

Formulario di Fisica 1. Per studenti lavoratori di Ingegneria.
AA 2006-2007.

Parte 1. Cinematica 1D.

In un moto rettilineo (lungo l'asse x) si definisce

velocità media: $\langle v \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{spostamento}}{\text{tempo trascorso}}$ da cui $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$

In un grafico x-t $\langle v \rangle$ è il *coefficiente angolare della retta* che congiunge i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2) .

velocità istantanea. $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ (derivata della posizione rispetto al tempo)

In un grafico x-t, v rappresenta il *coefficiente angolare della retta tangente* alla curva.

Invertendo: $\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int v(t) dt$

Nel S.I. la velocità si misura in m/s.

accelerazione media: $\langle a \rangle = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{variazione di velocità}}{\text{tempo trascorso}}$

accelerazione istantanea: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ (derivata della velocità risp. al tempo)

L'accelerazione si misura in m/s^2 .

Casi particolari. Nelle formule seguenti si intende che $t=0$ sia l'istante iniziale e l'indice 0 si riferisce a tale istante.

Moto uniforme (v costante, $a=0$). $x(t) = x_0 + vt$

Moto uniformemente accelerato ($a=\text{costante}$).
$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo si trova anche: $\Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$.

(spostamento fra l'istante iniziale in cui la velocità è v_1 e quello finale in cui è v_2).

Moto armonico (centrato sull'origine).

Si dice armonico un moto con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

dove A si chiama **ampiezza** del moto, ω è detto **frequenza ciclica** o **pulsazione**, $(\omega t + \varphi)$ è la **fase** e φ è lo **sfasamento** (o fase iniziale). Derivando:

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

La legge oraria si poteva scrivere anche nelle forme equivalenti

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

con le relative espressioni di $v(t)$ e $a(t)$.

Il moto armonico è un moto periodico, di **periodo** T tale che: $2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \omega$. Il periodo si misura in secondi. L'inverso del periodo si chiama **frequenza** ($\nu=1/T$) e si misura in $s^{-1}=Hz$.

Dal confronto fra $x(t)$ e $a(t)$ si ricava l'**equazione del moto armonico**: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$.

Parte 2. Vettori e operazioni vettoriali.

Vettore: grandezza dotata di ampiezza (o modulo), direzione e verso.

Nel piano x-y (caso 2D), un vettore $\mathbf{A}$ di componenti a_x, a_y , forma un angolo θ con l'asse x.

Allora:
$$\begin{cases} A = |\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan \theta = \frac{a_y}{a_x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_x = A \cos \theta \\ a_y = A \sin \theta \end{cases}$$

Somma di vettori. $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ è un vettore, si calcola con la regola del parallelogramma:



mediante le componenti cartesiane:
$$\begin{cases} s_x = a_x + b_x \\ s_y = a_y + b_y \end{cases} \quad (\text{in 3D anche } s_z = a_z + b_z)$$

Proprietà della somma:

Commutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

Associativa: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

Prodotto di uno scalare per un vettore: $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$. (è un vettore).

Vettore con la stessa direzione di $\mathbf{A}$, verso identico (se $k > 0$) o opposto ($k < 0$), modulo:

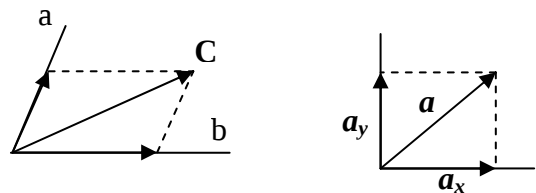
$|\mathbf{C}| = |k||\mathbf{A}|$ Componenti cartesiane:
$$\begin{cases} c_x = k a_x \\ c_y = k a_y \end{cases}$$

Opposto di un vettore: il vettore opposto di $\mathbf{A}$ è $(-1)\mathbf{A}$, o più brevemente $-\mathbf{A}$.

Versore: vettore di modulo uno. Ogni vettore si può scrivere come prodotto del suo modulo per il suo versore: $\vec{A} = A\vec{u}_A$.

Differenza di due vettori. Si riconduce alla somma: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

Scomposizione di un vettore lungo due rette date (a e b). Dato il vettore $\mathbf{C}$ e le due rette, trovare due vettori paralleli alle rette tali che la loro somma sia $\mathbf{C}$.



Se le rette sono ortogonali (es. assi cartesiani): $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$

Prodotto scalare fra due vettori. $\vec{A} \cdot \vec{B}$

Il risultato è uno scalare: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

Dove θ è l'angolo formato dai due vettori.

Il prodotto è nullo se $\theta=90^\circ$, >0 se $\theta<90^\circ$ e <0 se $\theta>90^\circ$.

