Oscillazioni smorzate

Un circuito costituito da un induttore, un condensatore ed una resistenza si trova in condizioni di equilibrio quando, ovvimente, sono nulle sia la carica del condensatore che la corrente nel circuito stesso. Se invece nel condensatore è immagazzinata una carica q e/o il circuito è percorso da una corrente i entrambe le grandezze non sono costanti ma evolvono nel tempo, analogamente a quanto accade in un circuito RC o RL , nei quali la carica e la corrente, rispettivamente, variano nel tempo fino a raggiungere le condizioni di equilibrio dopo un certo tempo.

Per trovare la funzione matematica che dà la carica sul condensatore (e quindi, per derivazione, la corrente) in funzione del tempo è necessario partire dalla legge di Kirchhoff che lega la corrente alla f.e.m. nel circuito:

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} = Ri + V_C$$

dove V_C è la differenza di potenziale ai capi del condensatore, ed è data da

$$V_C = \frac{q}{C}$$

mentre la corrente è data dalla derivata della carica rispetto al tempo:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

L'equazione completa diventa quindi

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

Per brevità vengono poi definiti due parametri, dimensionalmente pari al reciproco di un tempo, γ e ω_0 :

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

in modo da esprimere l'equazione in forma più compatta:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

La soluzione di una tale equazione, lineare con coefficienti costanti, è data da una combinazione lineare di termini del tipo

$$q(t) = Ae^{\lambda t}$$

le cui derivate sono date da

$$\frac{dq}{dt} = \lambda Ae^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

Sostituendo nell'equazione e semplificando si ottiene quindi una equazione algebrica:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

la cui soluzione è

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ovviamente a questo punto si devono considerare i vari casi, in cui il parametro γ è maggiore, uguale o minore di ω_0 .

Nel primo caso, con $\gamma > \omega_0$ corrispondente ad uno "smorzamento forte", le soluzioni sono entrambe reali e negative; la funzione $q(t)$ quindi è data dalla combinazione di due esponenziali:

$$q(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

dove A e B dipendono dalle condizioni iniziali.

Nel secondo caso, con $\gamma = \omega_0$ corrispondente ad uno "smorzamento critico", si ha una soluzione doppia $\lambda = -\gamma = -\omega_0$ e la funzione $q(t)$ assume la forma:

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

In questo caso si ha che il sistema raggiunge le condizioni di equilibrio nel tempo piú breve possibile.

Nel terzo caso, con $\gamma < \omega_0$ corrispondente ad uno "smorzamento debole", si hanno due soluzioni complesse coniugate, con parte reale data da $-\gamma$ e parte immaginaria data da $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. La combinazione lineare di esponenziali di grandezze immaginarie corrisponde alla combinazione lineare di funzioni trigonometriche seno e coseno, la funzione $q(t)$ quindi viene espressa nella forma

$$q(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

oppure

$$q(t) = Ke^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

In questo caso, quindi, si hanno oscillazioni con pulsazione ω , tanto piú vicina ad ω_0 quanto minore è γ , ed ampiezza decrescente in modo esponenziale. La corrente è data dalla derivata della carica rispetto al tempo:

