

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA "GALILEO GALILEI"**

**ELEMENTI DI TEORIA DEGLI ERRORI DI MISURA E DI ANALISI E RIDUZIONE DEI
DATI SPERIMENTALI per il LABORATORIO DEI CORSI DI FISICA
della Facoltà di Ingegneria**

Sommario:

1. MISURA DELLE GRANDEZZE FISICHE

Metodo di misura diretta

Metodo di misura indiretta

2. ERRORI DI MISURA

Sensibilità degli strumenti

Classificazione degli errori.

Principio della media aritmetica. Scarti dalla media.

3. LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI CASUALI.

Legge normale e distribuzione gaussiana.

Scarto quadratico medio ed errore quadratico medio.

4. ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI

Determinazione dei parametri della curva gaussiana.

Misure indirette. Caso lineare.

Formula di propagazione dell'errore quadratico medio.

5. ULTERIORI METODI DI ANALISI DEI DATI

Media pesata

Analisi multidimensionale: caso lineare bidimensionale e metodo dei minimi quadrati.

MISURA DELLE GRANDEZZE FISICHE

Ogni grandezza fisica è rappresentata completamente da uno o più numeri (a seconda che si tratti di grandezza scalare o vettoriale) seguiti dall'unità di misura, cioè dal simbolo della grandezza ad essa omogenea che si è scelta convenzionalmente come grandezza campione, ad esempio il metro (m) per la lunghezza, il chilogrammo (kg) per la massa, il tesla (T) per l'induzione magnetica e così via.

Il numero che rappresenta la misura della grandezza fisica in questione può essere ottenuto attraverso due metodi distinti.

a) Metodo di misura diretta

Si esegue direttamente il confronto, secondo un procedimento operativo che fa parte della definizione stessa della grandezza, tra la grandezza da misurare ed il campione, ovvero un'altra grandezza omogenea di misura nota. Ad esempio, la lunghezza di un foglio di carta può essere determinata appoggiando su di esso una riga millimetrata: la misura della lunghezza è la differenza tra le graduazioni corrispondenti alle estremità del foglio.

b) Metodo di misura indiretta

Si calcola il valore della grandezza attraverso una relazione analitica che ne dà l'espressione in funzione di altre grandezze a loro volta misurate direttamente. Ad esempio, la velocità di un corpo può essere calcolata come quoziente tra lo spazio percorso (misurato direttamente con un metro campione) ed il tempo impiegato a percorrerlo (misurato direttamente con un orologio).

1. ERRORI DI MISURA

Sensibilità degli strumenti

Ogni misura implica un giudizio sull'eguaglianza tra la grandezza incognita e la grandezza campione (o eventualmente un suo multiplo o sottomultiplo). E' chiaro che tale giudizio non può essere assoluto, ma dipende dalle condizioni in cui la misura viene effettuata. Così nell'esempio citato sopra, se la misura di lunghezza viene effettuata con una riga millimetrata, sarà possibile effettuare il confronto con un'incertezza di mezzo millimetro in più o in meno. Se ad esempio si osserva che, posto uno dei bordi del foglio in corrispondenza dello zero, l'altro si trova tra le graduazioni 572 e 573, si potrà scrivere:

$$0.572m \leq l \leq 0.573m$$

o anche, più comunemente:

$$l = (0.5725 \pm 0.0005)m$$

Si dice in questo caso che la misura di lunghezza è stata eseguita con una "sensibilità" di 0.5 mm. E' chiaro che se la misura si esegue con una stecca graduata in centimetri, la sensibilità risulta di 0.5 cm.

In generale, si definisce **sensibilità di uno strumento** (o del procedimento sperimentale in cui viene usato) la minima differenza apprezzabile tra il valore della grandezza da misurare e quella campione. Non ha senso riportare il risultato di una misura indicando un numero di cifre decimali maggiore di quello necessario per indicare la sensibilità della misura.

Si può pensare di migliorare la qualità di una misura usando strumenti e procedimenti di sensibilità maggiore. Interviene allora un fatto nuovo, che illustreremo facendo ancora ricorso all'esempio precedente.

Si supponga di voler misurare la lunghezza di un foglio con una sensibilità di un millesimo di millimetro (μm). Ripetendo varie volte la misura si ottengono ad esempio i seguenti valori:

1^a misura: $l = 572.432 \mu\text{m}$

2^a misura: $l = 572.433 \mu\text{m}$

3^a misura: $l = 572.441 \mu\text{m}$

4^a misura: $l = 572.439 \mu\text{m}$

I risultati delle misure differiscono tra loro in quanto sono presenti errori di misura superiori alla sensibilità dello strumento. Ogni misura è affetta da errori, e se talvolta si parla di "valore vero" di una grandezza, si intende semplicemente il valore che si otterrebbe eseguendo la misura in condizioni tali da ridurre gli errori a valori molto minori degli attuali.

Classificazione degli errori.

Gli **errori di misura** si possono suddividere in "**sistematici**" e "**casuali**".

