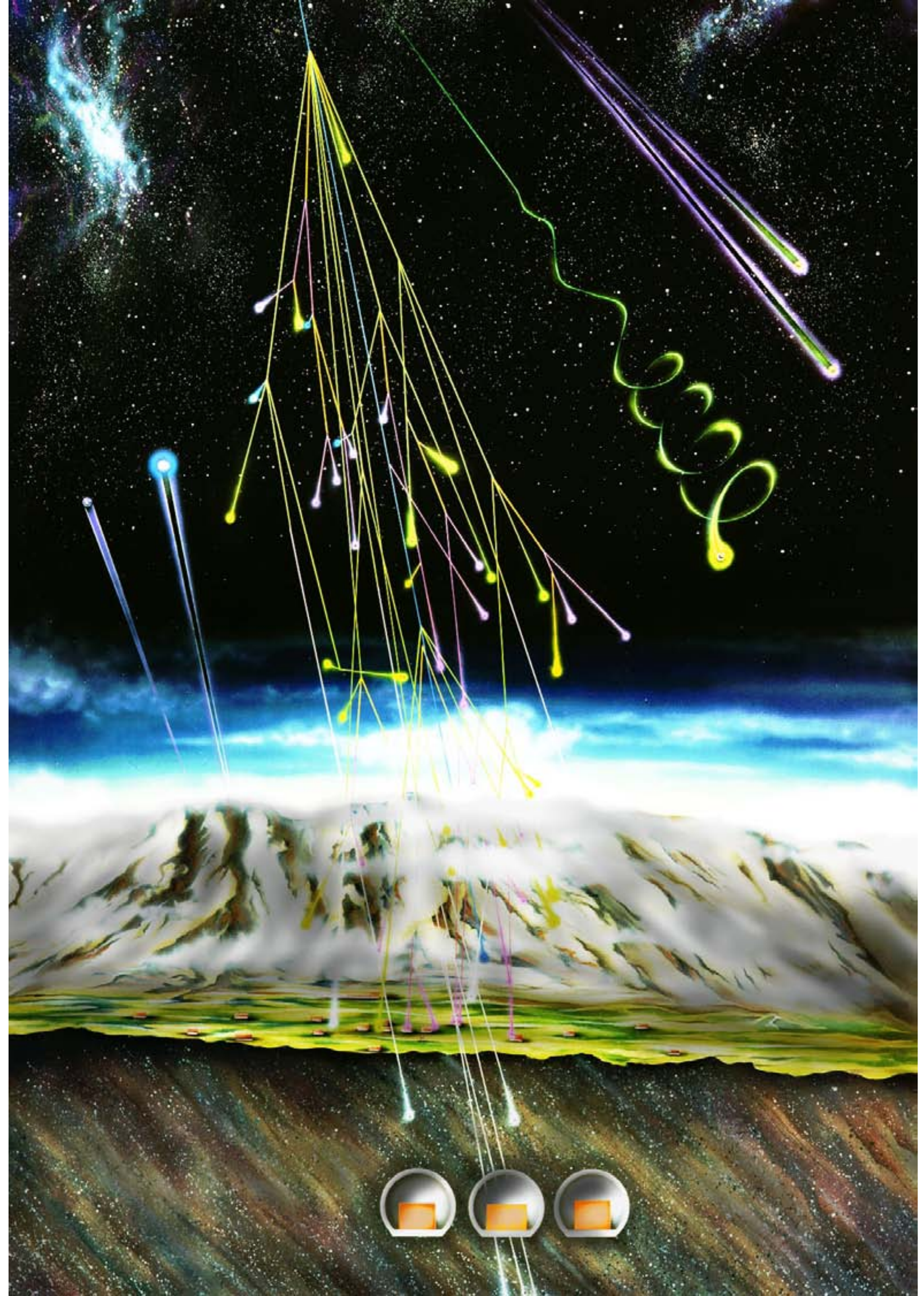


L’intervallo di tempo *Δt* fra i due eventi nel sistema *K* risulta maggiore dell’intervallo temporale *Δt’* misurato da un orologio in moto assieme agli eventi:

$$\Delta t = \Delta t' \gamma(v) \geq \Delta t'$$

raggi cosmici

radiazioni di alta energia provenienti dal sole e altre stelle giungono continuamente sulla terra e interagendo con gli atomi dell'atmosfera producono sciami di nuove particelle



Un effetto della dilatazione temporale

il muone è una particella instabile con una vita media di 2,2 μs nel suo sistema di riferimento.
Nonostante la breve vita media, muoni generati da raggi cosmici nell'alta atmosfera riescono ad attraversare tutta l'atmosfera e a penetrare a notevoli profondità nel sottosuolo.
Viaggiando a una velocità di 0,998 *c* per un osservatore al suolo la loro vita si allunga, mentre per loro la distanza dall'alta atmosfera dal suolo si contrae