Proprietà:

commutativa: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

distributiva rispetto alla somma: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Osservazione: il modulo quadrato di un vettore si può scrivere: $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$

Prodotto vettore fra due vettori (solo in 3D). $\vec{A} \times \vec{B}$

Il risultato è un vettore, di modulo pari a $AB \sin \theta$, direzione perpendicolare sia ad $\vec{A}$ che a $\vec{B}$, e verso dato dalla regola della mano destra (θ è l'angolo fra i due vettori).

Il prodotto vettore è nullo se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono paralleli ($\theta=0^\circ$ o 180°).

Proprietà **anticommutativa**: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

Proprietà *distributiva rispetto alla somma*: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

Parte 3. Cinematica 2D (e 3D).

Il moto del punto P si può descrivere mediante le coordinate x,y,z: è come avere 3 moti 1D x(t), y(t), z(t).

Nel formalismo vettoriale, la posizione è indicata dal **vettore posizione** $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Le formule sono dirette estensioni del caso 1D.

velocità media: $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

velocità istantanea: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v \vec{\tau}$ v è il modulo e $\vec{\tau}$ il versore tangente.

accelerazione media: $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

accelerazione istantanea: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Si può porre nella forma: $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$ dove

$a_T = \frac{dv}{dt}$ è l'**accelerazione tangente**

$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ è l'**accelerazione normale** o **centripeta** (R: "raggio di curvatura").

Moto dei proiettili. Descritto mediante le coordinate x(t), y(t) (y diretto in su). Osservando che il moto è uniforme lungo x, uniformemente accelerato lungo y con $a = -g$, la legge oraria si scrive:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases} \quad (\text{è l'espressione da ricordare})$$

Eliminando il tempo si ottiene l'equazione della traiettoria. Ponendo $x_0=y_0=0$:

$$y = \frac{v_{0Y}}{v_{0X}} x - \frac{g}{2v_{0X}^2} x^2 \quad \text{ovvero} \quad y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

la traiettoria è una parabola (θ : angolo fra la velocità iniziale e l'orizzontale o "alzo"). Alcuni parametri utili della traiettoria sono:

$$h_{MAX} = y_{MAX} = \frac{v_{0Y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \quad \text{altezza massima}$$

$$x_G = \frac{2v_{0X} v_{0Y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad \text{gittata su un piano orizzontale}$$

Moto circolare. La posizione si descrive mediante coordinate angolari e, di conseguenza, si introducono velocità e accelerazione angolare:

$$\text{velocità angolare media: } \langle \omega \rangle = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\text{angolo di rotazione}}{\text{tempo trascorso}}$$

$$\text{velocità angolare istantanea: } \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{accelerazione angolare media: } \langle \alpha \rangle = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\text{variazione di vel.angolare}}{\text{tempo trascorso}}$$

$$\text{accelerazione angolare istantanea: } \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

La velocità angolare si misura in rad/s, l'accelerazione angolare in rad/s².
 $s = R\theta$

Relazione fra grandezze angolari e lineari: $v = R\omega$.

$$a_T = R\alpha$$

L'accelerazione angolare è legata all'*accelerazione tangente*, non a quella normale.

L'accelerazione ha anche una componente normale o centripeta $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Moto circolare uniforme: ω costante. In tal caso $\omega = \langle \omega \rangle = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ dove T è il

periodo di rotazione e $\nu = \frac{1}{T}$ è la frequenza di rotazione. ν si misura in s⁻¹=Hz.

La legge oraria è: $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ inoltre $\vec{a}_T = 0$
 $\omega = \text{costante}$ $\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{n}$ **n** versore centripeto.

Moto circolare uniformemente accelerato: α costante.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 & a_T &= \alpha R \\ \omega(t) &= \omega_0 + \alpha t & a_N &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

Parte 4. Dinamica del "punto materiale".

1° Principio della Dinamica (1ª legge di Newton): In assenza di cause esterne (forze) un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

2° Principio della Dinamica (2ª legge di Newton): $\vec{F} = m\vec{a}$

- E' una legge vettoriale (sono 3 equazioni, lungo gli assi x, y e z).
- F è la forza totale agente sul corpo (somma vettoriale delle forze: risultante)

Definita la quantità di moto di un punto materiale $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ il 2° Principio si può formulare: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

La massa si misura in kg, la forza in Newton: $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$. L'unità di massa (kg) è una delle unità fondamentali del S.I.

3° Principio della Dinamica (3ª legge di Newton): $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

Se il corpo A subisce una forza $\mathbf{F}_A$ dovuta al corpo B, su B agisce una forza $\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A$ dovuta al corpo A ("principio di azione e reazione"). Si suppone che tali forze siano dirette lungo la congiungente AB.

Sono state trattate le seguenti forze.

