Introduzione alla QED: Esame Scritto – 18/06/2012

1 Campo Vettoriale Massivo

La Lagrangiana di interazione di un campo vettoriale massivo W, di carica q_w, con due fermioni f_1 e f_2 rispettivamente di carica q_1 e q_2 è data da:

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}_1 \gamma_L^\mu \psi_2 W_\mu + h.c. \right) ,$$

dove con $h.c.$ si intende il termine hermitiano coniugato. Si ricordi inoltre che un campo vettoriale massivo carico in termini degli operatori di creazione e distruzione è dato da:

$$W_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[a_{(\lambda)}(k)\, e^{-ik\cdot x} + b^\dagger_{(\lambda)}(k)\, e^{ik\cdot x} \right] \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \qquad , \qquad k = (\omega_k, \vec{k})$$

dove $\omega_k = \sqrt{M_W^2 + |\vec{k}|^2}$ e dove i vettori di polarizzazione $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ possono essere presi reali.

1. Si scriva esplicitamente il termine hermitiano coniugato della Lagrangiana;
2. Si attribuiscano le cariche q_1, q_2, q_w associate ai campi ψ_1, ψ_2 e W_μ in modo che la Lagrangiana $\mathcal{L}_W$ sia invariante per trasformazioni $U(1)$ globali;
3. Si derivi la regola di Feynman per il vertice $f_1 \overline{f}_2 W$ e si calcoli l'ampiezza di Feynman $\mathcal{M}$ per il processo $f_1 \overline{f}_2 \to f_1 \overline{f}_2$ (con $\overline{f}_2$ si intende l'antiparticella di tipo "2");
4. Siano p e q i momenti iniziali dei fermioni f_1 e $\overline{f}_2$ e si definisca $s = (p+q)^2$ l'energia totale del processo. Si consideri il limite di bassa energia in cui $M_W^2 \gg s$. Per semplicità si assuma $m_1 \neq 0$ e $m_2 = 0$. In questo limite si scriva esplicitamente $\mathcal{M}$ e si calcoli $|\overline{\mathcal{M}}|^2$;
5. Si calcoli la sezione d'urto differenziale $(d\sigma/d\Omega)_{CM}$ per il processo di scattering $f_1 \overline{f}_2 \to f_1 \overline{f}_2$ nel sistema del centro di massa;
6. Nel limite di bassa energia ci si può dimenticare della propagazione del bosone vettore massivo e scrivere una Lagrangiana (effettiva) di interazione fermionica. Si scriva tale Lagrangiana e si determini la costante di accoppiamento G_F in funzione di g e M_W e si dica se la teoria associata alla Lagrangiana effettiva è rinormalizzabile;

2 Trasformazioni Chirali

Una trasformazione chirale è una trasformazione che agisce nel modo seguente sugli spinori di Dirac:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \qquad (\text{con } \alpha \text{ reale})\,.$$

1. Si determini come trasforma sotto una trasformazione chirale il campo coniugato $\overline{\psi}$;
2. Si determini come trasforma sotto una trasformazione chirale $V_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$;
3. Si consideri la Lagrangiana di Dirac $\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi$ e si trovi per quale condizione é invariante sotto una trasformazione chirale;
4. Si calcoli la corrente di Noether associata alla trasformazione chirale;
5. Si mostri esplicitamente per quale condizioni la corrente di Nother è conservata ($\partial_\mu j^\mu = 0$).