

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 07 Gennaio 2009

Problema

Una particella quantistica di massa M è soggetta al seguente potenziale unidimensionale:

$$\begin{cases} V(x) = 0, & |x| \leq \frac{L}{2} \\ V(x) = +\infty, & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}.$$

1. Risolvere l'equazione di Schroedinger e determinare esplicitamente le soluzioni stazionarie (normalizzate), $\phi_n(x)$, e le rispettive energie, E_n ;
7. **FACOLTATIVO.** Per l'autostato $\phi_n(x, t)$, calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_n$, $\langle X^2 \rangle_n$, $\langle P \rangle_n$ e $\langle P^2 \rangle_n$ e verificare il principio di indeterminazione. L'operatore P è definito con condizioni periodiche.

Sia $\psi(x) = 2\phi_1(x) + 6\phi_2(x)$ lo stato rappresentativo del sistema ad un determinato istante di tempo $t = t_0$.

2. Calcolare il valore di aspettazione dell'energia, $\langle \mathcal{H} \rangle_{\psi(t)}$, e della parità, $\langle \mathcal{P} \rangle_{\psi(t)}$. Dire se questi valori dipendono dal tempo, motivando opportunamente la risposta;
3. Al tempo $t = t_1$ viene effettuata una misura di parità con risultato $\mathcal{P} = +1$. Si indichi con $\xi(x)$ la funzione d'onda dopo tale misura. Si calcolino $\langle X \rangle_{\xi(t)}$, $\langle P \rangle_{\xi(t)}$ e $\langle P^2 \rangle_{\xi(t)}$. L'operatore P è definito con condizioni periodiche.

Supponiamo il sistema si trovi nello stato $\xi(x, t)$ quando al tempo $t = t_2$ la buca di potenziale viene istantaneamente allargata ($V(x) = 0$ per $|x| \leq 2L$). Si indichino con $\tilde{\phi}_n$ e $\tilde{E}_n$ le nuove autofunzioni e le rispettive energie.

4. Calcolare la probabilità che una misura di energia al tempo $t > t_2$ dia come risultato $\tilde{E}_n$.

Al tempo $t = t_3$ si effettua una misura di energia che dà come risultato $E \leq E_0$. Per comodità definiamo $t' = t - t_3$.

5. Si calcoli la probabilità di effettuare tale misura e si descriva l'evoluzione della funzione d'onda risultante, $\chi(x, t')$ per $t' \geq 0$;
6. Calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_{\chi(t')}$, $\langle P \rangle_{\chi(t')}$ per $t' \geq 0$.

FORMULE UTILI

Le seguenti formule possono essere utili per i calcoli:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}\end{aligned}$$

$$\int dy y^2 \cos y = (y^2 - 2) \sin y + 2y \cos y$$