$\Delta t' = 2{,}2\ \mu s$ $\quad$ $L' = 660$ m $\quad$ $\gamma(v) \sim 15{,}823$

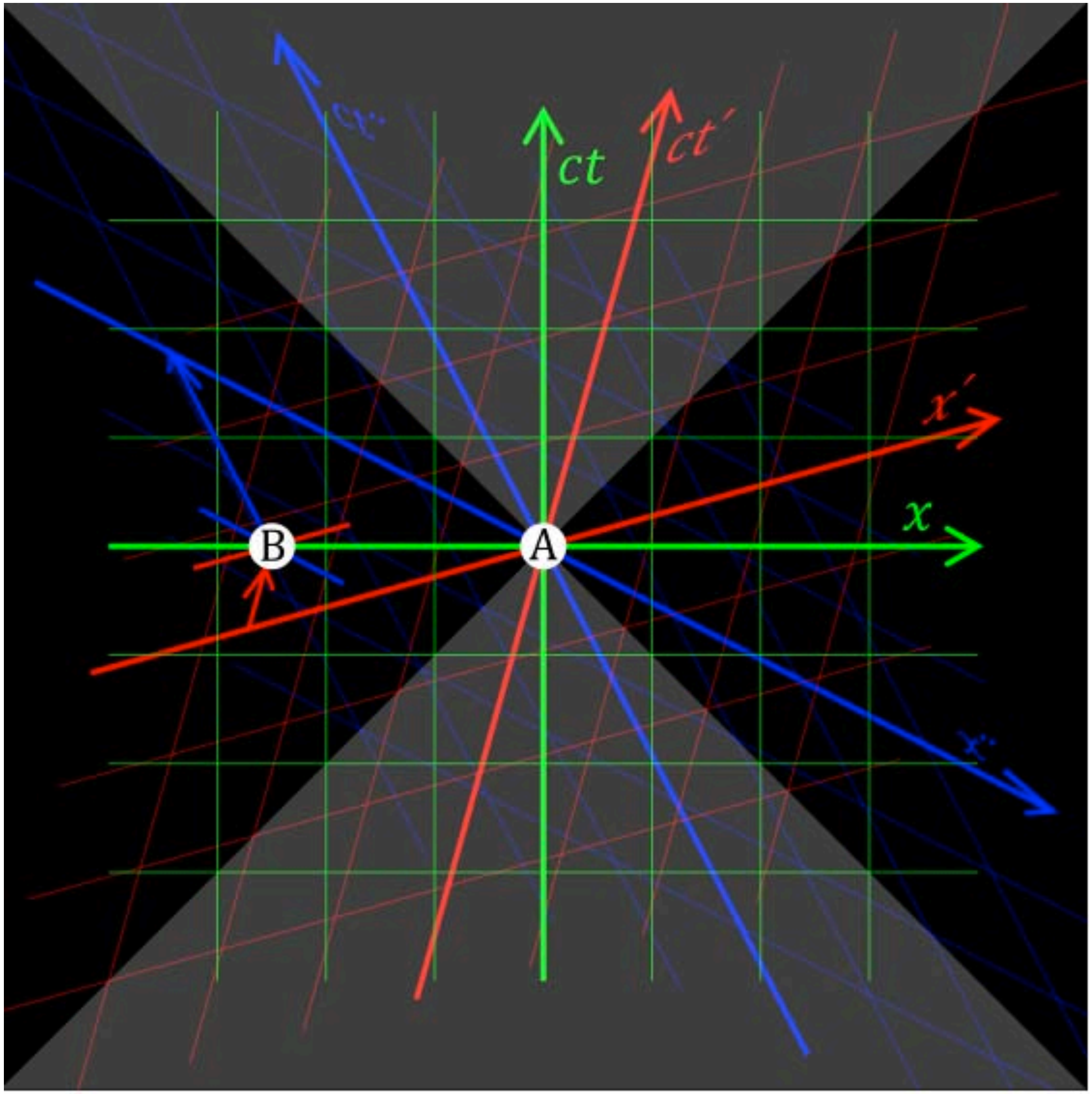
$\Delta t = 34{,}8\ \mu s$ $\quad$ $L = 10433$ m

Il concetto di "contemporaneità" è relativo: non esiste un tempo assoluto

- sistema di riferimento verde: eventi A e B contemporanei

- sistema di riferimento rosso: A precede B

- sistema di riferimento blu: B precede A



Non esiste alcuna simultaneità per eventi fra loro lontani: quindi non esiste alcuna azione immediata a distanza, nel senso della meccanica newtoniana.
La realtà fisica deve essere descritta in termini di funzioni continue nello spazio.
Il punto materiale, quindi, non può più essere considerato come il concetto base della teoria.

