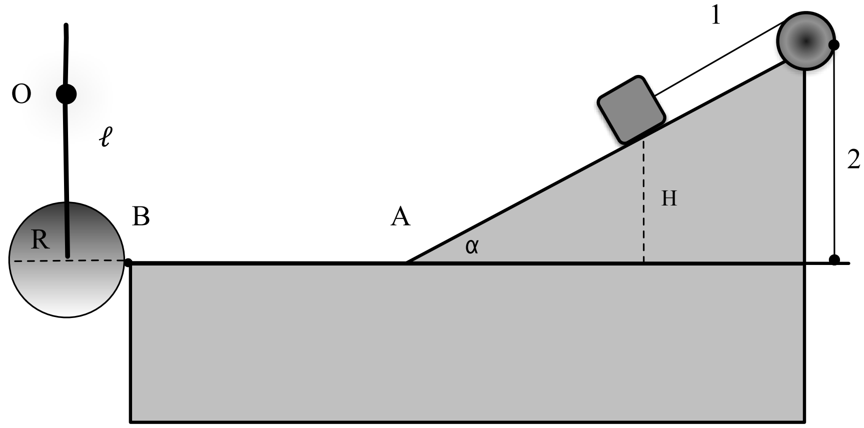
Laurea in Ingegneria Biomedica, dell'Informazione, Elettronica ed Informatica
Prova scritta - Fisica Generale I - 06 Luglio 2015 - Canale 2

Cognome: .... Nome: ....
Numero di Matricola: ....

Problema 1 [20 punti]

Una particella di massa $m_p = 1.5$ kg si trova su un piano inclinato liscio di angolo $\alpha = 30°$ ad una altezza $H = 3\,\text{m}$. È attaccata ad un filo ideale (1) avvolto intorno ad un rocchetto cilindrico di massa $m_r = 1\,\text{kg}$ e momento di inerzia $I_r = 0.45\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Inizialmente il rocchetto non può ruotare in quanto è tenuto fermo da un secondo filo ideale (2).



1. Determinare la tensione dei due fili: T_1 e T_2;

All'istante $t_0 = 0\,\text{s}$ il filo 2 viene reciso e la particella inizia a scendere. Sapendo che il filo si srotola senza strisciare e che sul rocchetto agisce un momento di attrito $M_{att} = 0.5$ N·m, determinare:

2. la tensione del filo T_1 e l'accelerazione con cui si muove la particella;

3. la velocità con cui arriva la particella in A;

Una volta arrivata in A la particella prosegue libera (il filo 1 si stacca dal rocchetto) sul tratto piano AB (liscio) fino ad urtare in modo completamente anelastico un corpo rigido composto da un'asta di lunghezza $\ell = 2\,\text{m}$ e massa $m_a = 2$ kg ed un disco di massa $m_d = 1$ kg e raggio $r_d = 0.5$ m attaccato in modo che il suo centro coincida con l'estremo dell'asta. Il corpo rigido può oscillare senza attrito attorno al perno O posto all'altezza $\frac{2}{3}\,\ell$. Si determini:

4. il momento di inerzia del corpo rigido rispetto al punto O (prima che avvenga l'urto);

5. la velocità angolare del corpo rigido dopo l'urto;

6. l'angolo massimo (rispetto alla verticale) raggiunto dal corpo rigido;

7. l'impulso della forza vincolare $\vec{J}$ fornito al sistema durante l'urto.

Soluzione Problema 1

1. Il bilancio delle forze e dei momenti all'equilibrio è dato da:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= I_r \vec{\alpha}_r = 0 \\ \vec{F}_g + \vec{N} - \vec{T}_1 &= m_p \vec{a}_p = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 = m_p\, g\, \sin\alpha = 7.35 \text{ N}$$

2. Il bilancio delle forze e dei momenti è dato da:

$$\begin{cases} T_1\, r_r - M_{att} &= I_r \alpha_r \\ m_p g \sin\alpha - T_1 &= m_p a_p \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} T_1 &= 2.23 \text{ N} \\ a_p &= 3.41 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

   Per ottenere il risultato precedente abbiamo imposto le condizioni di filo ideale (ovvero $r_r \alpha_r = a_p$) con $r_r = \sqrt{2 I_r / m_r}$. Dopodiche si risolve il sistema nelle variabili T_1 e a_p.