Alla prima categoria appartengono gli errori che falsano la misura sempre nello stesso senso. Ad esempio, un "metro" campione lungo 999 mm fornirà sempre delle misure errate per eccesso; un voltmetro di resistenza interna troppo bassa farà diminuire sempre la differenza di potenziale da misurare (l'entità dell'errore sistematico di inserzione dipende in questo caso dalla resistenza del circuito esterno). Dagli errori sistematici ci si può liberare calibrando attentamente gli strumenti, ovvero apportando un'opportuna correzione ai risultati ottenuti.

La presenza di errori casuali, a differenza di quanto accade per quelli sistematici, risulta evidente quando si ripeta più volte la stessa misura in condizioni nominalmente eguali con una sensibilità sufficientemente spinta. Si osserva allora che i risultati differiscono l'uno dall'altro. Ciò può essere imputato a varie cause:

- a) condizioni sperimentali (es. pressione, temperatura...) fluttuanti in maniera non controllabile;
- b) disturbi estranei alla misura (vibrazioni, campi elettrostatici,...)
- c) grossolana interpolazione tra due divisioni successive nella scala dello strumento;
- d) definizione vaga della grandezza da misurare (cosa significa "lunghezza del foglio di carta" quando si pretenda di misurarla con una precisione del μm ? Il foglio non è mai perfettamente rettangolare ed i suoi bordi non sono esattamente rettilinei).

La presenza di errori in ogni misura, e particolarmente degli errori casuali, mostra come la sensibilità sia un requisito necessario, ma non sufficiente, per una buona misura.

Vedremo nei prossimi paragrafi come sia possibili definire la "precisione" di una misura ed eventualmente migliorarla, entro i limiti consentiti dalla sensibilità degli strumenti.

Principio della media aritmetica. Scarti dalla media.

Supponiamo di aver misurato n volte una grandezza fisica con lo stesso strumento ed in condizioni nominali identiche. Siano:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

gli n valori ottenuti, generalmente diversi per la presenza di errori casuali; supporremo inoltre di aver eliminato ogni errore sistematico.

La più semplice rappresentazione grafica dell'insieme delle n misure consiste in un diagramma cartesiano, come quello riportato in **Fig.1** che corrisponde ad un insieme di 100 valori misurati di una stessa grandezza fisica. In un grafico di questo tipo, o "**ideogramma**", si riporta in ascissa il numero d'ordine della misura, in ordinata il valore misurato. E' opportuno tracciare come riferimento una retta orizzontale in corrispondenza del valore medio delle n misure. Uno sguardo all'ideogramma permette di farsi subito un'idea qualitativa della dispersione dei dati e di accorgersi se siano intervenute nel corso dell'esperienza variazioni nelle condizioni sperimentali.

