Introduzione alla QED: Prova Parziale 09/05/2012

1 Campo Scalare - Commutatori Covarianti

Sia $\phi(x) = \phi_+(x) + \phi_-(x)$ l'operatore di campo scalare hermitiano libero. Con $\phi_+(x)$ e $\phi_-(x)$ si intendono ripettivamente le componenti ad energia positiva e negativa:

$$\phi_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\, a(\vec{k})\, e^{-ik\cdot x} \qquad , \qquad \phi_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\, a^\dagger(\vec{k})\, e^{ik\cdot x} \ .$$

Negli integrali si sottointende la condizione $k^0 = \omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$.

1. Si calcolino i commutatori covarianti (i.e. a tempi generici)

   $$D_+(x-y) = [\phi_+(x), \phi_-(y)] \qquad , \qquad D_-(x-y) = [\phi_-(x), \phi_+(y)];$$

   e si dimostri che se l'intervallo $(x-y)$ é di tipo spazio allora $D_+(x-y) = -D_-(x-y)$.

2. Si dimostri che le funzioni $D_\pm(z)$ possono essere riscritte come

   $$D_\pm(z) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_\pm} d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot z}}{k^2 - m^2}$$

   su opportuni circuiti $C_\pm$ (nel piano complesso k_0) che contengono il polo $k^0 = \pm\omega_k$.

3. Definendo $D(z) = D_+(z) + D_-(z)$ e $D_F(z) = \theta(z^0)D_+(z) - \theta(-z^0)D_-(z)$ si calcolino $(\Box_z + m^2)D(z)$ e $(\Box_z + m^2)D_F(z)$;

4. **Facoltativo**: Si consideri la funzione $D_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]$. Si scriva $D_R(x-y)$ in termini di $D_\pm(x-y)$. Si determini poi il circuito C_R nel piano complesso k^0 per cui si ha

   $$D_R(z) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_R} d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot z}}{k^2 - m^2}$$

   e si calcoli $(\Box_z + m^2)D_R(z)$.

2 Spinori di Dirac

Sia k il quadrivettore associato ad un fermione di massa m (i.e. $k = (\omega_k, \mathbf{k})$, $k^2 = m^2$).

1. Si verifichino le seguenti propietá dei proiettori $\Lambda_\pm(k) = (\pm\not{k} + m)/2m$:

   $$\Lambda_\pm(k)^2 = \Lambda_\pm(k) \quad , \quad \Lambda_+(k)\,\Lambda_-(k) = 0 \quad , \quad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = \mathbb{1} \quad , \quad \mathrm{Tr}[\Lambda_\pm] = 2$$

2. Sia $u(\mathbf{k})$ lo spinore di Dirac di energia positiva:

$$u_r(\mathbf{k}) = (\omega_k + m)^{1/2} \begin{pmatrix} \xi_r \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{k}}{\omega_k+m}\xi_r \end{pmatrix} .$$

   Si verifichi che $\bar{u}_s(k)u_r(k) = 2m\,\delta_{sr}$.

3. Si verifichi inoltre che il proiettore $\Lambda_+(k)$ si può scrivere come:

$$\Lambda_+(k) = \frac{1}{2m}\sum_r u_r(k)\bar{u}_r(k) .$$

4. Senza usare una rappresentazione esplicita delle matrici γ si dimostri che vale la seguente indentità (si ricordi che $\hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$):

$$\bar{v}(p)\gamma^\mu v(k) = -\frac{1}{2m}\bar{v}(p)\left[(p+k)^\mu + i\hat{\sigma}^{\mu\nu}(p-k)_\nu\right]v(k) .$$

3 Campo Vettoriale Massless

Data la Lagrangiana di un campo vettoriale (massless)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

1. Dimostrare che per $\xi = 1$ la densità Lagrangiana si puó scrivere come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + (4 \text{ divergence})$$

2. Utilizzando il procedimento del punto precedente determinare l'equazione del moto per A^μ ed il momento coniugato π^μ (nel caso generale $\xi \neq 1$);

3. Sia $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ l'operatore differenziale associato all'equazione del moto ($\xi \neq 1$) e si indichi con

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\widetilde{G}_{\mu\nu}(k)e^{-ik\cdot z}$$

   la generica funzione di Green associata all'operatore differenziale $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Si determini $\widetilde{G}_{\mu\nu}(k)$ (per esempio utilizzando la prescrizione $+i\epsilon$). [Traccia: la funzione di Green soddisfa $\mathcal{D}_\mu{}^\nu G_{\nu\rho}(z) = i\eta_{\mu\rho}\delta^4(z)$, si noti che $\widetilde{G}_{\mu\nu}(k)$ é un tensore simmetrico in (μ,ν) (funzione solo di k), e quindi si puo' scrivere come combinazione lineare di tutti i possibili tensori simmetrici con due indici, quali sono ? ...]