Albert Einstein

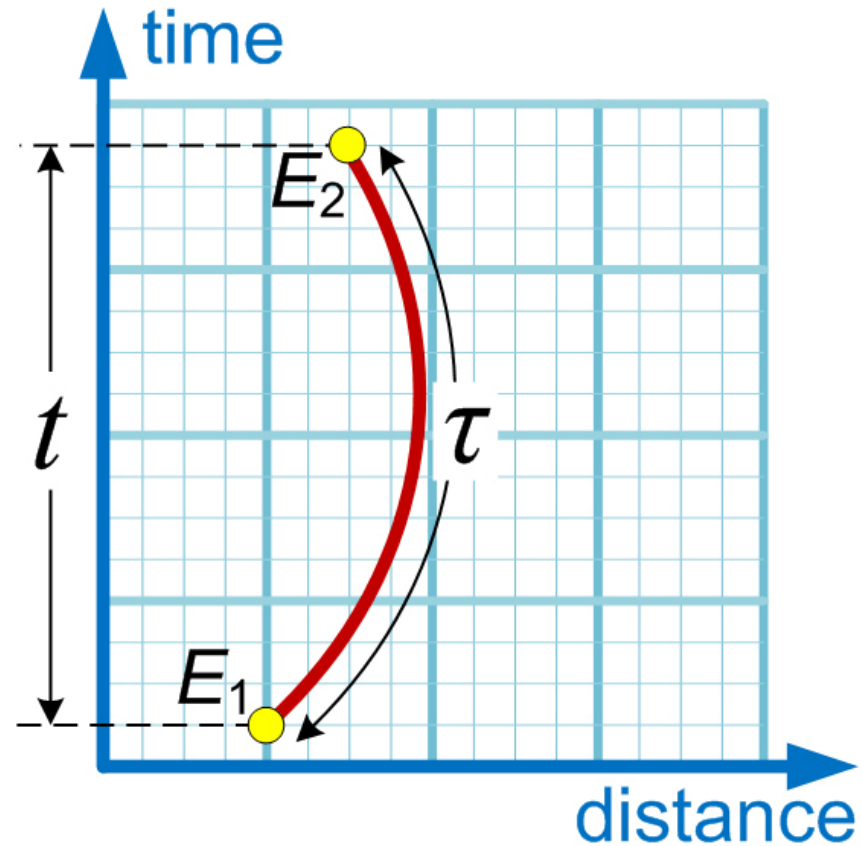
distanza invariante fra eventi e tempo proprio

dati due eventi E_1 ed E_2

- non sono invarianti
  - ▹ né la distanza spaziale
    $s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$
  - ▹ né la distanza temporale Δt^2

- la distanza relativistica
  $\tau^2 = \Delta t^2 - s^2/c^2$
  è invariante

- τ è l'intervallo di tempo misurato con un orologio che si muove con il corpo: *tempo proprio*

