Introduzione alla QED: Esame Scritto – 11/07/2013

1 Decadimento del pione in fermioni

Si consideri la seguente Lagrangiana che descrive l'interazione di un campo scalare complesso ϕ di massa m_π (che penseremo associato al pione) con un fermione massivo ψ_l di massa m_l (che penseremo associato ad un elettrone o ad un muone) ed un fermione massless ψ_{ν_l} (che penseremo associato ad un neutrino elettronico o muonico):

$$\mathcal{L}_{int}^{\pi} = \kappa_\pi \, \overline{\psi}_l \, \gamma^\mu \, (a + b\gamma_5) \, \psi_{\nu_l} \, (\partial_\mu \phi) \; + \; \text{h.c.}$$

dove κ_π è un parametro reale e a e b sono due parametri in generale complessi. Con h.c. si intende il termine hermitiano coniugato. Si assuma $m_\pi > (m_\mu, m_e)$ e $m_{\nu_l} = 0$.

1. Si scriva esplicitamente il termine hermitiano coniugato della Lagrangiana;

2. Si determini la carica elettrica della particella associata al campo ϕ in modo che l'interazione $\mathcal{L}_{int}^{\pi}$ conservi la carica elettrica. Inoltre, assumendo che ϕ sia un campo pseudoscalare, si discuta l'invarianza (o meno) di $\mathcal{L}_{int}^{\pi}$ per trasformazioni di parità, a seconda dei possibili valori di a, b;

3. Assumendo $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$, si derivi la regola di Feynman per l'interazione in esame;

4. Si calcolino le ampiezza di Feynman per il decadimento $\pi^- \to l^- + \overline{\nu}_l$ e per il decadimento coniugato di carica $\pi^+ \to l^+ + \nu_l$.

5. Si calcoli la frequenza di decadimento non polarizzata $\Gamma\left[\pi^- \to l^- + \overline{\nu}_l\right]$ nel sistema di riferimento in cui il pione è a riposo. Per semplicità si può considerare il caso $a = -b = 1$; Senza ulteriori calcoli potete stimare la frequenza di decadimento del processo coniugato di carica?

6. Utilizzando $m_\pi \approx 150$ MeV, $m_\mu \approx 100$ MeV e $m_e \approx 0.5$ MeV si stimi il rapporto

$$R = \frac{\Gamma\left[\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e\right]}{\Gamma\left[\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu\right]}$$

   e si discuta il motivo fisico per cui il decadimento in elettrone è soppresso quando invece dovrebbe essere cinematicamente favorito.

7. **FACOLTATIVO** Si consideri uno spinore $u_L(k) = P_L u(k)$ associato ad una particella di massa $m \ll E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$. Si dimostri che al primo ordine in m/k lo spinore $u_L(k)$ si può scrivere come:

$$u_L(k) = c_k \Pi_-(k) \, u(k) + \mathcal{O}(m/k)$$

   dove

$$\Pi_-(k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - 2\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{k}}{|\vec{k}|}\right) \qquad , \qquad \vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} .$$

   Si determini il coefficiente c_k (al primo ordine in $m/|\vec{k}|$);

NB: I risultati discussi a lezione (o presenti sui libri di testo) vanno debitamente discussi e motivati

2 Risultati

5. L'ampiezza di Feynman (sommando sulle polarizzazioni iniziali e finali) è data da:

$$\overline{|\mathcal{M}|}^2 = 2k_\pi^2 \left(|a|^2 + |b|^2\right) \left(m_\pi^2 - m_e^2\right) m_e^2$$

da cui utilizzando le formule viste a lezione è immediato ricavare l'ampiezza di decadimento.

6. Dal risultato del punto precedende è immediato stimare il rapporto:

$$R = \frac{\Gamma\left[\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e\right]}{\Gamma\left[\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu\right]} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)} \approx 10^{-5}$$

7. Utilizzando le propietà viste a lezione sui proiettori di elicità e chiralità uno ottiene:

$$u_L(k) = \frac{1}{\sqrt{1 + m/|\vec{k}|}} \Pi_-(k)\, u(k) + \mathcal{O}(m/|\vec{k}|)$$