1. **Reazione normale** di una superficie d'appoggio (N)
2. **Tensione di un filo** (T). In un filo ideale (non estensibile, di massa trascurabile) ha lo stesso valore (in modulo) in ogni punto del filo, ed è sempre tangente al filo.
3. **Attrito statico**: $0 \leq A_s \leq \mu_s N$ (μ_s : coeff. di attrito statico, N reazione normale).
L'attrito statico è in grado di opporsi ad una forza esterna F purché $F_{TANG} < \mu_s N$.
4. **Attrito dinamico**: $A_D = \mu_D N$ (μ_D : coeff. di attrito dinamico, tipicamente $< \mu_s$).
Ha verso opposto a quello del moto.
5. **Forza elastica** di una molla (ideale): $F = -kx$ (x: spostamento dalla pos. di riposo coincidente con l'origine)

a) Forza gravitazionale:

$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ forza fra le masse m_1 e m_2 a distanza r, $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$). Sempre

attrattiva. La traiettoria di un corpo in un campo di forza gravitazionale è un'ellisse, una parabola oppure un'iperbole. Nel caso di moto ellittico valgono le **3 leggi di Keplero**:

1. Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei 2 fuochi.
(Generalizzazione: le orbite sono curve coniche (ellissi, iperbole, parabola))
2. La velocità areale di un pianeta è costante (dalla cons. del momento angolare)
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore: $T^2 \propto R^3$ ovvero $T^2 = kR^3$ dove k è la stessa costante per tutti i pianeti.

Queste leggi si applicano anche ai moti di satelliti intorno alla terra o un altro pianeta, (k dipende dalla massa del sole o del pianeta).

In una regione ristretta presso la superficie terrestre la si chiama

a') Forza peso (o peso): $P = mg$ dove g è l'accelerazione di gravità uguale per tutti i corpi.

1-5 sono forze di contatto, **a** e **a'** sono forze a distanza.

Attenzione:

- le forze 1,2,3 sono reazioni vincolari: non sono mai date a priori, vanno determinate caso per caso.
- La forza centripeta non è una forza di natura particolare. Di volta in volta è costituita da una (o più) delle forze precedenti.

Moti:

Oscillatore armonico. Una massa m fissata ad una molla ideale di costante elastica k si muove di moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Pendolo semplice. Nel caso di piccole oscillazioni, il pendolo si muove di moto armonico con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ e pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Forma integrale del 2° Principio della dinamica.

$$\int \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

L'integrale a sx si chiama **impulso** della forza: L'impulso è uguale alla variazione di quantità di moto. Nel caso particolare di una forza costante $\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}$.

Momento di una forza applicata nel punto P, rispetto al punto (polo) O:

$$\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{in modulo: } M = rF \sin \theta = Fb = rF_{\perp} \quad (b: \text{braccio})$$

Momento angolare (o momento della quantità di moto) di un punto materiale di massa m , velocità v e posizione P (rispetto al polo O): $\vec{L} = \vec{OP} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$.

$$\text{In modulo: } L = rmv \sin \theta = mvb = rmv_{\perp}$$

Teorema del momento angolare (rispetto ad un polo fisso): $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Parte 5. Lavoro-Energia.

Definizione. Se il punto di applicazione di una forza si sposta dal punto A al punto B, lungo una linea γ , si definisce lavoro di F:

$$W = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad [W] = Nm = kg \frac{m^2}{s^2} = J$$

Se F è costante, $W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta$ dove $s = |\vec{AB}|$ e θ è l'angolo compreso fra $\vec{F}$ e $\vec{AB}$. Il lavoro è positivo, negativo o nullo a seconda dell'angolo θ .

Potenza media (in un tempo Δt): $\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} \quad [P] = \frac{J}{s} = kg \frac{m^2}{s^3}$

Potenza istantanea: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Energia cinetica di un punto di massa m e velocità v : $E_K = \frac{m}{2} v^2 \quad [K] = J$

Teorema dell'energia cinetica: $W = \Delta E_K = E_{K_f} - E_{K_i}$

vale per qualsiasi sistema meccanico, purché si consideri il lavoro totale e l'energia cinetica totale.

Dipendenza del lavoro dal tragitto. In generale, il lavoro di una forza F fra A e B dipende dal tragitto γ . Tuttavia alcune forze (ad es. *Forza gravitazionale* e il suo caso particolare *Forza peso*, *Forza elastica*) hanno la proprietà che il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e quella finale. Tali forze si dicono **conservative**.

Attrito dinamico: qui il lavoro dipende dal tragitto: forza non conservativa.

Energia potenziale. Se una forza è conservativa, si definisce l'energia potenziale E_p :

$$E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_p = W_{AB} \quad \text{Definite a meno di una costante.}$$

Esempi di energia potenziale.

Forza peso: $E_p = mgh$ (h: altezza rispetto al livello di riferimento)

Gravitazione universale: $E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ (ponendo $E_p=0$ per r infinito)

Forze elastiche: $E_p = \frac{k}{2} x^2$ (x: allungamento/compressione molla)

Conservazione dell'energia meccanica.

