Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica

Padova - Dipartimento di Fisica - 11 Dicembre 2007

Problema

Una particella quantistica di massa M è soggetta al seguente potenziale unidimensionale:

$$\begin{cases} V(x) = +\infty\,, & x < -\frac{L}{2} \\ V(x) = V_0\,, & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ V(x) = +\infty\,, & x > \frac{L}{2} \quad . \end{cases}$$

1. Risolvere l'equazione di Schroedinger, relativa al caso $V_0 = 0$, determinando le soluzioni stazionarie (normalizzate), $\phi_n(x)$ e le rispettive energie, E_n;

2. Per un generico autostato $\phi_n(x,t)$, calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_n$, $\langle P \rangle_n$ e $\langle P^2 \rangle_n$ (ove P é definito con condizioni periodiche); dire se questi valori di aspettazione dipendono dal tempo;

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $\psi(x)$ rappresentato dalla seguente funzione d'onda (non normalizzata):

$$\psi(x,0) = \phi_1(x) - \frac{1}{3}\phi_2(x)$$

con $\phi_{1,2}(x)$ le soluzioni stazionarie associate ai primi due livelli energetici della buca di potenziale infinita.

3. Determinare i possibili risultati di una eventuale misura di energia e calcolare $\langle H \rangle_{\psi(t)}$ per un generico istante di tempo $t \ge 0$;

4. Calcolare i valori di aspettazione $\langle X \rangle_{\psi(t)}$, $\langle P \rangle_{\psi(t)}$ per un generico istante di tempo $t \ge 0$; dire per quali valori di t si ha $\langle X \rangle_{\psi(t)} = 0$ e per quali valori di t si ha $\langle P \rangle_{\psi(t)} = 0$; cosa descrive il comportamento temporale dei valori medi ?

5. All'istante di tempo $t = \bar{t}$ si effettua una misura di parità (misura ideale di prima specie) che dà come risultato $\mathcal{P} = -1$. Determinare $\langle H \rangle_{\psi(t)}$, $\langle X \rangle_{\psi(t)}$ e $\langle P \rangle_{\psi(t)}$, per un generico istante di tempo $t > \bar{t}$. Dire se la misura è stata esotermica ($E(t > \bar{t}) < E(t < \bar{t})$) o endotermica ($E(t > \bar{t}) < E(t < \bar{t})$);

Considerate l'equazione di Schroedinger, relativa al caso $V_0 \neq 0$

6. Determinare le soluzioni stazionarie (normalizzate), $\tilde{\phi}_n(x)$ e le rispettive energie, $\tilde{E}_n$;

FACOLTATIVO

7. Supponiamo che al tempo $t = 2\,\bar{t}$ venga rimossa la buca di potenziale (i.e. $V(x) = 0$ $\forall x \in \mathcal{R}$). Descrivere *qualitativamente* l'evoluzione del sistema.

FORMULE UTILI

I seguenti integrali possono essere utili per i calcoli:

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\, x\, \phi_1(x)\, \phi_2(x) = \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 L \tag{1}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \phi_1(x)\, \frac{d}{dx}\phi_2(x) = -\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \phi_2(x)\, \frac{d}{dx}\phi_1(x) = \frac{8}{3L} \tag{2}$$