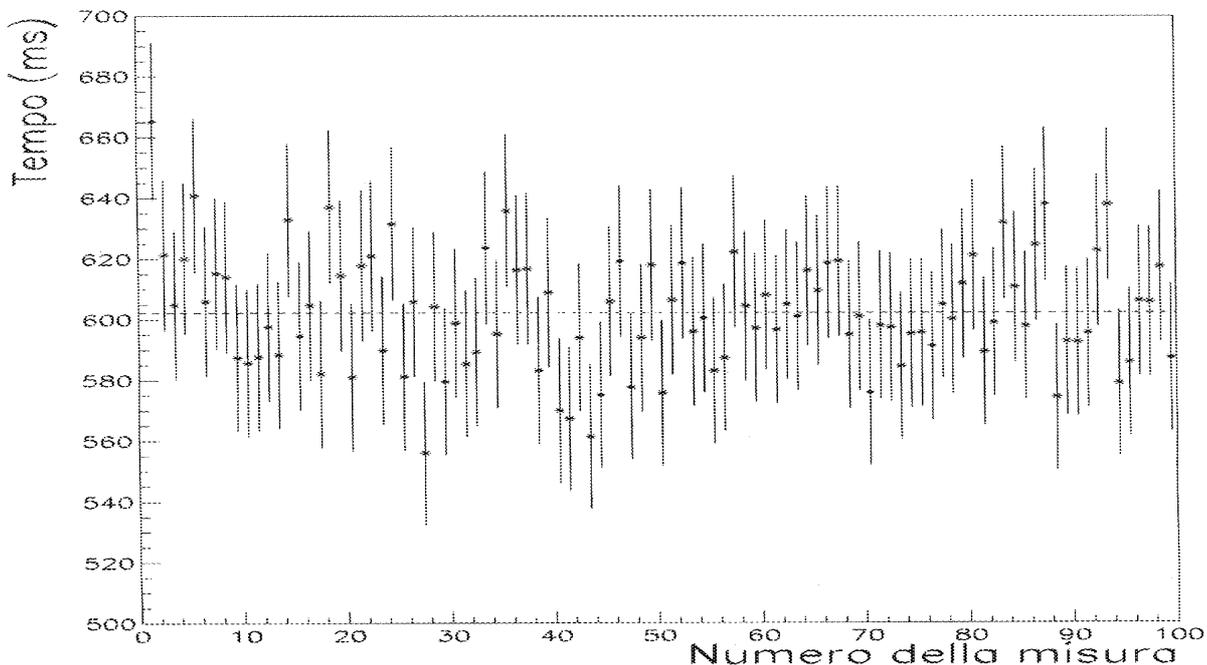


Fig. 1

Si presenta il problema di quale sia il valore da assegnare alla grandezza x in questione. Il principio che generalmente si adotta è quello della media aritmetica: si assume cioè come un ragionevole "indicatore" del valor vero della grandezza (valore che resta peraltro sconosciuto) la **media aritmetica** degli n valori ottenuti sperimentalmente:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Tale scelta può essere giustificata con varie considerazioni. Innanzitutto nel computo della media aritmetica tutti gli n valori vengono trattati alla stessa maniera e il risultato è indipendente dall'ordine in cui sono fatte le misure. Inoltre lo scarto tra il valor medio ed il "valore vero" è mediamente minore, in valore assoluto, degli scarti tra le singole misure ed il valore vero. Ciò può

essere qualitativamente compreso sulla base delle seguenti considerazioni: gli scarti delle singole misure rispetto al valore vero, in quanto casuali, possono essere sia positivi che negativi; in generale le misure errate per eccesso e quelle per difetto sono all'incirca egualmente numerose. Quando si calcola la media aritmetica, gli scarti dal valore vero si sommano algebricamente: si ha quindi una parziale cancellazione degli errori, cosicchè la media aritmetica dà un valore più vicino al vero di quanto mediamente non siano le singole misure. Sia infatti x^* il **valore vero** (incognito) della grandezza in questione e indichiamo il valor medio, come sopra, col simbolo $\langle x \rangle$; chiameremo **"errore della i-esima misura"** la differenza:

$$\varepsilon_i \equiv x_i - x^*$$

tra il valore misurato e il valore vero; chiameremo invece **"scarto dalla media"** della i-esima misura la differenza:

$$z_i \equiv x_i - \langle x \rangle$$

L'errore ε da attribuire a $\langle x \rangle$ sarà:

$$\varepsilon \equiv \langle x \rangle - x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

Da questa formula appare evidente l'effetto di parziale cancellazione degli ε_i .

Più quantitativamente, si può facilmente dimostrare che il valor medio $\langle x \rangle$ è quel valore della variabile x che minimizza la somma dei moduli delle 'distanze' $(x-x_i)$ dalle singole misure; la quantità:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$$

è cioè minima per $x=\langle x \rangle$. Determinando infatti il minimo x_0 della funzione $S(x)$ si ha:

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} (x - x_i)^2 = \sum_{i=1}^n 2(x - x_i) = 2nx - 2 \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \equiv \langle x \rangle$$

Si noti che la somma degli scarti dalla media è nulla per definizione (non così, ovviamente, la somma dei quadrati degli scarti):

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle) = \sum_{i=1}^n x_i - n \langle x \rangle \equiv 0$$

Un'altra proprietà degli scarti è che ciascuno di essi differisce dal corrispondente errore di una quantità costante, che è l'errore del valore medio:

$$\varepsilon_i - z_i = x_i - x^* - x_i + \langle x \rangle = \langle x \rangle - x^* \equiv \varepsilon$$

Se il numero delle misure è abbastanza grande $\varepsilon \rightarrow 0$, come dimostreremo, cosicchè non vi è grande differenza tra gli scarti e gli errori.

3. LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEGLI ERRORI CASUALI.

Legge normale e distribuzione gaussiana.

Misurando ripetutamente una stessa grandezza fisica si ottengono in generale dei risultati $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ diversi l'uno dall'altro. Possiamo calcolare gli scarti dalla media. Ci chiediamo quale sia la loro distribuzione. Per prima cosa, scelto un intervallo Δz di cui preciseremo tra poco l'estensione, contiamo quanti scarti hanno un valore compreso nell'intervallo $[0, \Delta z]$, quanti nell'intervallo $[\Delta z, 2\Delta z]$ e così via. Per una rappresentazione grafica della distribuzione così ottenuta, possiamo costruire un "istogramma", riportando su un asse z orizzontale a destra e a sinistra di un punto O scelto come origine, dei segmenti di lunghezza Δz ; su ciascun segmento costruiamo un rettangolo di base Δz ed altezza proporzionale al numero di scarti contenuti nell'intervallo corrispondente. E' chiaro che affinché l'istogramma dia una rappresentazione utile della distribuzione, l'ampiezza dell'intervallo Δz deve essere scelta in modo tale che almeno nei 3 o 4 intervalli più prossimi all'origine cada un numero significativo di scarti. La scelta di un valore Δz troppo grande (rispetto all'entità degli errori casuali in gioco) farebbe cadere tutti gli scarti nei soli due intervalli contigui all'origine; la scelta di un valore troppo piccolo viceversa determinerebbe una distribuzione eccessivamente 'dispersa', con molti intervalli vuoti ed alcuni intervalli popolati da pochi scarti (a meno che il numero di misure non sia molto grande). Vedremo di precisare meglio il criterio di scelta dell'ampiezza Δz dell'intervallo dopo aver introdotto il concetto di scarto quadratico medio.

Riportiamo in Fig.2 l'istogramma della distribuzione degli scarti per le 100 misure di cui abbiamo mostrato l'ideogramma in Fig. 1. L'istogramma è stato disegnato raggruppando gli scarti in intervalli di ampiezza $\Delta z = 5$ (nelle stesse unità di misura con cui sono state misurate le x).