Energia meccanica di un sistema: $E = E_K + E_p$

In presenza di sole forze conservative $E_F = E_I$, cioè $E = \text{costante}$.

In presenza anche di forze non conservative: $W_{NC} = \Delta E = \Delta E_K + \Delta E_p$

Parte 6. Moti relativi.

Se O e O' sono due osservatori (con gli associati sistemi di riferimento) e O' si muove rispetto ad O , la descrizione del moto da parte degli osservatori è diversa. In generale:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \quad \text{Risolvendo rispetto ad } \vec{a}':$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \quad \text{dove il 3° termine a destra è}$$

l'**accelerazione centrifuga** e il 4° l'**accelerazione di Coriolis**.

Caso di moto traslatorio di O' rispetto ad O : $\omega=0 \mapsto \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' \end{cases}$

Il prodotto $-m\vec{a}_{O'}$ rappresenta una forza apparente: forza sperimentata dall'osservatore O' dovuta però solo al suo moto e non ad una interazione fisica.

Se $\vec{a}_{O'}=0$ siamo nel caso della relatività galileiana. Se O è inerziale anche O' lo è.

Caso di moto rotatorio uniforme (O' ruota senza traslare con ω costante).

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Se un punto è fermo in O' , $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ differiscono solo per il termine centrifugo, e di

conseguenza O' osserva una forza centrifuga: $F = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}$.

Parte 6. Sistemi di punti materiali.

La **definizione di centro di massa** per N punti, è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N m_k} = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k$$

di qui si ricava $\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k$, $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{m_{TOT}} \sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m_{TOT}} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{m_{TOT}} \int_V \rho \vec{r} dV \quad \text{nel caso di un corpo continuo.}$$

ρ è la densità (volumica), cioè massa per unità di volume e si misura in kg/m^3 . Per un corpo omogeneo $\rho = \frac{m}{V}$, mentre in generale si può definire la densità “locale”

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Alcune utili proprietà per il calcolo del centro di massa:

- Se il sistema ha un asse di simmetria (o un piano di simmetria, o un centro di simmetria o più d'uno) il cdm giace su questo. Questa proprietà consente di trovare il cdm di corpi geometrici semplici (e omogenei).
- Se un sistema è composto di 2 o più sottosistemi, si può ridurre il calcolo del cdm a quello di 2 o più punti materiali, ognuno dei quali ha la massa di un sottosistema e si trova nella posizione del cdm del sottosistema.

Teorema del moto del centro di massa.

$$m_{TOT} \vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(E)}$$

dove m_{TOT} è la massa totale del sistema e $\vec{R}^{(E)}$ la risultante delle forze esterne. Quindi il cdm si muove come un punto materiale di massa m_{TOT} soggetto alla forza $\vec{R}^{(E)}$.

Teorema della quantità di moto: $\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{p}_{TOT}}{dt}$

dove $\vec{p}_{TOT}$ è la quantità di moto totale del sistema: $\vec{p}_{TOT} = \sum_{k=1, N} \vec{p}_k$

Caso di **sistema isolato** ($\vec{R}^{(E)} = 0$) $\begin{cases} \vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{cost.} \\ \vec{p}_{TOT} = \text{cost.} \end{cases}$

conservazione della quantità di moto, moto uniforme del cdm.

Teorema del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_O \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}$$

dove si suppone che il polo O possa essere mobile. Normalmente si usa un polo fisso

o coincidente con il cdm, per cui il 2° termine è nullo. $\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$.

Sistema del centro di massa. Sistema di riferimento solidale con il cdm che trasla senza ruotare. In generale è un sistema non inerziale. Caratteristiche:

$$\vec{p}'_{TOT} = 0$$

(le forze non inerziali non contribuiscono al momento). In questo

$$\vec{M}'_{TOT} = \vec{M}'^{(E)}$$

sistema vale il teorema della quantità di moto: $\frac{d\vec{L}'_{TOT}}{dt} = \vec{M}'^{(E)}$ come nel laboratorio.

Teorema di König del momento angolare. $\vec{L} = \vec{L}' + r_{CM} \times m_{TOT} \vec{v}_{CM}$

Teorema di König dell'energia cinetica. $E_K = E'_K + \frac{m_{TOT}}{2} v_{CM}^2$

Nei due teoremi di König il termine a sinistra rappresenta il valore della quantità (momento angolare o en. cinetica) nel sistema del laboratorio, il 1° termine a destra il corrispondente valore *nel sistema del cdm* e il 2° termine a destra il valore che la grandezza assumerebbe se il sistema si riducesse ad un punto coincidente con il cdm.

Per un sistema di punti vale il **teorema dell'energia cinetica** (come per 1 solo punto): $W = \Delta E_K$ dove E_K rappresenta l'energia cinetica totale. A differenza di quantità di moto e momento angolare qui si deve considerare anche il lavoro delle forze interne.

