Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 14 Dicembre 2009

Problema

Si consideri un sistema quantistico con analogo classico, definito su tutto l'asse reale e con Hamiltoniano dato da $\mathcal{H} = P^2/2m + V(X)$. Per semplicitá si fissi come valore della massa $m = \hbar/\omega$ (con ω un numero reale e positivo). Il sistema si trova inizialmente nell'autostato descritto dalla funzione d'onda $\phi(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ associata all'autovalore E_ϕ.

1. Si normalizzi tale stato e si calcolino $\langle X \rangle_\phi$ e $\langle P \rangle_\phi$;
2. Sapendo che il potenziale $V(x)$ soddisfa alla condizione $V(0) = 0$, si determini esplicitamente il potenziale $V(x)$ e l'autovalore E_ϕ;

Al tempo $t = 0$ si effettua una misura di posizione e si trova la particella nella regione $x \geq 0$. Si chiami $\psi_(x, t)$ la funzione d'onda dopo la misura.

3. Si calcolino $\langle X \rangle_\psi$ e $\langle P \rangle_\psi$ al tempo $t = 0^+$;
4. Utilizzando il risultato precedente e la conoscenza del teorema dei Ehrenfest si descriva come evolvono tali valori di aspettazione per $t > 0$;
5. Si calcoli il valor medio dell'energia $\langle \mathcal{H} \rangle_\psi$ al tempo $t = 0^+$ e si dica come evolve nel tempo;
6. Si determini la probabilità che una misura di energia al tempo $t = 0^+$ dia come risultato $E_0 = \hbar\omega/2$ ed $E_1 = 3\hbar\omega/2$;
7. **FACOLTATIVO**: Generalizzando il risultato precedente si calcoli la probabilità che una misura di parità al tempo $t = 0^+$ dia come risultato $\mathcal{P} = +1$;

FORMULE UTILI: Vedi retro

FORMULE UTILI: Le seguenti formule possono essere utili per i calcoli:

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left[\frac{p+1}{2}\right] \qquad\qquad \text{con } p \in \mathbb{N}$$

dove Γ é la funzione Gamma di Eulero che soddisfa alle seguenti propietà:

- $\Gamma[n] = (n-1)!$ per n intero e $n \geq 1$; da cui per esempio $\Gamma[1] = 1$, $\Gamma[2] = 1$, etc.;
- $\Gamma\left[\frac{1}{2}\right] = \sqrt{\pi}$;
- $\Gamma[n] = (n-1)\Gamma[n-1]$ per n intero o semintero;