

Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 26 Agosto 2010

Problema

Una particella quantistica di massa M è soggetta al seguente potenziale unidimensionale:

$$\begin{cases} V(x) = 0, & |x| \leq L \\ V(x) = +\infty, & |x| > L \end{cases}.$$

1. Risolvere l'equazione di Schroedinger e determinare esplicitamente le soluzioni stazionarie (normalizzate), $\phi_n(x)$, e le rispettive energie, E_n ;
7. **FACOLTATIVO.** Per l'autostato $\phi_n(x, t)$, calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_n$, $\langle X^2 \rangle_n$, $\langle P \rangle_n$ e $\langle P^2 \rangle_n$ e verificare il principio di indeterminazione. L'operatore P è definito con condizioni periodiche.

Sia $\psi(x) = 5\phi_1(x) + 2\phi_2(x)$ lo stato rappresentativo del sistema al tempo $t = 0$.

2. Calcolare il valore di aspettazione dell'energia $\langle \mathcal{H} \rangle_\psi$ e della parità $\langle \mathcal{P} \rangle_\psi$. Dire se questi valori dipendono dal tempo, motivando opportunamente la risposta;
3. Al tempo $t = t_1$ viene effettuata una misura di parità con risultato $\mathcal{P} = +1$. Si indichi con $\xi(x, t)$ la funzione d'onda dopo tale misura. Si calcolino $\langle X \rangle_\xi$, $\langle P \rangle_\xi$ e $\langle P^2 \rangle_\xi$.

Supponiamo il sistema si trovi nello stato $\xi(x, t)$ quando al tempo $t = t_2$ la buca di potenziale viene istantaneamente ristretta ($V(x) = 0$ per $|x| \leq L/2$). Si indichino con $\tilde{\phi}_n$ e $\tilde{E}_n$ le nuove autofunzioni e le rispettive energie.

4. Calcolare la probabilità che una misura di energia al tempo $t > t_2$ dia come risultato $\tilde{E}_n$.

Al tempo $t = t_3$ si effettua una misura di energia che dà come risultato $E \leq E_1$.

5. Si calcoli la probabilità di effettuare tale misura e si descriva l'evoluzione della funzione d'onda risultante, $\chi(x, t)$ per $t \geq t_3$;
6. Calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_\chi$, $\langle P \rangle_\chi$ per $t \geq t_3$.

FORMULE UTILI

Le seguenti formule possono essere utili per i calcoli:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}\end{aligned}$$

$$\int dy \, y^2 \cos y = (y^2 - 2) \sin y + 2y \cos y$$