

Soluzione all'esercizio delle lancette dell'orologio, ovvero "calcolare in quali istanti la lancetta dei minuti si sovrappone a quella delle ore".

Le lancette si muovono di moto circolare uniforme, con velocità angolare $\omega_1 = \frac{2\pi}{12h}$ e $\omega_2 = \frac{2\pi}{1h}$, dove i periodi sono indicati in ore (in questo problema non conviene trasformare in secondi).

Le leggi orarie sono $\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_{10} + \omega_1 t \\ \theta_2(t) = \theta_{20} + \omega_2 t \end{cases}$ con ovvio significato dei simboli. Scegliendo come istante

iniziale le ore 00:00 e come angolo 0 la posizione sulle 12, $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$.

La condizione di sovrapposizione è l'unica vera difficoltà del problema: infatti se si pone semplicemente $\theta_1 = \theta_2$ si trova solo la soluzione banale $t=0$ (cioè le 00:00 o 12:00 se si preferisce).

La condizione da imporre è $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi n$ dove n è un intero qualsiasi. Significa che la lancetta dei minuti (indice 2) ha percorso un angolo pari a quello della lancetta delle ore + n giri completi.

Il risultato è allora $t = \frac{2\pi n}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{12n}{11} h$, cioè un multiplo di $12/11$ di ora con n arbitrario.

Per $n=1$ $t = \frac{12}{11} h = 1h \frac{60}{11} \text{ min} = 1h \ 5 \text{ min} \ \frac{300}{11} s = 1h \ 5 \text{ min} \ 27.3s$; ponendo $n=2,3 \dots 11$ si trovano tutti gli altri valori, per $n>11$ la cosa si ripete.