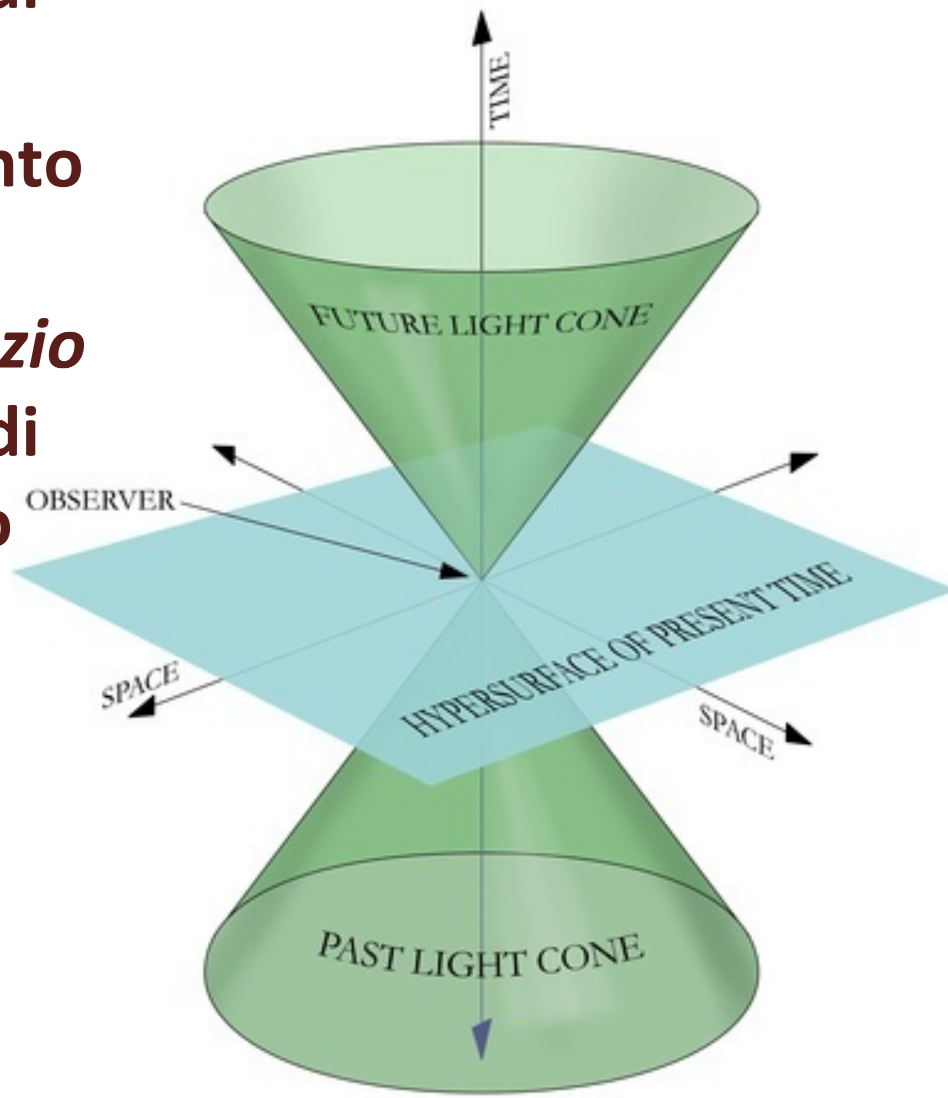


classificazione della distanza fra gli eventi

- se $\tau^2 > 0$ distanza di *tipo tempo*
  - ▻ esiste una trasformazione di Lorenz in cui gli eventi avvengono nello stesso punto

- se $\tau^2 < 0$ distanza di *tipo spazio*
  - ▻ esiste una trasformazione di Lorenz in cui gli eventi sono simultanei