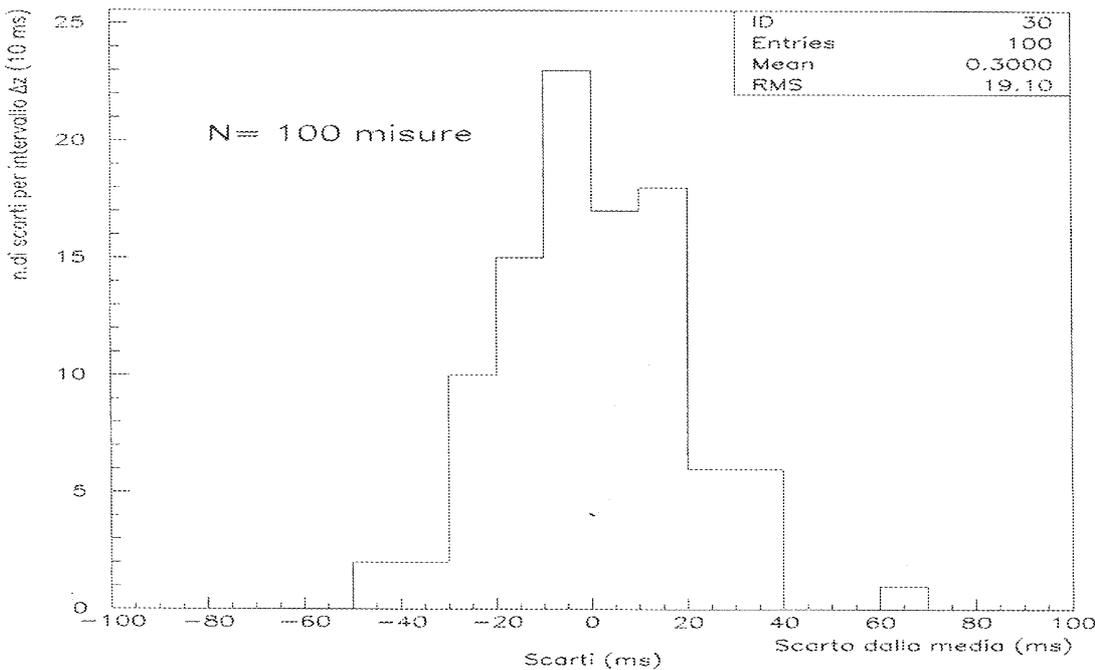


Fig. 2

In generale si osserva che gli scarti grandi in valore assoluto sono meno frequenti di quelli piccoli; inoltre la distribuzione risulta approssimativamente simmetrica rispetto allo zero.

E' possibile prevedere teoricamente la forma della distribuzione nel caso limite in cui il numero delle misure sia molto grande ($n \rightarrow \infty$), nell'ipotesi, che qui assumiamo, che le n misure siano indipendenti, ossia che il risultato di una misura non sia condizionato da quello delle misure precedenti. In tal caso possiamo pensare di far tendere a zero l'ampiezza Δz , in modo che la distribuzione discreta prima considerata diventi una funzione continua e l'istogramma venga sostituito da una curva. La funzione prevista dalla teoria :

$$f(z) = Ae^{-h^2 z^2}$$

si chiama "**funzione gaussiana**" e la legge di distribuzione degli scarti si dice "**legge normale**". Il suo significato è il seguente: il numero di scarti dn il cui valore è compreso nell'intervallo infinitesimo tra z e $z+dz$ è:

$$dn = f(z)dz = Ae^{-h^2 z^2} dz$$

Il **parametro h** si chiama "**modulo di precisione**". Esso rappresenta, come vedremo, l'accuratezza della serie di misure. Il parametro A di normalizzazione dipende dal numero totale di misure.

La rappresentazione grafica della legge normale, detta "**curva gaussiana**", è mostrata in **Fig.3**. Essa ha un massimo per $z=0$, è simmetrica rispetto allo zero e tende a zero per $z \rightarrow \infty$. E' chiaro che in pratica la distribuzione degli scarti rilevati sperimentalmente in una serie anche abbastanza numerosa di misure segue solo approssimativamente una legge di tipo $f(z)$; quanto più grande è il numero di misure, tanto migliore è l'approssimazione, ossia tanto minori sono le fluttuazioni dei valori sperimentalmente trovati di dn rispetto alla previsione teorica $dn=f(z)dz$.

Scarto quadratico medio ed errore quadratico medio.

Si supponga di aver eseguito n determinazioni sperimentali della grandezza x :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

Un parametro utile per caratterizzare la precisione della serie di misure è l' "errore quadratico medio", che definiremo prima per via astratta, riservandoci di vedere successivamente come sia possibile ricavarlo dai dati sperimentali.

Definiamo come "**errore quadratico medio**" l'espressione:

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - x^*)^2}{n}}$$

In pratica il valore vero x^* non è conosciuto. Possiamo invece calcolare lo "**scarto quadratico medio**":

$$\mu' \equiv \sqrt{\frac{\sum_i z_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}}$$

che come vedremo costituisce una buona approssimazione (per difetto) dell'errore quadratico medio, tanto migliore quanto maggiore è il numero n di misure.

