

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 29 Giugno 2010

Problema

Una particella quantistica di massa M è descritta dalla Hamiltoniana bidimensionale:

$$H_{xy} = \frac{1}{2M} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{M\omega^2}{2} (X^2 + Y^2)$$

1. Utilizzando il metodo della separazione delle variabili, si dimostri che è possibile scrivere le autofunzioni dell'oscillatore armonico bidimensionale in termini delle autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale;
2. Si determini lo spettro di H_{xy} e se ne calcoli la degenerazione; cosa se ne può dedurre riguardo alla completezza di H_{xy} ?
3. Indicando con $\psi_{m,n}(x,y)$ una generica autofunzione di H_{xy} , si scrivano esplicitamente i seguenti autovalori e autofunzioni: E_0 , $\psi_{0,0}(x,y)$ ed E_1 , $\psi_{1,0}(x,y)$ e $\psi_{0,1}(x,y)$;

Si consideri l'operatore $L_z = XP_y - YP_x$

4. Si calcoli il commutatore $[H_{xy}, L_z]$;
5. Si dimostri che le funzioni $\psi_{1,0}(x,y)$ e $\psi_{0,1}(x,y)$ non sono autofunzioni di L_z ;
6. Dati i risultati trovati nei punti 4 e 5 si dica se è possibile trovare una base di autostati comuni per H_{xy} e L_z e nel caso affermativo si scrivano tali autostati limitatamente ai primi due livelli energetici E_0 ed E_1 .

FACOLTATIVO:

7. Si scriva l'Hamiltoniana H_{xy} in coordinate polari (r, θ) , si identifichino gli operatori quantità di moto P_r^2 e momento angolare L_z e si discutano i risultati ottenuti nei punti 4, 5 e 6.