- se $\tau^2 = 0$ gli eventi sono si trovano su un *cono di luce*

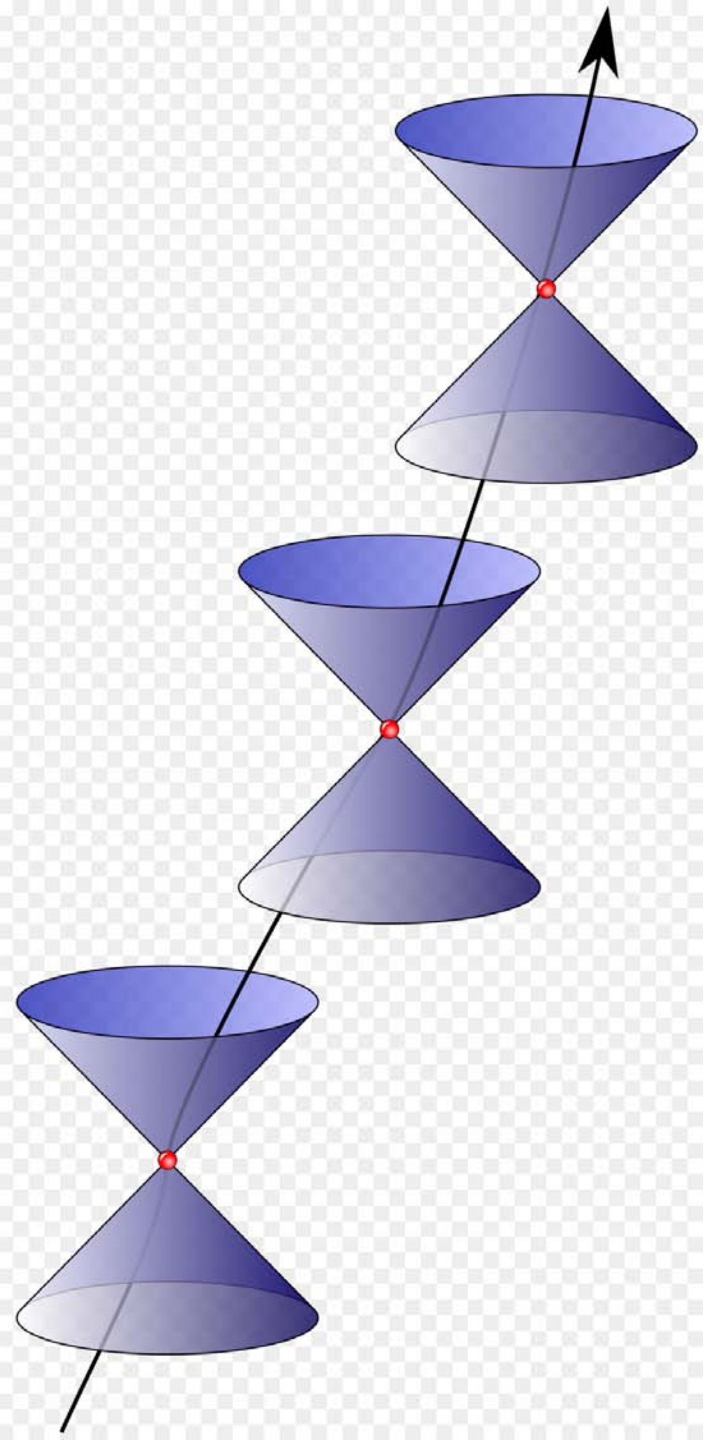


e il principio di causalità?

se l'evento F è generato dall'evento E, la loro distanza relativistica deve essere di tipo tempo, ossia *F* deve stare nel *cono futuro* di *E*.

Nessun osservatore, qualunque sia la sua velocità, potrà rilevare *F* prima di *E*.

L'intervallo temporale può solo crescere con la velocità, mai diminuire



Combinazione relativistica delle velocità

Dati due sistemi inerziali *K* e *K'* in moto relativo uniforme lungo l'asse *x* con velocità *v*, il punto *P* si muova lungo l'asse *x* positivo con velocità *u'* nel sistema *K'*; nel sistema *K* il punto *P* ha velocità

$$u = (u' + v)/(1 + vu'/c^2)$$

⇒ se $u' = c$ anche $u = c$ ossia la velocità della luce è la stessa per ogni osservatore inerziale

⇒ se $u' < c$ anche $u < c$ ossia se un corpo ha velocità minore di c in un sistema inerziale, avrà velocità minore di c in ogni sistema inerziale

[illegible]

$$dx = \gamma_v (dx' + v dt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma_v \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right).$$

Divide the first three equations by the fourth,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma_v (dx' + v dt')}{\gamma_v (dt' + \frac{v}{c^2} dx')}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma_v (dt' + \frac{v}{c^2} dx')}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma_v (dt' + \frac{v}{c^2} dx')},$$

or

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'})}, \quad u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma_v \ (1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'})}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma_v \ (1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'})},$$

[illegible]

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma_v^3 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x \frac{u_y v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x \frac{u_z v}{c^2}}{\gamma_v^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

dalla cinematica alla meccanica

Per applicare la relatività speciale alle particelle materiali occorre introdurre la massa come misura della quantità di materia e studiare il comportamento di *punti materiali* dotati di velocità e massa in un dato sistema inerziale.

Per il principio di relatività le loro proprietà devono essere indipendenti dal particolare sistema di riferimento e valere in tutti i sistemi inerziali.

Come vengono modificate le leggi della dinamica?

- poiché se l'accelerazione di un punto è nulla in un sistema inerziale è nulla in ogni altro sistema inerziale, allora il principio d'inerzia è valido in ogni sistema inerziale
- poiché l'accelerazione cambia da sistema a sistema, le altre leggi di Newton non sono più valide

momento relativistico

un punto materiale (di massa *m* e velocità *u* nel sistema *K*) deve avere il vettore momento *p* parallelo a *u* secondo una grandezza scalare funzione della massa e della velocità

$$p = \mu(m,u)\, u$$

la funzione $\mu(m,u)$ va determinata in modo che *p*

- sia relativisticamente covariante, ossia abbia in ogni sistema inerziale la stessa espressione

$$p' = \mu(m,u')\, u'$$

- si conservi in ogni sistema inerziale isolato

$$dp/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad dp'/dt' = 0$$

considerando la diffusione elastica di due corpi materiali identici in due sistemi inerziali, si riesce a determinare $\mu(m,u)$

$$\mu(m,u) = m/(1 - u^2/c^2)^{1/2} = m\,\gamma(u)$$

ossia

$$p = m\,\gamma(u)\,u$$

l'espressione è covariante: nel sistema K' si ha

$$p' = m\,\gamma(u')\,u'$$

il momento è una costante del moto dei sistemi isolati

$$dp/dt = dp'/dt' = 0$$

conviene introdurre la *massa relativistica* in modo che il momento sia il prodotto della massa per la velocità