Notiamo subito che vale l'identità, che permette di calcolare più rapidamente lo scarto quadratico medio:

$$n\mu'^2 \equiv \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 = \sum_i x_i^2 - 2 \langle x \rangle \sum_i x_i + n \langle x \rangle^2 = \sum_i x_i^2 - n \langle x \rangle^2$$

essendo, per definizione di valor medio, $\sum_i x_i = n \langle x \rangle$. Pertanto:

$$\mu'^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \langle x \rangle^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2,$$

dove si è indicato con $\langle x^2 \rangle$ il valor medio della quantità x^2 .

4. ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI.

Determinazione dei parametri della curva gaussiana.

Data una serie di misure, di cui si sia costruito l'istogramma riportato in Fig.2, si vuole determinare la curva gaussiana che meglio rappresenta la distribuzione degli scarti osservati.

La legge gaussiana è funzione dei due parametri A ed h. Per scegliere tra le infinite curve possibili quella che meglio interpola i dati dovremo quindi imporre due condizioni.

La prima condizione, detta "di normalizzazione", è che l'area sottesa dalla curva e l'istogramma della distribuzione sperimentale rappresentino lo stesso numero di misure, ossia l'istogramma abbia area uguale a quella sottesa dalla curva. Poichè, per come si è costruito l'istogramma di Fig.2 (ponendo in ogni intervallo un rettangolo di base Δz e di altezza Δn uguale al numero di misure aventi scarto compreso nell'intervallo considerato), l'area di questo è: $S = \sum_j \Delta n_j \Delta z = n \Delta z$

dove la sommatoria corre su tutti gli intervalli e Δn_j è la popolazione dello j-esimo intervallo; ovviamente la sommatoria è uguale al numero totale n di misure effettuate.

Pertanto deve essere:

$$n \Delta z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-h^2 z^2} dz$$

L'integrale a destra vale $A\sqrt{\pi}/h$ e pertanto la prima condizione dà:

$$n \Delta z = A\sqrt{\pi}/h$$

da cui si può ricavare la costante di normalizzazione in funzione di h. Il modulo di precisione h si determina imponendo che l'istogramma e la distribuzione rappresentata dalla curva gaussiana abbiano lo stesso scarto quadratico medio. Lo scarto quadratico medio della distribuzione gaussiana, che indicheremo con σ , è dato dal limite cui tende, per il numero di misure $n \rightarrow \infty$,

lo scarto quadratico medio di una distribuzione discreta: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_j z_j^2 \Delta n_j}$

$$\text{ossia: } \sigma^2 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_j z_j^2 \Delta n_j \right) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 A e^{-h^2 z^2} dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-h^2 z^2} dz}$$

dove, come si è già visto, al tendere all'infinito del numero di misure:

$$\Delta n_j \rightarrow dn(z)=f(z)dz \quad \text{ed il numero totale di misure } n \equiv \sum_j \Delta n_j \rightarrow \int dn = \int f(z) dz$$

Si dimostra che il rapporto tra gli integrali a destra nell'equazione vale $1/(2h^2)$, pertanto:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2h^2}$$

La condizione di eguaglianza tra lo scarto quadratico medio dell'istogramma delle misure e lo scarto quadratico medio della distribuzione gaussiana è quindi:

$$\mu' \equiv \sqrt{\frac{\sum_i z_i^2}{n}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}$$

ossia il modulo di precisione della curva gaussiana che meglio interpola i dati sperimentali è legato allo scarto quadratico medio dalla relazione:

$$h = \frac{1}{\mu' \sqrt{2}}$$

che giustifica la denominazione di "modulo di precisione" del parametro h: tanto maggiore è il suo valore, minore è lo scarto quadratico medio della distribuzione sperimentale.

Misure indirette. Caso lineare.

Nella maggior parte delle ricerche sperimentali ci troviamo di fronte al problema di misurare delle grandezze fisiche in maniera indiretta. Questo problema si può presentare sia perchè misurare una grandezza in maniera diretta può essere estremamente difficile, sia perchè la stessa definizione della grandezza fisica in questione lo impone (si pensi, ad esempio, alla velocità), sia perchè si vuole verificare la validità di una data relazione teorica tra due o più grandezze.

Consideriamo dapprima il caso semplice di una grandezza F espressa come somma di due altre grandezze x e y. Siano μ_x e μ_y gli scarti quadratici medi delle rispettive distribuzioni sperimentali, $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ i loro valori medi.