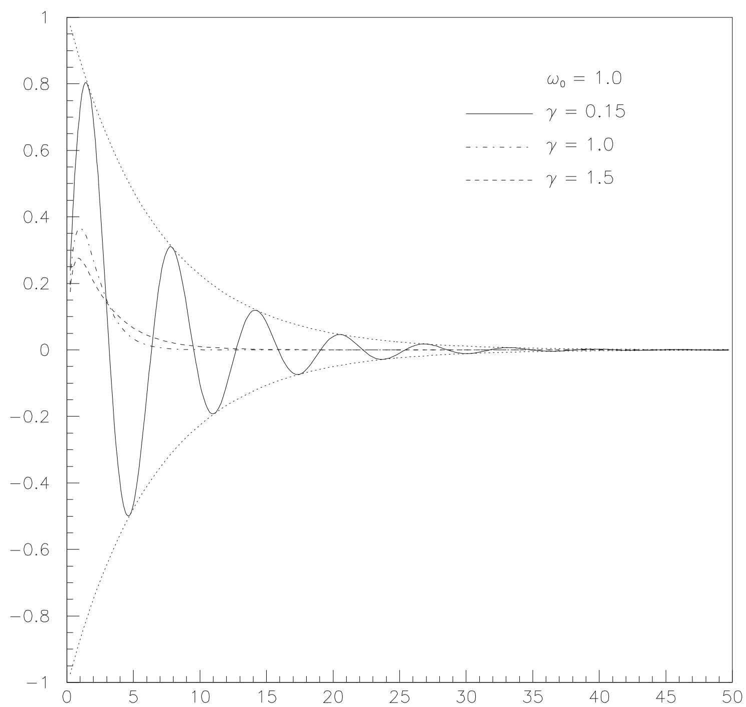
$$i(t) = -\gamma Ke^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) - \omega Ke^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

che, nel caso in cui $\gamma \ll \omega_0$ e quindi $\omega \simeq \omega_0$, si può approssimare con:

$$i(t) \simeq -\omega_0 K e^{-\gamma t} \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

I parametri A e B (oppure K e φ) dipendono dalle condizioni iniziali, per esempio carica e corrente all'istante $t = 0$.

La rappresentazione grafica delle tre funzioni è mostrata in figura, per una pulsazione $\omega_0 = 1.0$; nel caso dello smorzamento debole è tracciato anche, con linea punteggiata, il grafico dell'esponenziale $e^{-\gamma t}$.



L'energia contenuta nel sistema è data dalla somma dell'energia contenuta nel condensatore e nell'induttore, e per smorzamento molto piccolo ($\gamma \ll \omega_0$) oscilla tra l'uno e l'altro; poiché entrambe dipendono dal quadrato dell'ampiezza:

$$U_e = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{K^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega t + \varphi)}{C}$$

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 \simeq \frac{1}{2} L \omega_0^2 K^2 e^{-2\gamma t}\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\frac{K^2 e^{-2\gamma t}\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)}{C}$$

si ha che nella somma le componenti oscillanti scompaiono:

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{2}\frac{K^2 e^{-2\gamma t}}{C}\left(\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right) = \frac{1}{2}\frac{K^2 e^{-2\gamma t}}{C}$$

Nel tempo l'energia totale diminuisce, a causa delle dissipazioni, con andamento esponenziale

$$U = U_0 e^{-2\gamma t}$$

e l'energia dissipata in un ciclo è pari a

$$\Delta U = \left|\tau \frac{dU}{dt}\right| = \left|\frac{2\pi}{\omega}\frac{dU}{dt}\right| = \left|-\frac{4\pi\gamma}{\omega} U_0 e^{-2\gamma t}\right| = \frac{4\pi\gamma}{\omega} U$$

Nel caso che lo smorzamento sia molto piccolo, con $\gamma \ll \omega_0$, l'energia totale U può essere inoltre considerata approssimativamente costante durante un ciclo, sicché può essere definito il rapporto tra essa e l'energia (piccola) ΔU dissipata durante il ciclo stesso; tale rapporto, moltiplicato per 2π , viene chiamato "fattore di qualità" ed indicato con il simbolo Q:

$$Q = \frac{2\pi U}{\Delta U} = \frac{\omega}{2\gamma} \simeq \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Oscillazioni forzate

Se il circuito RLC viene connesso in serie ad un generatore che fornisce una tensione sinusoidale

$$V_G = V_0 \cos \omega_E t$$

l'equazione che dà la carica ai capi del condensatore viene modificata con l'aggiunta di un termine:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{V_0}{L} \cos \omega_E t$$

La soluzione, in questo caso, è data dalla somma della soluzione trovata precedentemente e di un termine oscillante con la frequenza del generatore; poiché il primo termine ha un andamento esponenziale decrescente esso si annulla dopo un certo tempo e a regime la carica $q(t)$ può essere rappresentata dalla sola funzione