$$p = m(u)\, u$$

ossia

$$m(u) = \gamma(u)\, m$$

funzione della velocità attraverso il termine $\gamma(u)$

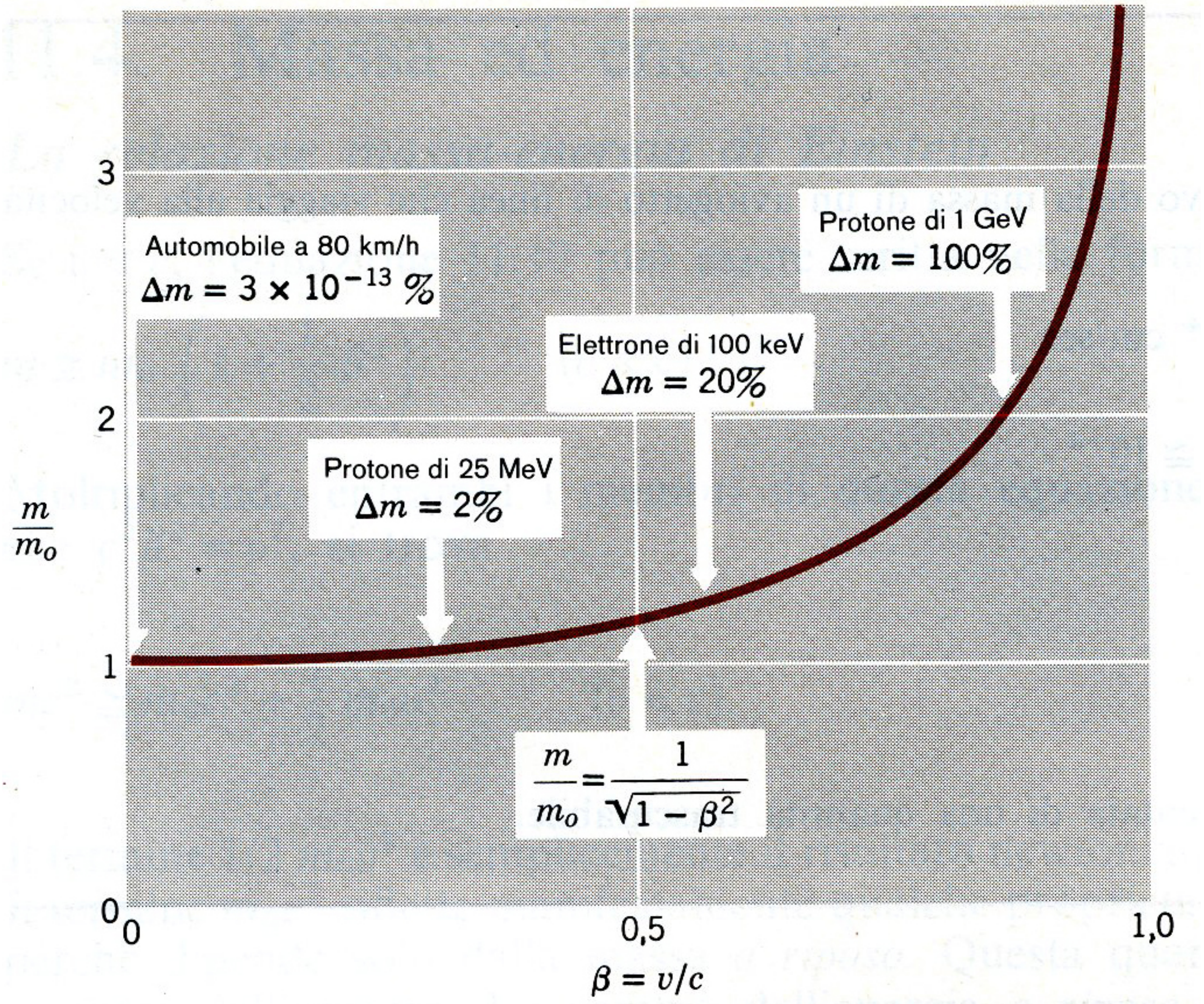
- ▻ la massa relativistica del corpo in moto aumenta rispetto al suo valore in quiete, esattamente come si dilata il tempo
- ▻ $m_0 = m(0)$ si dice *massa propria* o *a riposo* o *invariante*

$m(u)$ massa relativistica

- per velocità piccole coincide con la massa inerziale galileana $\gamma(u) \to 1$ se $u \to 0$
- per velocità prossime a c diviene enorme
- la massa propria m_0 è il minimo valore della massa relativistica di un corpo materiale $\gamma(u) \geq 1$

poiché $\gamma(c) = \infty$ solo corpi con massa propria nulla possono muoversi a velocità c

