

Metodo simbolico

Il “metodo simbolico” permette di semplificare significativamente la descrizione dei circuiti lineari in corrente alternata, e di determinarne il comportamento per via algebrica anziché mediante la soluzione di equazioni differenziali. Una tensione (o una corrente) alternata sinusoidale è infatti descritta dalla funzione

$$V = V_0 \cos(\omega t)$$

che risulta pari alla parte reale della funzione complessa

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

il cui uso risulta conveniente quando nel circuito sono introdotti elementi lineari reattivi e non puramente resistivi, quali condensatori ed induttori. Per un condensatore, infatti, la corrente entrante è pari alla derivata della carica, a sua volta proporzionale alla differenza di potenziale V :

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} = -\omega C V_0 \sin(\omega t)$$

Tensione e corrente non sono quindi proporzionali tra loro, a differenza di quanto avviene per i resistori che obbediscono alla legge di Ohm $V = RI$; la proporzionalità può essere però recuperata utilizzando la funzione complessa esponenziale:

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C V = \frac{V}{Z_C}$$

Al condensatore può quindi venire attribuita una “impedenza” Z_C data da:

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

che permette di collegare tensione e corrente in modo del tutto analogo a quanto avviene con la resistenza nella legge di Ohm:

$$V = ZI$$

ricordando che le tensioni e le correnti fisiche sono sempre date dalla parte reale delle corrispondenti grandezze complesse.

Lo stesso procedimento può essere applicato agli induttori, la tensione ai capi dei quali è data dalla legge dell'induzione:

$$V = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} = i\omega L I = Z_L I$$

L'impedenza di un induttore è quindi data da

$$Z_L = i\omega L$$

L'impedenza di un resistore, infine, è semplicemente pari alla sua resistenza:

$$Z_R = R$$

Le impedenze possiedono le stesse proprietà di combinazione delle resistenze, e quindi impedenze in serie ed in parallelo si possono esprimere come:

$$Z_s = Z_1 + Z_2 \quad ; \quad Z_p = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

L'impedenza di un resistore è dunque reale, mentre l'impedenza di un condensatore o un induttore è puramente immaginaria; nel caso di più componenti connessi tra loro l'impedenza equivalente risulta in genere composta sia da una parte reale che da una parte immaginaria, ed è esprimibile nella forma

$$Z = |Z|e^{i\phi}$$

che può essere sostituita nella relazione $V = ZI$. In tal modo si ottiene:

$$V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = V = ZI = |Z|e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t}$$

e quindi

$$V_0 = |Z|I_0 \quad ; \quad \tan \phi = \frac{Im(Z)}{Re(Z)}$$

Queste relazioni mostrano come il modulo dell'impedenza sia pari al rapporto tra la tensione di picco V_0 e la corrente di picco I_0 (o tra i rispettivi valori efficaci), mentre lo sfasamento tra tensione e corrente è pari all'arcotangente del rapporto tra le parti immaginaria e reale dell'impedenza.

Ciò può essere utilizzato anche nell'espressione della potenza media dissipata in un circuito:

$$P_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = I_{\text{eff}}^2 |Z| \cos \phi = I_{\text{eff}}^2 Re(Z)$$

Un semplice esempio è dato dal circuito RC passa-basso in cui una resistenza ed una capacità sono connesse in serie tra loro ed in serie con un generatore di tensione sinusoidale V_G ; la tensione ai capi del condensatore può essere determinata in modo analogo con quanto avviene per il partitore resistivo:

$$V_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} V_G = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} V_G = \frac{1}{1 + i\omega RC} V_G = \frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} V_G$$

Il rapporto tra le tensioni di picco ai capi del condensatore e generatore è data dal modulo del fattore così trovato, mentre il rapporto tra parte immaginaria e parte reale dà la tangente dello sfasamento:

$$\frac{V_{0C}}{V_{0G}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad ; \quad \tan \phi = -\omega RC$$

Un altro esempio è dato dal circuito RLC in cui una resistenza, una capacità ed una induttanza sono connesse in serie; l'impedenza complessiva è quindi data da:

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

e da essa si possono ricavare la corrente di picco e lo sfasamento:

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad ; \quad \tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

La potenza media dissipata è data semplicemente da:

$$P = I_0^2 \operatorname{Re}(Z) = RI_0^2$$

Condensatore ed induttore, infatti, non dissipano energia ma soltanto la accumulano al loro interno per rilasciarla in istanti successivi.