

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 9 Settembre 2008

Problema

Siano $a^\dagger$ ed a gli operatori di creazione e distruzione di un oscillatore armonico unidimensionale e si indichi con $|n\rangle$ l'autostato associato all'energia E_n .

1. Utilizzando la nota relazione di commutazione $[a, a^\dagger] = 1$ si calcoli il commutatore $[a, (a^\dagger)^k]$, per un generico k intero e positivo;
2. **FACOLTATIVO.** Sia $f(x)$ una funzione analitica che ammette sviluppo in serie di Taylor in un intorno dell'origine. Si dimostri che vale la seguente relazione:

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} . \quad (1)$$

Si consideri lo stato fisico rappresentato, al tempo $t = 0$, dal seguente ket:

$$|\lambda, t = 0\rangle = C(\lambda) \exp\{\lambda a^\dagger\} |0\rangle$$

con λ un generico numero complesso e $C(\lambda)$ una costante di normalizzazione.

3. Si dimostri che $|\lambda, t = 0\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione a e se ne calcoli l'autovalore (NOTA: ci si può avvalere del risultato in eq. (1));
4. Si normalizzi $|\lambda, t = 0\rangle$ e si calcoli la probabilità che effettuando una misura di energia si ottenga E_n ;
5. Si calcoli il valore di aspettazione dell'energia $\langle \mathcal{H} \rangle_{|\lambda, t=0\rangle}$.

Si supponga che al tempo $t = 0$ si effettui effettivamente una misura di energia (ideale, di prima specie) che dà come risultato $E < E_2$.

6. Si descriva lo stato dopo la misura, $|\lambda, t = 0^+\rangle$, e la sua evoluzione temporale;
7. Si calcoli il valore di aspettazione dell'energia $\langle \mathcal{H} \rangle_{|\lambda, t>0\rangle}$ e si dica se la misura fatta è esotermica ($E(t > 0) < E(t = 0)$) o endotermica ($E(t > 0) > E(t = 0)$).