Vogliamo determinare lo scarto quadratico medio della grandezza F. Per ogni singolo valore misurato x_i e y_i delle grandezze x e y, la grandezza F assume i valori:

$$F_i = x_i + y_i;$$

il suo valore medio è:

$$\langle F \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_i F_i = \frac{1}{n} \sum_i (x_i + y_i) = \frac{1}{n} \sum_i x_i + \frac{1}{n} \sum_i y_i \equiv \langle x \rangle + \langle y \rangle$$

ed essendo $x_i = \langle x \rangle + \Delta x_i$ e $y_i = \langle y \rangle + \Delta y_i$ (avendo indicato con Δx_i e Δy_i gli scarti dalla media), si ottiene immediatamente:

$$F_i = x_i + y_i = \langle x \rangle + \Delta x_i + \langle y \rangle + \Delta y_i \equiv \langle F \rangle + \Delta F_i$$

ossia $\Delta F_i = \Delta x_i + \Delta y_i$

Il quadrato dello scarto quadratico medio della distribuzione della grandezza F è allora:

$$\mu_F^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_i (\Delta F_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_i (\Delta x_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_i (\Delta y_i)^2 + \frac{2}{n} \sum_i (\Delta x_i \Delta y_i)$$

Essendo le misure di x ed y indipendenti, per ogni possibile valore di Δx_i nell'ultimo termine dell'equazione precedente si avrà con egual probabilità un fattore Δy_i di segno

uguale o di segno opposto a Δx_i , e la sommatoria tenderà ad avere un valore piccolo,

al limite nullo per un numero molto grande di misure. Pertanto:

$$\mu_F^2 = \frac{1}{n} \sum_i (\Delta x_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_i (\Delta y_i)^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2$$

formula che rimane valida anche nel caso della differenza : $F=x-y$, e che può facilmente essere generalizzata al caso della somma di N quantità indipendenti:

$$\mu_F^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_N^2$$

e della combinazione lineare di N grandezze fisiche: $F=ax+by+cz+\dots$ ottenendo:

$$\mu_F^2 = a^2 \mu_x^2 + b^2 \mu_y^2 + c^2 \mu_z^2 + \dots$$

Un caso particolarmente interessante di applicazione di quanto sopra visto è la determinazione dello scarto quadratico medio della media di una grandezza fisica; si consideri cioè il caso

$$F = \langle x \rangle = x_1/n + x_2/n + \dots + x_n/n$$

dove le x_i sono misure di una stessa grandezza fisica x, ciascuna compiuta con la medesima precisione (ossia ciascuna misura, se ripetuta m volte, avrebbe dato una distribuzione sperimentale con lo stesso scarto quadratico medio μ). Per quanto visto sopra possiamo allora scrivere:

$$\mu_F^2 = n\mu^2 / n^2 \quad \text{ossia:}$$

$$\mu_F = \mu / \sqrt{n}$$

In definitiva si ottiene l'importante risultato che lega lo **scarto quadratico medio della media** $\langle x \rangle$ di n misure (ossia la larghezza della distribuzione che si otterrebbe per i valori medi facendo m serie di misure) allo scarto quadratico medio delle singole misure:

$$\mu_{\langle x \rangle} = \mu / \sqrt{n}$$

Come si vede, lo scarto quadratico medio della media è inferiore allo scarto quadratico medio delle singole misure, diminuendo con la radice quadrata del numero di misure: il valor medio di una grandezza è tanto più vicino al valor vero quanto maggiore è il numero di misure effettuate.

Siamo ora in grado di calcolare l'errore quadratico medio a partire dai dati sperimentali. Ricordiamo che abbiamo definito gli scarti z_i rispetto alla media $\langle x \rangle$ e gli errori rispetto al valore vero (incognito) x^* come $z_i = x_i - \langle x \rangle$ e $\varepsilon_i = x_i - x^*$ rispettivamente.

La differenza $\varepsilon = \langle x \rangle - x^*$ è l'errore della media rispetto al valore vero, di cui vogliamo calcolare la media quadratica, immaginando di ripetere molte volte la serie di n misure.

Dalla relazione $\varepsilon_i = z_i + \langle x \rangle - x^* = z_i + \varepsilon$, quadrando e sommando si ottiene:

$$\mu^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_i \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} \sum_i (z_i + \varepsilon)^2 = \frac{1}{n} \sum_i z_i^2 + \frac{2\varepsilon}{n} \sum_i z_i + \varepsilon^2$$

Poichè, come abbiamo visto, la somma degli scarti dalla media è nulla: $\sum_i z_i = 0$,

si ha: $\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_i z_i^2 + \varepsilon^2$

Possiamo inoltre considerare lo scarto quadratico medio della media $\mu_{\langle x \rangle} = \mu / \sqrt{n}$ come

una buona stima dell'errore della media (tanto migliore quanto maggiore è il numero n delle misure): $\varepsilon \cong \mu_{\langle x \rangle} = \mu / \sqrt{n}$ e quindi:

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_i z_i^2 + \varepsilon^2 \cong \frac{1}{n} \sum_i z_i^2 + \frac{\mu^2}{n}$$

ossia:
$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_i z_i^2}{n-1}}$$

espressione che permette di calcolare l'errore quadratico medio a partire dagli scarti dalla media; tale relazione mostra che lo

scarto quadratico medio $\mu' = \sqrt{\frac{\sum_i z_i^2}{n}}$

fornisce, come già detto, un' approssimazione per difetto dell'errore quadratico medio.

Tuttavia la differenza tra μ e μ' diventa trascurabile non appena il numero di misure n supera qualche decina.

Formula di propagazione dell'errore quadratico medio.