Per l'**energia meccanica** valgono gli stessi teoremi del punto materiale:

$$W_{NC} = \Delta E = \Delta E_K + \Delta E_P$$

quindi se le forze sono conservative l'energia meccanica si conserva.

Parte 7. Corpo rigido.

Il moto più generale di un corpo rigido (CR) è un moto di *rototraslazione*. Dato un punto Q solidale con il CR, il moto di un altro punto P si può scrivere $\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}$ (ω è la velocità angolare istantanea, comune a tutto il CR). Quindi il CR possiede **6 gradi di libertà**:

$$\begin{cases} m\vec{a}_{CM} = \vec{R} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \end{cases} \quad \text{queste **equazioni del moto** descrivono completamente il moto del CR.}$$

Sistemi di forze equivalenti. Sistemi di forze con la *stessa risultante* e lo *stesso momento risultante* sono equivalenti per un corpo rigido. Le seguenti operazioni trasformano un sistema di forze in uno equivalente:

- traslazione di una forza lungo la sua retta d'azione
- somma di due forze aventi lo stesso punto di applicazione
- aggiunta di due forze opposte con la stessa retta d'azione

In alcuni casi, un sistema di forze si può ridurre ad un'unica forza applicata in un punto opportuno. Ad esempio un sistema di forze parallele è equivalente alla forza

risultante applicata nel *centro di forza* $\vec{r}_F = \frac{\sum_K F_K \vec{r}_K}{\sum_K F_K}$. E' il caso della forza peso,

dove il centro di forza coincide con il centro di massa. Quindi la **forza peso di un CR si può immaginare applicata nel suo cdm**.

Il momento di un sistema di forze dipende dal polo, tranne quando la risultante è nulla. In particolare il *momento di una coppia* di forze (sistema di due forze parallele di segno opposto, F , $-F$) non dipende dal polo. In modulo $M = Fb$ dove b , *braccio della coppia* è la distanza fra le rette d'azione delle due forze.

Equilibrio di un corpo rigido. Si ha equilibrio solo se: $\vec{F}_{EST} = 0$ e $\vec{M}_{EST} = 0$.

In altre parole, in presenza di più forze esterne $F_1, F_2, \dots$, si ha equilibrio se $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0$ e $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = 0$.

Ad es. se un corpo è sospeso per un filo, il suo prolungamento deve passare per il cdm.

N.B.: in presenza di vincoli conviene calcolare i momenti rispetto ad un punto del vincolo.

Corpo rigido con asse di rotazione fisso.

In caso di asse fisso (z) considerando le componenti lungo l'asse del teorema del momento angolare: $M_z = \frac{dL_z}{dt}$ con $L_z = I_z \omega$.

L'equazione di rotazione diviene: $M_z = I_z \alpha$

I_z è il **momento d'inerzia rispetto all'asse z** : $I = \sum_K m_K R_K^2$ ovvero $I = \int_V \rho R^2 dV$

nel caso continuo, dove R_K è la *distanza di m_K dall'asse*. Il momento d'inerzia si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ed è definito rispetto ad un asse. E' una proprietà del corpo rigido.

Proprietà

- il momento d'inerzia di un sistema composto è la somma dei momenti d'inerzia (rispetto allo stesso asse).
- Teorema di Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + ma^2$ dove I_{CM} è il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo passante per il cdm e a è la distanza fra l'asse di rotazione e l'asse parallelo passante per il cdm. Quindi basta conoscere il mom. d'inerzia rispetto ad un asse passante per il cdm per poterlo estendere ad ogni altro asse.

Valori del momento d'inerzia per sistemi omogenei.

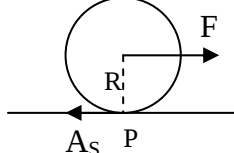
Figura geometrica	Momento d'inerzia
punto a distanza d dall'asse	md^2
anello (massa m e raggio R) risp. asse	mR^2
Disco (massa m e raggio R) risp. asse	$\frac{1}{2} mR^2$
Sfera piena	$\frac{2}{5} mR^2$
Sfera cava	$\frac{2}{3} mR^2$
Cilindro pieno	$\frac{1}{2} mR^2$
sbarra di lunghezza ℓ	$\frac{1}{12} m\ell^2$

L'energia cinetica di rotazione si può esprimere come $E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$ purché il momento d'inerzia sia calcolato rispetto all'asse di rotazione. Naturalmente valgono i teoremi di König.

Pendolo composto: si trova che un CR sospeso liberamente ad un asse orizzontale oscilla con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ dove h è la distanza fra punto di sospensione e cdm.

Puro rotolamento. In questo moto, il punto a contatto con il suolo è istantaneamente a riposo e il corpo rigido ruota intorno (ad un asse passante per) esso.

