Introduzione alla QED: Esame Scritto – 24/06/2013

1 Spinori di Dirac

1. Sia n_μ un quadriversore di tipo spazio, $n^2 = -1$. Si dimostri che

$$P(n) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} \qquad , \qquad P(-n)$$

   formano una base di proiettori ortogonali nello spazio degli spinori di Dirac.

2. Dato $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$, con $\omega_k = (m^2 + |\vec{k}|^2)^{1/2}$, si dimostri che

$$\Lambda_+(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \qquad , \qquad \Lambda_-(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}$$

   formano una base di proiettori ortogonali nello spazio degli spinori di Dirac. Si determini inoltre la condizione per cui $\Lambda_\pm(k)$ commutano con $P(n)$ definiti nel punto precedente.

3. Si indichino con $u_\alpha(k)$ gli spinori soluzioni dell'equazione di Dirac con energia positiva. Dato $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$, con $\omega_k = (m^2 + |\vec{k}|^2)^{1/2}$, si determini la funzione $w^\mu(k)$ per cui vale:

$$\overline{u}_\alpha(k) \gamma^\mu u_\beta(k) = w^\mu(k) \delta_{\alpha\beta}$$

2 Invarianza di Gauge e Lagrangiana Effettiva di QED

Si consideri la Lagrangiana di una teoria di cui la QED rappresenta il limite di bassa energia. Tale Lagrangiana si può scrivere in maniera effettiva come:

$$\mathcal{L}_{QED}^{eff} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{NR}$$

dove con $\mathcal{L}_{QED}$ si intende la usuale Lagrangiana di QED (rinormalizzabile):

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \overline{\psi} \left(i \not{D} - m_\psi \right) \psi$$

e con $\mathcal{L}_{NR}$ tutti gli operatori di dimensione $D > 4$ che si possono scrivere utilizzando i soli campi della QED: ψ e A_μ. Con D_μ si intende la derivata covariante $D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi$.

1. Si derivino esplicitamente le propietà di trasformazione di $D_\mu \psi$ rispetto ad una trasformazione di gauge $U(1)$ (locale)

$$\psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)} \psi(x) \qquad , \qquad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

   e si verifichi che $\mathcal{L}_{QED}$ è invariante per trasformazioni gauge;

2. Si derivino esplicitamente le equazioni del moto per il campo ψ (in QED);

3. Si dimostri che vale la seguente identità:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = iqF_{\mu\nu} \psi$$

4. Si dimostri che la Lagrangiana piú generale di dimensione $D = 5$, che si può ottenere partendo dai campi della QED ed assumendo l'ipotesi di invarianza gauge è data da:

$$\mathcal{L}_{NR}^{5D} = \frac{c_1}{\Lambda} \overline{\psi}\, D^\mu D_\mu \psi + i \frac{c_2}{\Lambda} \overline{\psi}\, \sigma_{\mu\nu}\, \psi\, F^{\mu\nu}$$

con c_1, c_2 sono coefficienti reali di $\mathcal{O}(1)$ e Λ una generica scala di massa molto maggiore di tutte le scale in gioco: $\Lambda \gg (m_\psi, \sqrt{s})$.

5. Si disegnino tutte le regole di Feynman associate alla Lagrangiana di interazione $\mathcal{L}_{NR}^{5D}$ e si discuta brevemente il loro impatto sulla fisica della QED (ovvero come modificano questi nuovi vertici le quantità conosciute della QED? Fate almeno un esempio ...);

6. Nel limite in cui $\Lambda \gg (m_\psi, \sqrt{s})$ le equazioni del moto per il campo di Dirac si possono approssimare alle equazioni del moto della QED derivate nel punto 2. Si dimostri che in questo limite gli operatori associati ai coefficienti c_1, c_2 non sono indipendenti (i.e. "quadrando" opportunamente l'equazione di Dirac della QED si dimostri che esiste una relazione che lega $D^\mu D_\mu$ e $F_{\mu\nu}$).

NB: I risultati discussi a lezione (o presenti sui libri di testo) vanno debitamente discussi e motivati