

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 02 Luglio 2009

Problema

Una particella quantistica, con analogo classico, di massa m , pulsazione ω e carica elettrica q è soggetta al seguente campo di forze unidimensionale:

$$F(x) = -m\omega^2 x + q\mathcal{E}(x)$$

con $\mathcal{E}(x)$ un campo elettrico della forma $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 x$. Si considerino $m, \omega, q \in \mathcal{R}_+$ ed $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \in \mathcal{R}$.

1. Si discuta qualitativamente lo spettro dell'Hamiltoniano e la corrispondente degenerazione. Per quali valori di $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ esistono stati legati ?
2. Considerando tali valori di $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ si determinino gli autovalori $\tilde{E}_n$ e le autofunzioni $\tilde{\psi}_n(x)$ dell'Hamiltoniano. A tale scopo è utile definire opportune costanti x_0, V_0 ;

Il sistema si trova nello stato di minima energia $\tilde{E}_0$ quando, all'istante $t = 0$, il campo elettrico viene spento. Si indichino con E_n e $\psi_n(x)$ i nuovi autovalori e autovettori dell'Hamiltoniano.

3. Si discuta qualitativamente sotto quali condizioni una misura di energia con risultato E_0 possa essere endotermica ($E(t > 0) > E(t < 0)$) o esotermica;
4. Si calcoli la probabilità che una misura di energia dia come risultato E_0 ad un generico istante di tempo $t > 0$;

Si consideri ora per semplicità il caso con $\mathcal{E}_1 = 0$:

5. Si dimostri che vale la seguente relazione (con x_0 opportuno):

$$c_n \equiv \langle \phi_n | \tilde{\phi}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\beta x_0}{\sqrt{2}} \right)^n c_0 \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

6. Si scriva l'evoluzione temporale dello stato $\psi_+(x, t)$ e si calcoli $\langle \mathcal{H} \rangle_{\psi_+(t)}$. (NB: Si ricordi che $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha^n}{n!} = \alpha e^\alpha$).