L'equazione del moto di rotazione si scrive *rispetto ad un asse fisso* (come il punto di contatto) o *rispetto al cdm*. Esemplicando per il sistema in figura:

$$\begin{cases} F - A_S = ma \\ FR = I_P \alpha \\ a = \alpha R \end{cases} \quad \text{rispetto al punto P. Oppure} \quad \begin{cases} F - A_S = ma \\ A_S R = I_{CM} \alpha \\ a = \alpha R \end{cases}$$


Il sistema ha 2 equazioni in 2 incognite (a e A_S). La forza di contatto è attrito statico, il quale non compie lavoro. La condizione di rotolamento è che $A_S \leq \mu_s N$.

Impulso angolare, momento dell'impulso.

Il teorema del momento angolare (con polo fisso) si può scrivere in forma integrale come: $\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt$ (il termine a dx è l'impulso angolare). Se il momento è dovuto ad una forza impulsiva, $\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$ (momento dell'impulso).

Parte 8. Urti.

Urto di 2 punti materiali. Nell'urto di 2 punti materiali, in assenza di forze esterne impulsive, si ha conservazione della quantità di moto. Questa si conserva solo nel breve intervallo dell'urto se vi sono forze esterne (non impulsive) oppure sempre se il sistema è isolato. Il momento angolare non fornisce informazioni nuove nel caso di punti materiali, mentre la conservazione dell'energia dipende dall'urto.

Si dice **elastico** l'urto in cui si conserva l'energia cinetica; gli altri urti si dicono **inelastici o anelastici**. Se i due corpi dopo l'urto procedono uniti si parla di urto **completamente anelastico**, nel quale si ha la massima dissipazione di energia.

Sistema del cdm. In questo sistema $\vec{p}'_{TOT} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$ quindi inizialmente i due punti convergono verso il cdm, con quantità di moto uguali in modulo ma di segno opposto. Se l'urto è elastico, dopo l'urto ogni massa avrà invertito il segno della velocità, mentre nell'urto totalmente anelastico le due masse rimarranno immobili.

Urto totalmente anelastico. $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_F \Rightarrow \vec{v}_F = \vec{v}_{CM}$

nel cdm $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = 0 \Rightarrow E_{KF} = E'_{KF} + \frac{m}{2} v_{CM}^2 = \frac{m}{2} v_{CM}^2$

Urto perfettamente elastico (1D o urto frontale). Combinando la conservazione della quantità di moto e dell'energia, se m_1 , con velocità iniziale v_1 , collide con m_2 che ha velocità iniziale v_2 si trovano le velocità finali: $v_{1F} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ e

$$v_{2F} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad . \quad \text{Se } m_2 \text{ è inizialmente ferma: } v_{1F} = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \text{ e}$$

$$v_{2F} = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad .$$

Se nell'urto sono coinvolti corpi rigidi è importante considerare il momento angolare.

Questo può conservarsi

- rispetto ad ogni polo, se il sistema è isolato ($M_{EST}=0$)
- rispetto ad un polo particolare (vincolo) se il sistema non è isolato, ma le forze esterne impulsive sono quelle esercitate dal vincolo stesso.

Parte 9. Termodinamica: terminologia, calorimetria, 1° Principio

Sistema termodinamico: porzione oggetto di osservazione

Ambiente: insieme con cui può interagire il sistema

Universo TD: Sistema + Ambiente

Un sistema può essere isolato (nessuno scambi con l'ambiente), chiuso (solo scambi energetici, non materia), aperto (può scambiare materia ed energia: non sono trattati in questo corso). L'universo TD si considera un sistema isolato.

Un sistema TD è descritto da variabili termodinamiche (intensive: p , ρ , T , ... ed estensive: m , V , U , S , ...). Un sistema è in equilibrio TD se è in equilibrio meccanico, termico e chimico.

Temperatura empirica. Detta X una grandezza termometrica $T = 273.16 \frac{X}{X_{PT}}$ dove

“PT” si riferisce al punto triplo dell'acqua.

Espansione termica. Una sbarra di lunghezza ℓ_0 a temp. T_0 assume lunghezza $\ell = \ell_0(1 + \lambda\Delta T)$ se $\Delta T = T - T_0$. Per il volume si ha $V = V_0(1 + \alpha\Delta T)$ con $\alpha = 3\lambda$. I ha valori tipici dell'ordine di 10^{-5} K^{-1} , a di 10^{-4} K^{-1} .

Pressione. E' il rapporto fra forza normale ad una superficie e la sup. stessa:

$$p = \frac{F_N}{S} \Rightarrow F_N = pS \quad . \quad \text{E' una grandezza scalare e si misura in } \text{Pa} = \text{N/m}^2 \text{. Nei fluidi la}$$

pressione è isotropa; aumenta con la profondità secondo la legge $dp = \rho g dh$ (ρ è la densità e dh la variazione di profondità).

Adiabatico, detto di pareti e contenitori, significa che non trasmettono calore. L'opposto è Diatermico.