$\Rightarrow$ la luce deve avere massa propria nulla



Automobile a 80 km/h
$\Delta m = 3 \times 10^{-13}\,\%$
Protone di 25 MeV
$\Delta m = 2\%$
Elettrone di 100 keV
$\Delta m = 20\%$
Protone di 1 GeV
$\Delta m = 100\%$
$\frac{m}{m_o} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
$\frac{m}{m_o}$
$\beta = v/c$
0
1
2
3
0
0,5
1,0

Energia cinetica relativistica

dE **prodotto della velocità per la variazione della quantità di moto** ***dp***

$$dE = u\,dt \cdot dp/dt = u \cdot dp = u \cdot d\,(\mu\,\mathrm{u}) = m\,u\,d[\gamma\,(u)\,u]$$

$$E = \int u\,dp = m\gamma\,u^2 - \int m\gamma\,u\,du = m\gamma\,u^2 - m/2 \int \gamma\;d(u^2)$$

$$= m\gamma\,u^2 + m\,c^2\,(1 - u^2/\,c^2)^{½} - E_0 = m\gamma\,(u^2 + c^2 - u^2) - E_0$$

E_0 **costante di integrazione**

$$E = m(u)\,c^2 = m_0\,\gamma\,(u)\,c^2$$

c **costante,** ***m*** **variabile**

Energia relativistica

$$E = m(u)\, c^2 = m_0\, \gamma(u)\, c^2$$

per piccoli valori di u per γ si ha l'espressione approssimata

$$\gamma \approx 1 + \tfrac{1}{2}\, u^2/c^2$$

e quindi

$$E = m_0\, \gamma\, c^2 \approx m_0\, c^2 + \tfrac{1}{2}\, m_0\, u^2$$

l'energia totale oltre alla parte "cinetica" $\tfrac{1}{2}\, m_0\, u^2$ comprende la trasformazione in energia della massa invariante m_0

Differenza di energia relativistica e classica: energia di un protone con $u = c/2$

$m_0 \approx 1{,}67\times 10^{-27}$ kg; $\qquad c \approx 2{,}99\times 10^{8}$ m/s

$\gamma = 2/\sqrt{3}$

- $E_G = 1/2\, m_0\, u^2 = 1/8\, m_0\, c^2$
  $\approx 1{,}67\times 10^{-27}\times (2{,}99\times 10^{8})^2/8$ J
  $\approx 1{,}87\times 10^{-11}$ J
- $E_E = m\, c^2 = m_0\, \gamma\, c^2$
  $\approx 1{,}67\times 10^{-27}\times (2{,}99\times 10^{8})^2\; 2/\sqrt{3}$ J
  $\approx 17{,}24\times 10^{-11}$ J

$E_E - E_G = m_0\, c^2\, (2/\sqrt{3} - 1/8) \approx 1{,}02\, m_0\, c^2$

Energia cinetica e momento

modulo della quantità di moto $p = |(p_x, p_y, p_z)|$

$$(p_x, p_y, p_z) = m\,(u_x, u_y, u_z) = m_0 \gamma\,(u_x, u_y, u_z)$$

$$p^2 = m_0^2 \gamma^2 u^2 \qquad\qquad \gamma^2 = 1 + p^2/(m_0^2 c^2)$$

$$E^2 = (m_0 \gamma c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + (p c)^2$$

