Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica

Padova - Dipartimento di Fisica - 14 Settembre 2009

Problema

Si consideri un sistema quantistico unidimensionale di Hamiltoniana $\mathcal{H} = P^2/2m + V(X)$. Sia $\psi(t)$ un generico stato del sistema.

1. Si dimostri che le quantità $\langle X \rangle_{\psi(t)}$, $\langle P \rangle_{\psi(t)}$ soddisfano le equazioni del moto classiche.

Si indichi con $U(t,0)$ l'operatore di evoluzione temporale: $\psi(t) = U(t,0)\,\psi(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\psi(0)$.

2. Si dimostri che per un generico operatore $\mathcal{O}$, indipendente dal tempo, si ha:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle_{\psi(t)} = \langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}] \rangle_{\psi(t)}\,.$$

Si consideri da qui in avanti il caso di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω.

3. Si determinino i valori di aspettazione $\langle X \rangle_{\psi(t)}$, $\langle P \rangle_{\psi(t)}$ in funzione dei valori di aspettazione al tempo $t = 0$ (i.e. $\langle X \rangle_{\psi(0)}$ e $\langle P \rangle_{\psi(0)}$);

4. FACOLTATIVO: Si dimostrino le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} U(t,0)^\dagger X\, U(t,0) &= X \cos\omega t + \frac{P}{m\omega} \sin\omega t \\ U(t,0)^\dagger P\, U(t,0) &= P \cos\omega t - X m\omega \sin\omega t\,. \end{aligned}$$

   (Si espanda l'esponenziale in serie e si tengano i termini fino almeno all'ordine t^3).

5. Utilizzando il risultato di cui al punto 4 si calcolino $\langle X^2 \rangle_{\psi(t)}$ e $\langle P^2 \rangle_{\psi(t)}$ in funzione dei valori di aspettazione al tempo $t = 0$;

Supponendo che la funzione d'onda al tempo t=0 sia data da $\psi(x,0) = Ae^{-\frac{\gamma x^2}{2}}$ (con γ un generico numero reale $\neq \frac{m\omega}{\hbar}$ ed A una opportuna costante di normalizzazione da determinare):

6. Si calcoli $\langle \mathcal{H} \rangle_{\psi(t)}$ ad un generico tempo $t > 0$;

7. Si verifichi il principio di indeterminazione ad un generico tempo $t > 0$.