Dall'esperienza di Joule si può introdurre la funzione di stato *energia interna* U . Il **primo principio della termodinamica** afferma che: $\Delta U = Q - W$ dove ΔU dipende solo dagli stati iniziale e finale, Q è il calore assorbito dal sistema nella trasformazione e W il lavoro compiuto dal sistema.

Nomenclatura per trasformazioni TD:

trasformazione **quasi statica** o di quasi equilibrio: procede per stati di equilibrio TD

trasformazione **reversibile**: trasf. quasi statica in assenza di forze dissipative

trasformazione adiabatica: $Q=0 \mapsto \Delta U = -W$

trasformazione **ciclica**: lo stato finale coincide con lo stato iniziale: $\Delta U=0 \mapsto Q=W$.

Calorimetria. Se un corpo di massa m scambia (solo) calore la sua temperatura varia. Si ha: $Q = C\Delta T = mc\Delta T$ dove C (misurata in J/K) è la **capacità termica** e c (in J/kg/K) è il **calore specifico**.

$$c = \frac{1}{m} \frac{Q}{\Delta T} \Rightarrow Q = mc\Delta T$$

$$c = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} \Rightarrow Q = nc\Delta T$$

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \Rightarrow Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)dT$$

oppure i cal. spec. molari

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Rightarrow Q = \int_{T_1}^{T_2} nc(T)dT$$

il calore spec. molare si misura in (J/mol/K).

In generale il calore specifico dipende anche dal processo: si distingue fra c_p (a pressione costante) e c_v (a volume costante). Per solidi e liquidi la differenza è molto piccola, ma non per i gas (v.).

Scambi di calore in ambiente adiabatico: calorimetro. In un calorimetro si assume che 2 o più corpi scambino solo calore fino a raggiungere l'equilibrio termico (stessa temperatura). Due corpi A e B, di massa m_A e m_B e temperature iniziali T_A e T_B , con calori specifici costanti e senza cambiamenti di fase raggiungono una temperatura di

equilibrio $T_F = \frac{m_A c_A T_A + m_B c_B T_B}{m_A c_A + m_B c_B}$. Questa si calcola imponendo che $Q_A + Q_B = 0$ e

così si prosegue anche nei casi più complessi.

Nei processi di cambiamento di fase il sistema acquista o cede energia senza cambiare la sua temperatura. Il calore che un solido di massa m deve assorbire per fondere, o un liquido per evaporare (**calore latente**) è proporzionale alla massa che si trasforma.

$Q = \lambda m$ dove λ è il calore latente per unità di massa, misurato in J/kg. **Per l'acqua** si osserva $\lambda_F = 3.34 \cdot 10^5$ J/kg (calore latente di fusione) e $\lambda_E = 2.26 \cdot 10^6$ J/kg (cal. latente di evaporazione).

Parte 10. Termodinamica: gas ideale, trasformazioni, cicli

Equazione di stato del gas ideale: $pV = nRT$ oppure $p = \frac{\rho RT}{A}$ dove R è la costante

dei gas: **$R = 8.3145$ J/K/mol**, ρ è la densità e A la massa molecolare. Questa è la massa di una mole di una certa sostanza, ovvero di un **numero di Avogadro** ($N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$) di molecole. Si rammenta che una mole ha una massa in grammi pari al peso molecolare. $k = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J / K è la **costante di Boltzmann**.

Lavoro di una trasformazione. In una trasformazione quasi-statica il lavoro si

calcola come $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ dove l'integrando è la pressione del sistema, definita ad

ogni stadio della trasformazione. Nel piano pV (di Clapeyron) l'integrale rappresenta l'area sottesa dalla linea che identifica la trasformazione. Il lavoro non dipende solo dallo stato iniziale e finale, ma anche dalla trasformazione.

In una trasformazione non quasi-statica il lavoro non si può calcolare mediante l'integrale precedente, ma talvolta è possibile calcolare il lavoro delle forze esterne (ambiente), e $W_{SIST} = -W_{EST}$. L'alternativa è di calcolarlo dal 1° Principio se sono noti Q e ΔU .

Energia interna del gas ideale. Esperienza di Joule-Thompson

Studiando l'espansione libera di un gas ideale, all'interno di un calorimetro, si osserva che la temperatura non cambia, e si deduce che $Q=W=\Delta U=0$. Come conseguenza si

ricava che l'energia interna di un gas ideale dipende solo dalla temperatura e in particolare $\Delta U = nc_V \Delta T$.

Relazione di Meyer: dal risultato precedente si ricava $c_p = c_v + R$.

Il rapporto $\gamma = c_p/c_v > 1$. Con buona approssimazione, nei gas ideali mono e bi-

$$c_v = \frac{3}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} \quad \text{gas monoatomici}$$

atomici si osserva che:

$$c_v = \frac{5}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5} \quad \text{gas biatomici}$$

Trasformazioni particolari di un gas ideale.