$$p^2 = E^2/c^2 - m_0^2 c^2 \qquad\qquad (m_0 c)^2 = E^2/c^2 - p^2$$

$$m_0 c^2 = (E^2 - p^2 c^2)^{½}$$

$p = E/c$ se la massa propria è nulla

anche "corpi" con massa nulla possono avere un

Conseguenze dell'"eclissi" della massa

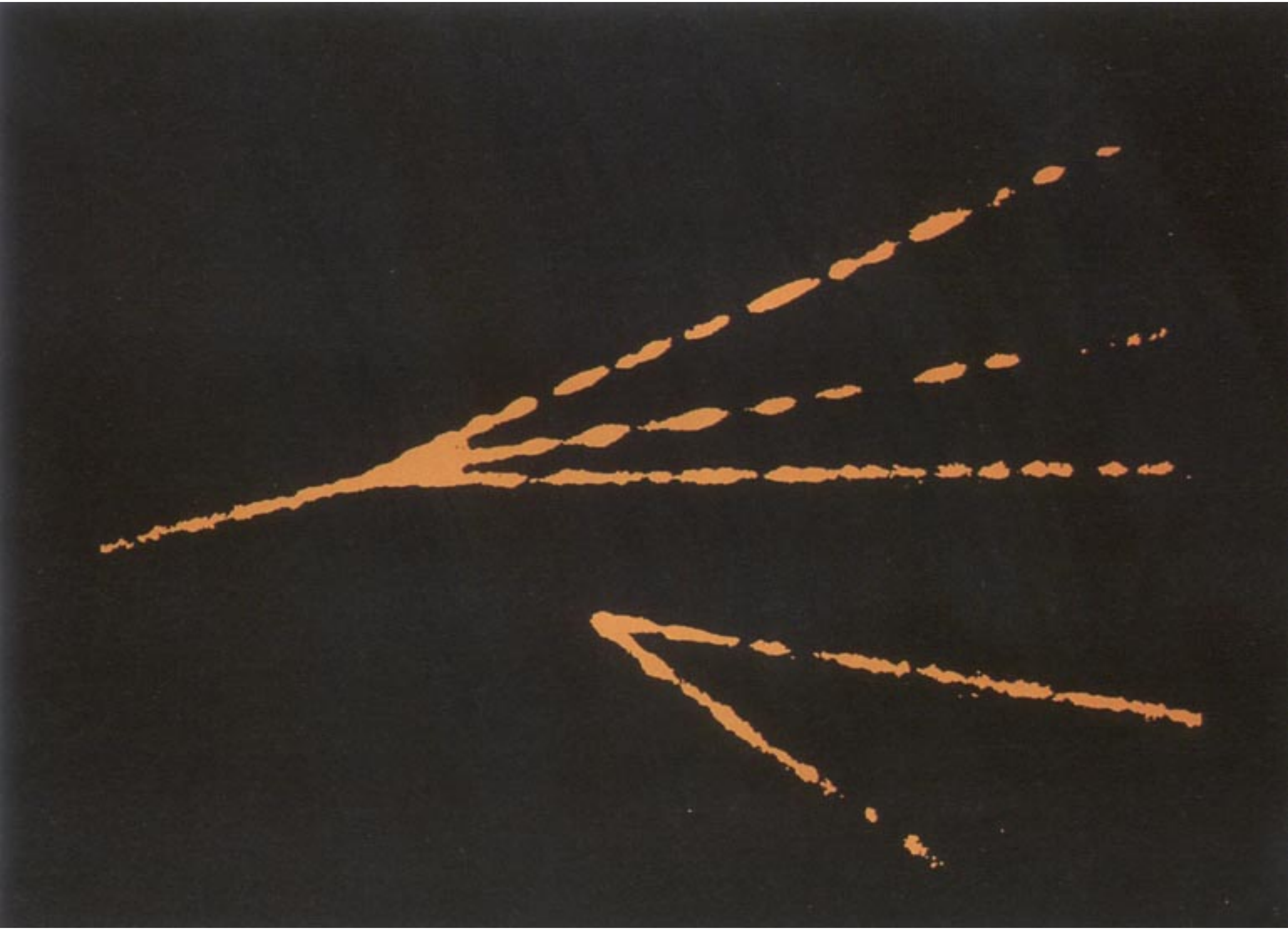
nei processi relativistici si conserva solo l'energia, ma non la massa, e sono possibili eventi inconcepibili nella meccanica classica

- radiazione priva di massa possiede quantità di moto non nulla: $p = E/c$
- corpi massivi possono trasformarsi in energia pura
- radiazione elettromagnetica può generare corpi massivi

◆ la massa (la materia) è solo una delle tante forme che può assumere l'energia

◆ per i microsistemi conviene esprimere la massa propria in unità di misura di energia; se il corpo è in quiete

$$E = m_0 c^2 \quad \Longrightarrow \quad m_0 = E/c^2$$



	Archimede	Galileo	Einstein
spazio	assoluto	relativo	relativo
tempo	assoluto	assoluto	relativo
Δx	costante	invariante	variabile
Δt	costante	costante	variabile
$\Delta t^2 - \Delta x^2/c^2$	costante	invariante	invariante
velocità	assoluta	relativa	relativa
momento	[assoluto]	relativo	covariante
energia	[assoluta]	invariante	covariante

La relatività speciale al momento attuale si pone come una teoria universale che descrive la struttura di una comune arena spazio-temporale in cui hanno luogo tutti i processi fondamentali.
Tutte le leggi della fisica sono vincolate dalla relatività speciale che agisce come una sorta di super legge

Jean-Marc Lévy-Leblond

www.pd.infn.it/
~pascolin/metodi

pascolini@pd.infn.it
http://perlascienza.eu

@apascolini