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_E t + \varphi_E)$$

Bisogna notare che in questo caso i parametri q_0 e φ_E risultano fissati, poiché l'effetto (transiente) delle condizioni iniziali scompare con la decrescita esponenziale della soluzione trovata in precedenza. Per determinare i due parametri è necessario calcolare le derivate prima e seconda di $q(t)$ e sostituire le espressioni trovate nell'equazione differenziale:

$$-\omega_E^2 q_0 \cos(\omega_E t + \varphi_E) - 2\gamma\omega_E q_0 \operatorname{sen}(\omega_E t + \varphi_E) + \omega_0^2 q_0 \cos(\omega_E t + \varphi_E) = \frac{V_0}{L} \cos \omega_E t$$

e sviluppare i fattori $\cos(\omega_E t + \varphi_E)$ e $\operatorname{sen}(\omega_E t + \varphi_E)$ con le usuali formule:

$$\operatorname{sen}(\omega_E t + \varphi_E) = \operatorname{sen} \omega_E t \cos \varphi_E + \cos \omega_E t \operatorname{sen} \varphi_E$$

$$\cos(\omega_E t + \varphi_E) = \cos \omega_E t \cos \varphi_E - \operatorname{sen} \omega_E t \operatorname{sen} \varphi_E$$

Imponendo che l'equazione sia soddisfatta per ogni istante t si trovano le due equazioni:

$$-\omega_E^2 q_0 \cos\varphi_E - 2\gamma\omega_E q_0 \operatorname{sen}\varphi_E + \omega_0^2 q_0 \cos\varphi_E = \frac{V_0}{L}$$

$$\omega_E^2 q_0 \operatorname{sen}\varphi_E - 2\gamma\omega_E q_0 \cos\varphi_E - \omega_0^2 q_0 \operatorname{sen}\varphi_E = 0$$

da cui si ricava:

$$\tan\varphi_E = \frac{2\gamma\omega_E}{\omega_E^2 - \omega_0^2} = \frac{R}{\omega_E L - \frac{1}{\omega_E C}}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_E = \frac{-2\gamma\omega_E}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_E)^2}} \quad ; \quad \cos\varphi_E = \frac{\omega_0^2 - \omega_E^2}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_E)^2}}$$

$$q_0 = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_E)^2}}$$

La derivata della funzione $q(t)$ dà la corrente $i(t)$; anch'essa ha un andamento sinusoidale con pulsazione ω_E , ampiezza i_0 e fase φ'_E : in questo caso le espressioni che danno i_0 e φ'_E risultano diverse, anche se simili, da quelle riportate sopra.

L'ampiezza q_0 risulta massima quando la pulsazione del generatore è uguale alla pulsazione propria del circuito ed il sistema si trova, quindi, in condizioni di "risonanza"; quando $\omega_E = \omega_0$ si ha infatti:

$$q_{max} = \frac{V_0/L}{2\gamma\omega_E}$$

l'ampiezza si riduce ad un valore pari al valore massimo diviso $\sqrt{2}$ quando i due termini quadri a denominatore diventano uguali:

$$\omega_E^2 - \omega_0^2 = \pm 2\gamma\omega_E$$

e quindi

$$\omega_E - \omega_0 = \pm\frac{2\gamma\omega_E}{\omega_E + \omega_0}$$

Quando $\gamma \ll \omega_0$ anche $\omega_E - \omega_0$ è piccolo e quindi $\omega_E \simeq \omega_0$, sicché $\omega_E + \omega_0 \simeq 2\omega_0$, da cui:

$$\omega_E - \omega_0 = \pm\frac{2\gamma\omega_E}{2\omega_0} \simeq \pm\gamma = \pm\frac{\omega_0}{2Q}$$

La "larghezza" della risonanza è quindi pari alla frequenza propria del sistema divisa per il fattore di qualità Q , e quindi proporzionale alla resistenza.