Isocora (V costante): $W = 0 \quad \Delta U = Q = nc_V \Delta T$

Isobara (p costante) **quasistatica**: $Q = nc_p \Delta T \quad W = p \Delta V = nR \Delta T$

Isoterma (T costante) **quasistatica**: $\Delta U = 0 \quad Q = W = nRT \ln(V_B/V_A)$

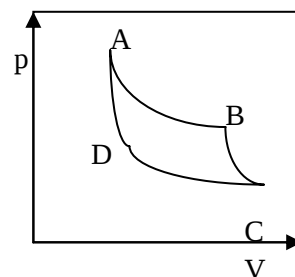
Adiabatica (Q=0): $Q = 0 \quad \Delta U = -W = nc_V \Delta T$ se l'adiabatica è reversibile valgono

le seguenti relazioni: $pV^\gamma = \text{cost} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost}$

Trasformazioni cicliche. $\Delta U = 0 \quad W = Q = Q_A + Q_C$ (calore assorbito e ceduto dal sistema). Se il sistema compie lavoro ($W > 0$) si dice macchina termica, altrimenti si parla di macchina frigorifera. Per una macchina termica si definisce **rendimento** la

quantità $\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$. E' sempre compreso fra 0 e 1.

Ciclo di Carnot (reversibile) con gas ideale. Un gas ideale che compie un ciclo di Carnot (espansione isoterma AB, esp. adiabatica BC, compressione isoterma CD, compressione adiabatica DA) costituisce una semplice macchina termica. In particolare:



$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln(V_B/V_A) = Q_{\text{ASSORBITO}}$$

$$W_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V(T_1 - T_2)$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln(V_D/V_C) = Q_{\text{CEDUTO}}$$

$$W_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_V(T_2 - T_1)$$

Dove $T_A = T_B = T_2$ e $T_C = T_D = T_1$.

Il rendimento è $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Ciclo di Stirling (reversibile, con gas ideale). In questo caso le adiabatiche sono sostituite da isocore. Si trova che il rendimento è identico a quello del ciclo di Carnot se la macchina scambia calore con sorgenti alle stesse temperature.

Macchina frigorifera.

In questo caso si definisce l'**efficienza** $\xi = \frac{Q_A}{|W|}$. Se la macchina è un ciclo di Carnot

(reversibile) inverso $\xi = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$. Dipende solo dalle temperature (ma può essere > 1).

Parte 11. 2° Principio della Termodinamica.

Enunciato di Kelvin-Planck: non esiste alcun processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro di calore tratto da un'unica sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato di Clausius: non esiste alcun processo il cui unico risultato sia il passaggio di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

Si tratta di 2 enunciati dello stesso principio: si dimostra che sono equivalenti.

Esempi di conseguenze: in un **ciclo monoterme** $Q=W<0$ (è possibile assorbire lavoro da trasformare in calore, ma non viceversa).

Teorema di Carnot (per macchine che lavorano fra le stesse 2 temperature).

- Il rendimento di una macchina qualsiasi non può mai superare quello di una macchina reversibile $\eta_x \leq \eta_R$
- Tutte le macchine reversibili hanno lo stesso rendimento: $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$
- Vale la relazione $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ col segno “=” che vale solo per macchine reversibili.

Temperatura termodinamica assoluta. E' possibile utilizzare il calore scambiato da una macchina reversibile come grandezza termometrica per misurare la temperatura. Tale temperatura è indipendente dalla sostanza utilizzata.

Teorema di Clausius. Se una macchina scambia calore con N sorgenti a temperatura $T_1 \dots T_N$, allora, in un ciclo, si trova: $\sum_K \frac{Q_K}{T_K} \leq 0$. Nel caso di una distribuzione

continua di sorgenti, $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$. Il segno di uguaglianza vale solo per trasformazioni reversibili. (La scrittura significa che l'integrale è preso su un ciclo).

La funzione di stato entropia.

Date due trasformazioni reversibili da A a B (1 e 2) la trasformazione AB(1)+BA(2) costituisce un ciclo reversibile. Dal teorema di Clausius si ottiene $\int_{A,1}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,2}^B \frac{dQ}{T}$

Quindi l'integrale di (dQ/T) lungo una trasformazione reversibile dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale. Come già per l'energia interna si può quindi definire

una nuova funzione di stato, l'**entropia**, definita come $\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{REV}$

Attenzione al fatto che la trasformazione dev'essere reversibile: se la trasformazione non è reversibile, l'integrale di (dQ/T) non rappresenta la variazione di entropia. Si è fatto l'esempio dell'espansione libera di un gas ideale, dove $\Delta S > 0$ anche se $Q=0$.

Anzi, si dimostra che, in una trasformazione irreversibile, **l'entropia di un sistema isolato aumenta. In particolare aumenta sempre l'entropia dell'universo.**