Introduzione alla QED: II Prova Parziale – 12/06/2012

1 Visuale di Interazione

Sia $H_S = H_S^{(0)} + H_S^{(int)}$ l'Hamiltoniano totale (libero + interazione) di un sistema conservativo nella visuale di Schrödinger (VS). Si indichino con $|\psi(0)\rangle$ e $\Phi(0)$ i valori a $t = 0$ di un generico stato e di un generico operatore (non dipendente esplicitamente dal tempo). L'evoluzione temporale di stati ed operatori in VS è definita da:

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \qquad , \qquad \Phi_S(t) = \Phi(0) \qquad \text{(VS)}$$

La visuale di Heisemberg (VH) e la visuale di Interazione (VI) sono definite a partire dalla VS tramite le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} |\psi_H(t)\rangle &= U^\dagger(t)|\psi_S(t)\rangle \qquad , \qquad \Phi_H(t) = U^\dagger(t)\,\Phi_S(t)\,U(t) \qquad \text{(VH)} \\ |\psi_I(t)\rangle &= U_0^\dagger(t)|\psi_S(t)\rangle \qquad , \qquad \Phi_I(t) = U_0^\dagger(t)\Phi_S(t)U_0(t) \qquad \text{(VI)} \end{aligned}$$

dove $U(t)$ e $U_0(t)$ sono operatori unitari definiti da:

$$U(t) = e^{-iH_S t} \qquad , \qquad U_0(t) = e^{-iH_S^{(0)} t} \qquad .$$

1. Si spieghi come mai $H^H(t) = H^S$ e $H^I_{(0)}(t) = H^S_{(0)}$;
2. Si derivino le equazioni per l'evoluzione temporale di $|\psi_I(t)\rangle$ e $\Phi_I(t)$;
3. Si definisca l'operatore di evoluzione temporale: $U_I(t, t_0) = U_0^\dagger(t)\,U(t - t_0)\,U_0(t_0)$. Si dimostri che $U_I(t, t_0)$ soddista alle seguenti propietá: i) é un operatore unitario; ii) $U_I(t, t_0) = U_I^\dagger(t_0, t)$; iii) $U_I(t_1, t_2)\,U_I(t_2, t_3) = U_I(t_1, t_3)$;
4. Si definisca $U_I'(t)$ la trasformazione unitaria che relaziona VI con VH: $|\psi_I(t)\rangle = U_I'(t)|\psi_H(t)\rangle$. Si determini $U_I'(t)$ in funzione di $U(t)$ e $U_0(t)$, si ricavi la corrispondente equazione di evoluzione temporale e si scriva la soluzione di tale equazione differenziale.

2 Invarianza Gauge e Campo Scalare

Si consideri la Lagrangiana di un campo scalare complesso:

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi)$$

con V un generico potenziale funzione di $\phi^\dagger \phi$.

1. Si dimostri che $\mathcal{L}_\phi$ ha una simmetria $U(1)$ globale;
2. Si determini la densità di Lagrangiana di interazione con il potenziale elettromagnetico A_μ imponendo l'invarianza per traformazioni di gauge $U(1)$ (locali):
$$\phi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\phi(x) \qquad , \qquad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$
3. Si disegnino i possibili diagrammi di Feynman (all'ordine q^2) per lo scattering $\phi + \gamma \to \phi + \gamma$;
4. Assumendo $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$, si scrivano le regole di Feynman per tutti i possibili vertici di interazione scalare–fotone.

3 Campo Vettoriale Massivo Neutro

Si consideri la seguente Lagrangiana di interazione tra un campo vettoriale massivo neutro Z e un fermione f (per semplicità si consideri un fermione con carica elettrica $q_f = 0$):

$$\mathcal{L}_Z = g_Z \overline{\psi} \left(c_L \gamma_L^\mu + c_R \gamma_R^\mu \right) \psi Z_\mu \,.$$

1. Dati $c_{L,R}$ reali, si dica se g_Z può essere complesso;
2. Si derivi la regola di Feynman per il vertice ffZ e si calcoli l'ampiezza di Feynman $\mathcal{M}$ per il processo $f\overline{f} \to f\overline{f}$ (con $\overline{f}$ si intende l'antiparticella);
3. Siano p e q i momenti iniziali dei fermioni f e $\overline{f}$ e si definisca $s = (p+q)^2$. Si consideri il limite di bassa energia in cui $M_Z^2 \gg s$. Per semplicità si assumano $m_f = 0$ e $c_R = 0$. Si scriva esplicitamente $\mathcal{M}$ in questo limite e si calcoli $|\overline{\mathcal{M}}|^2$;
4. Nel limite di bassa energia, visto nel punto precedente, ci si può dimenticare dell'esistenza del bosone vettore massivo e scrivere una Lagrangiana (effettiva) di interazione fermionica. Si scriva tale Lagrangiana e si determini la costante di accoppiamento G_Z in funzione di g_Z e M_Z e si dica se la teoria associata alla Lagrangiana effettiva è rinormalizzabile.