Nel seguito parleremo di errori o di scarti quadratici medi, sottintendendo che per essi valgono le stesse proprietà. In precedenza abbiamo visto la relazione che esprime lo scarto quadratico medio di una grandezza F che sia combinazione lineare di altre grandezze fisiche x,y,z... in funzione degli scarti quadratici medi delle grandezze stesse.

Spesso accade che la relazione funzionale F(x,y,z...) non sia lineare; tuttavia è possibile generalizzare la relazione sopra trovata mediante un processo di 'linearizzazione', sviluppando in serie la relazione funzionale nell'intorno dei valori medi <x>,<y>,<z>,..., a patto che gli errori casuali siano sufficientemente piccoli rispetto ai valori misurati, così da rendere accettabile l'approssimazione fatta nello sviluppo in serie. Infatti, per variazioni infinitesime delle variabili x,y,z... rispetto al valore vero (o al valor medio) vale il teorema del differenziale totale:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \dots$$

Se gli scarti $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$, $\Delta y_i = y_i - \langle y \rangle$, $\Delta z_i = z_i - \langle z \rangle$,... sono sufficientemente piccoli da poter essere considerati infinitesimi, potremo scrivere per gli scarti dalla media <F> dei valori $F_i = F(x_i, y_i, z_i, \dots)$ la relazione:

$$dF_i = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z_i + \dots$$

identica alla relazione trovata per il caso lineare: $dF_i = a \Delta x_i + b \Delta y_i + c \Delta z_i + \dots$

se si pone:

$$a \equiv \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle, y=\langle y \rangle, \dots}, \quad b \equiv \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x=\langle x \rangle, y=\langle y \rangle, \dots}, \quad c \equiv \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{x=\langle x \rangle, y=\langle y \rangle, \dots} \dots$$

Pertanto, applicando la stessa relazione trovata nel caso lineare, si ottiene la "formula di propagazione dell'errore quadratico medio":

$$\mu_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \mu_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \mu_z^2 + \dots}$$

Esempio.

Si voglia calcolare lo scarto quadratico medio sul valore della velocità di un corpo quando si siano misurati gli spazi percorsi x_i con uno scarto quadratico medio μ_x ed i tempi t_i rispettivamente impiegati con uno scarto quadratico medio μ_t .

Dall'espressione della velocità nel moto uniforme: $v = x / t$

calcoliamo le derivate parziali: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{t}$, $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}$.

L'espressione del differenziale totale è allora: $dv = \frac{1}{t} dx - \frac{x}{t^2} dt$

e quello dello scarto quadratico medio sul valore della velocità è:

$$\mu_v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{x}{t^2}\right)^2 \mu_t^2}$$

Si osservi che, quadrando, si può scrivere: $\mu_v^2 = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \frac{\mu_x^2}{x^2} + \left(\frac{x}{t}\right)^2 \frac{\mu_t^2}{t^2}$

e dividendo per $v^2=(x/t)^2$ si ottiene:

$$\left(\frac{\mu_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\mu_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_t}{t}\right)^2.$$

Le quantità adimensionali μ_x/x e analoghe prendono il nome di "scarti ridotti". Essi, come risulta dall'esempio riportato, si sommano quadraticamente. Ciò ci porta ad una considerazione di ordine pratico nel progettare una misura: conviene osservare un certo equilibrio nell'accuratezza delle varie misure i cui valori compaiono nella stessa formula. Sempre con riferimento all'esempio, sarebbe inutile misurare con accuratezza dell'ordine dello 0.01% i tempi, usando strumenti costosi e metodi laboriosi, quando non sia possibile misurare gli spostamenti meglio dell'1%. L'errore relativo sulla velocità sarebbe infatti in questo caso completamente dominato dall'errore sugli spostamenti.

4. ULTERIORI METODI DI ANALISI DEI DATI.

Media pesata

Abbiamo finora supposto che le varie determinazioni sperimentali di una stessa grandezza fisica fossero eseguite con la stessa precisione. Ciò può non essere vero in alcuni casi. Si consideri in generale una grandezza x che sia stata misurata n volte ottenendo i valori $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

con i rispettivi errori quadratici medi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$.

Non è lecito in questo caso fare semplicemente la media aritmetica degli n valori, perchè così facendo si darebbe lo stesso peso a misure con precisione diversa. Ammettiamo quindi che la migliore stima del valore vero sia una "media pesata", ossia una combinazione lineare del tipo:

$$\langle x \rangle = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n$$

con i "pesi" a_i da determinare in funzione degli errori σ_i . Per ricavare tale funzione, consideriamo il caso in cui ciascuna determinazione sia la media $\langle x \rangle_i$ di n_i misure tutte con lo stesso errore μ . Gli errori σ_i sono diversi perchè è diverso il numero di misure n_i ; abbiamo visto in precedenza che $\sigma_i = \mu / \sqrt{n_i}$.

La media aritmetica su tutte le $N = \sum_i n_i$ misure è:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^n n_i} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n_i} x_j \right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n n_i} \sum_{i=1}^n (n_i \langle x \rangle_i)$$
 poichè, per definizione di

media, per ogni serie di n_i misure si ha: $\sum_{j=1}^{n_i} x_j = n_i \langle x \rangle_i$.

