Appunti sul potenziale vettore

A differenza del campo elettrico $\vec{E}$, prodotto dalle cariche elettriche, il campo magnetico $\vec{B}$ è prodotto soltanto dalle cariche in movimento, cioè dalle correnti. Mentre per il campo elettrico è quindi possibile osservare il campo prodotto da una carica distribuita in un volume molto piccolo, al limite puntiforme, non è viceversa possibile osservare il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo di corrente. Per la conservazione della carica elettrica, infatti, è necessario che quest'ultima arrivi al conduttore percorso da corrente e se ne allontani poi; esistono quindi sempre altre correnti che producono a loro volta un campo magnetico e solo il campo complessivo risulta osservabile.

La legge che lega il campo magnetico alla corrente che lo produce è la legge di Ampère: essa afferma che la circuitazione del campo magnetico lungo un qualsiasi percorso chiuso è proporzionale alla somma algebrica delle correnti concatenate con il percorso, con i segni determinati in base alla "regola della mano destra".

$$C(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \Sigma i_{\text{conc}}$$

Tale legge ha, per i campi magnetici, la stessa importanza che la legge di Gauss ha per i campi elettrici e come questa può essere espressa in forma differenziale. Il rapporto tra la circuitazione e la superficie racchiusa è, per superfici infinitesime, il rotore del campo; il rapporto tra la corrente e la superficie diventa poi la densità di corrente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

La divergenza del campo magnetico risulta invece sempre nulla, non esistendo monopoli magnetici:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Per i campi magnetici si verifica quindi una situazione opposta a quella che si verifica per i campi elettrostatici: questi ultimi sono conservativi, e quindi hanno rotore nullo e si possono esprimere come gradiente di un potenziale, mente non è nulla la divergenza:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Sostituendo l'espressione del campo elettrico come gradiente del potenziale nella seconda relazione si ottiene:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Analogamente si può dimostrare che un campo a divergenza nulla può essere espresso come rotore di un altro campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Sostituendo nella legge di Ampère in forma differenziale e sviluppando le derivate si ottiene allora:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Il campo $\vec{A}$ viene chiamato "potenziale vettore" ed è definito a meno di una funzione vettoriale arbitraria, purché esprimibile come gradiente di una funzione; sostituendo infatti al campo $\vec{A}$ il campo $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ e ricordando che il rotore di un gradiente è sempre nullo si ottiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{A'} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Questa arbitrarietà consente di imporre al campo $\vec{A}$ la condizione di avere divergenza nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

La legge di Ampère diventa allora:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

L'operazione di derivazione viene applicata alle tre componenti A_x, A_y, A_z per ottenere le tre componenti della densità di corrente:

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 j_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}$$

$$\nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_0 j_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}$$

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0 j_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}$$

Le tre equazioni cosí trovate sono analoghe all'equazione che lega il potenziale elettrostatico alla carica elettrica:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poiché le equazioni hanno la stessa forma, anche le soluzioni hanno la stessa forma:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\tau$$

$$A_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x}{r} d\tau$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_y}{r} d\tau$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_z}{r} d\tau$$

Sostituendo infine il potenziale vettore $\vec{A}$ nella relazione che dà il campo magnetico $\vec{B}$ ed eseguendo le derivate si ottiene infine la prima legge elementare di Laplace:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j} \times \vec{u}}{r^2} d\tau$$