Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 12 Dicembre 2008

Problema

Si consideri un oscillatore armonico semplice di massa M e pulsazione ω. Siano $a^\dagger$ e a i corrispondenti operatori di creazione e distruzione e si indichi con $|0\rangle$ lo stato fondamentale.

1. Si calcolino i valori di aspettazione $\langle 0|X|0\rangle$, $\langle 0|X^2|0\rangle$, $\langle 0|P|0\rangle$ e $\langle 0|P^2|0\rangle$ e si verifichi che lo stato fondamentale satura il principio di indeterminazione;

Sia λ un parametro reale e si consideri l'operatore di traslazione $T(\lambda) = e^{-\frac{i}{\hbar}P\lambda}$.

2. Si determinino le proprietà di trasformazione degli operatori X, X^2, P e P^2 rispetto ad una traslazione $T(\lambda)$;

Si supponga che il sistema sia descritto al tempo $t = 0$ dallo stato $|\psi(0)\rangle = T(\lambda)|0\rangle$.

3. Si calcoli il valor medio dell'energia $\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle$ al tempo $t = 0$. Si può estendere questo risultato ad un generico istante di tempo $t > 0$?
4. Si calcolino i commutatori $\left[a, P^k\right]$ e $\left[a^\dagger, P^k\right]$ con k un generico intero positivo. Si derivino i commutatori $[a, T(\lambda)]$ e $\left[a^\dagger, T(\lambda)\right]$ (eventualmente utilizzando i risultati precedenti);
5. Si calcoli la probabilità che una misura di energia sullo stato $|\psi(t)\rangle$ dia come risultato E_0;
6. Si calcoli la probabilità che una misura di energia sullo stato $|\psi(t)\rangle$ dia come risultato E_n e si descriva l'evoluzione temporale dello stato $|\psi(t)\rangle$ ad un generico istante di tempo $t > 0$;

FACOLTATIVO:

7. Si determinino $\langle X\rangle_{\psi(t)}$ e $\langle P\rangle_{\psi(t)}$ per un generico istante di tempo $t > 0$ e si discuta il risultato.

FORMULE UTILI: Vedi retro

FORMULE UTILI: Le seguenti formule possono essere utili per i punti 4 e 5.

Dati due operatori A e B tali che $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, allora valgono le seguenti propietà:

$$e^{A+B} = e^A\, e^B\, e^{-[A,B]/2} = e^B\, e^A\, e^{-[B,A]/2} \tag{1}$$

$$e^A\, B\, e^{-A} = B + [A,B] \tag{2}$$