3. Data la presenza del momento resistente non si può utilizzare la conservazione dell'energia. Dalla cinematica si ottiene che:

$$\begin{cases} v_p &= a_p t \\ \Delta x_p &= \frac{1}{2} a_p t^2 = \frac{H}{\sin\alpha} \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{2 a_p H}{\sin\alpha}} = 6.40 \text{ m/s}$$

4. Il momento di inerzia dell'asta più disco è dato da:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{m_a \ell^2}{12} + m_a \left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = 0.89 \text{ kgm}^2 \\ I_b &= \frac{m_d r_d^2}{2} + m_d \left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = 1.90 \text{ kgm}^2 \\ I_{tot} &= 2.79 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

5. Usando la conservazione del momento angolare rispetto al punto O si ottiene:

$$L_{in}^O = m_p\, v_A\, \frac{2}{3}\ell = L_{fin}^O = (I_{tot} + m_p\, (\frac{2}{3}\ell)^2)\omega' \quad \rightarrow \quad \omega' = 2.34 \text{ rad/s}$$

6. Bisogna calcolare la lunghezza del pendolo ridotto:

$$\begin{aligned} h_p &= \frac{2}{3}\ell - z_{CM}^0 = 0.89 \text{ m} \quad \rightarrow \quad z_{CM}^0 = \frac{m_a}{m_a + m_d + m_p}\frac{\ell}{2} \\ \Delta z_{CM} &= \frac{\frac{1}{2}(I_{tot} + m_p\, (\frac{2}{3}\ell)^2)\omega'^2}{(m_a + m_d + m_p) g} = 0.34 \text{ m} \end{aligned}$$

   ed utilizzando la consevazione dell'energia si ha che

$$\cos\theta_{max} = 1 - \Delta z_{CM}/h_p \quad \rightarrow \quad \theta_{max} = 51.88°$$

7. $J = (m_a + m_d + m_p)\, h_p\, \omega' - m_p\, v_A = -0.22 \text{ kg m/s}$

Problema 2 [10 punti]

Una macchina termica reversibile M lavora scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_1 = 293\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 400\,\mathrm{K}$. Ad ogni ciclo cede alla sorgente a temperatura T_1 il calore $Q_1 = -50\,\mathrm{J}$. Il lavoro prodotto dalla macchina M viene usato per alimentare un frigorifero generico F con coefficiente di prestazione $\xi = 3$ che deve produrre ghiaccio a temperatura $T_3 = 253\,\mathrm{K}$ a partire da una massa $m = 1\,\mathrm{Kg}$ di acqua che si trova inizialmente alla temperatura T_2. Calcolare:

1. il lavoro prodotto ad ogni ciclo dalla macchina M;
2. il calore che è necessario sottrarre all'acqua per trasformarla tutta in ghiaccio alla temperatura T_3;
3. il lavoro totale che è necessario fornire al frigorifero F per tale trasformazione;
4. la variazione di entropia complessiva dell'acqua e dell'universo alla fine di tale trasformazione.

Soluzione Problema 2:

1. La macchina M è reversibile e lavora tra due sole sorgenti di calore, quindi $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.267$. Per il primo principio della termodinamica $Q_1 + Q_2 = W$. Dalle due equazioni si ricava
$$W = \frac{\eta Q_1}{\eta - 1} = 18.26\,\mathrm{J}$$

2. Per trasformare la massa m di acqua in ghiaccio alla temperatura T_3 bisogna sottrarre il calore $Q^{tot} = mc_a(T_1 - T_0) - m\lambda + mc_g(T_3 - T_0) = -454.4\,\mathrm{kJ}$, dove $T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$.

3. Per trasformare tutta l'acqua in ghiaccio il frigorifero deve assorbire il calore $-Q_{tot}$. Ad ogni ciclo assorbe il calore $Q_3 = |W\xi| = 54.8\,\mathrm{J}$, dove ξ è il coefficiente di prestazione. Se ad ogni ciclo il frigorifero sottrae Q_3, per sottrarre $-Q^{tot}$ servono $n = \frac{-Q^{tot}}{Q_3} = 8296$ cicli. Il lavoro totale è quindi $W_{tot} = nW = 151.5\,\mathrm{kJ}$.
Oppure, in modo più rapido, $W_{tot} = \frac{-Q_{tot}}{\xi} = 151.5\,\mathrm{kJ}$.

4. La variazione di entropia del sistema costituito dalla macchina M che scambia calore con le sorgenti T_1 e T_2 è nulla (M è reversibile).
Il frigorifero scambia calore con l'acqua e la sorgente a temperatura T_1. La variazione di entropia del frigorifero è nulla in quanto compie dei cicli.
La variazione di entropia dell'acqua è
$$\Delta S_a = mc_a ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - \frac{m\lambda}{T_0} + mc_g ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) = -1659.0\,\mathrm{J/K}$$
Per calcolare la variazione di entropia della sorgente T_1 dobbiamo calcolare quanto calore il frigorifero ha ceduto alla sorgente, $Q'_{1,tot}$. Sfruttando il primo principio della termodinamica, $Q'_{1,tot} = W_{tot} - |Q_{tot}| = 605.9\,\mathrm{kJ}$, da cui
$$\Delta S_{T_1} = \frac{Q'_1}{T_1} = 2068.0\,\mathrm{J/K}$$
Quindi la variazione di entropia dell'universo è
$$\Delta S_U = \Delta S_a + \Delta S_{T_2} = 409.0\,\mathrm{J/K}$$