Ricordando che $n_i = \mu^2 / \sigma_i^2$, possiamo quindi scrivere:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sum_{i=1}^n n_i} \sum_{i=1}^n (n_i \langle x \rangle_i) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mu^2 / \sigma_i^2} \sum_{i=1}^n ((\mu^2 / \sigma_i^2) \langle x \rangle_i) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1 / \sigma_i^2} \sum_{i=1}^n ((1 / \sigma_i^2) \langle x \rangle_i) \text{ che coincide con}$$

la combinazione lineare cercata : $\langle x \rangle = \sum_i a_i \langle x \rangle_i$

se si definiscono i **pesi**:

$$a_i = \frac{1 / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n 1 / \sigma_i^2}$$

I pesi dunque risultano inversamente proporzionali al quadrato degli errori delle singole determinazioni. Applicando la formula di propagazione degli errori si può inoltre dimostrare che l' **errore della media pesata** è dato da:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n 1 / \sigma_i^2}}$$

Analisi multidimensionale: caso lineare bidimensionale e metodo dei minimi quadrati.

Abbiamo finora trattato quello che possiamo chiamare il "caso unidimensionale" dell'analisi dei dati e del calcolo degli errori, nel senso che partendo da una serie di n determinazioni di una **stessa grandezza** eseguiti nelle stesse condizioni ci siamo posti il problema di determinarne il più attendibile indicatore del "valore vero", individuandolo nella media aritmetica (o nella media pesata, nel caso più generale di misure con diversa precisione). Anche nel trattare il problema della propagazione degli errori, abbiamo supposto che di ciascuna grandezza misurata indipendentemente venissero calcolati separatamente la media e l'errore, salvo riunire i risultati nella formula finale.

Affrontiamo adesso il caso in cui sia interessante **trattare un insieme di dati relativi a grandezze fisiche diverse in maniera globale**, attraverso un **metodo** che, per ragioni che appariranno subito evidenti, viene detto "**dei minimi quadrati**". Più precisamente, supporremo di aver misurato un numero n di volte m grandezze fisiche $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ le quali siano legate da una o più relazioni teoriche espresse da equazioni del tipo:

$$f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = 0$$

Affronteremo per semplicità il **caso bidimensionale** di m=2 grandezze fisiche x e y, che siano legate da una relazione di tipo lineare:

$$y = a + bx$$

dove **a, b sono due parametri incogniti da determinare in modo tale che la relazione tra y e x dia la migliore interpolazione possibile delle n determinazioni sperimentali x_i ed y_i ($i=1, 2, \dots, n$)** delle grandezze fisiche x e y. Questo caso particolare è di notevole interesse applicativo, e si presta ad una semplice rappresentazione grafica.

Supponiamo dunque di avere n coppie di valori misurati (x_i, y_i) delle due grandezze. A parte il caso banale n=2, non esiste in generale alcuna coppia di valori dei parametri a,b per cui la relazione lineare $y=a+bx$ sia esattamente soddisfatta per tutte le coppie (x_i, y_i) . In altre parole, per qualsiasi retta tracciata nel piano (x,y), i punti rappresentativi delle coppie di misure si discostano più o meno dalla retta, a causa degli errori di misura.

Chiamiamo δy_i gli scostamenti tra i valori misurati della grandezza y e quelli calcolati mediante la relazione lineare, per un dato valore dei parametri a,b :

$$\delta y_i \equiv y_i - (a + bx_i)$$

Assumeremo che la miglior stima del "valore vero" dei parametri a e b che determinano la relazione funzionale (lineare) $f(x,y)=y-a-bx=0$ tra le grandezze misurate x e y sia quella coppia di valori (a,b) che minimizza la somma dei quadrati delle 'distanze' δy_i tra i 'valore teorici' $a+bx_i$ e quelli misurati y_i ;

Tale criterio va sotto il nom, appunto, di "**metodo dei minimi quadrati**".

Si tratta dunque di rendere minima la somma, pensata come funzione delle variabili incognite a,b :

$$S(a, b) = \sum \delta y_i^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

dove per comodità si sono ommessi gli indici i sui segni di sommatoria.

La condizione di minimo è data dalle due equazioni:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -\sum 2(y_i - a - bx_i) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -\sum 2x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

che porta al sistema di due equazioni lineari nelle incognite (a,b):

$$na + \left(\sum x_i\right)b = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right)a + \left(\sum x_i^2\right)b = \sum x_i y_i$$

Risolvendo con la regola di Cramer, si ottengono i **valori ottimali dei parametri a, b** :

$$a = \frac{1}{\Delta} \left(\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \left(n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right)$$

dove si è definito il determinante del sistema:

$$\Delta = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2$$

L' **errore quadratico medio sui parametri a,b** può essere calcolato a partire dalle formule risolutive sopra scritte, applicando la legge di propagazione degli errori. Il calcolo è laborioso, ma il risultato è semplice:

$$\mu_a = \mu_y \sqrt{\sum x_i^2 / \Delta}$$

$$\mu_b = \mu_y \sqrt{n / \Delta}$$