Grandezze vettoriali.

Descrizione matematica: l’ente matematico vettore

I concetti nuovi e fecondi di somma di vettori, prodotti di vettori ecc. sono applicati alla meccanica ....
Secondo [l’autore] il vantaggio maggiore del [metodo] consiste nel fatto che il calcolo è in ogni passaggio la precisa espressione del procedimento mentale.
Questo non è possibile quando si usa il metodo abituale che introduce tre coordinate arbitrarie. La differenza fra l’analisi e la sintesi scompare, e i vantaggi dei due metodi sono così riuniti.

Da E.Mach, “La meccanica nel suo sviluppo storico critico”, 1883. (Trad. it. Boringhieri, Torino, 1977) con riferimento ai lavori di H.Grassmann (1844), A.J.Möbius (1827), W.R.Hamilton (1866).

Grandezze scalari e vettoriali

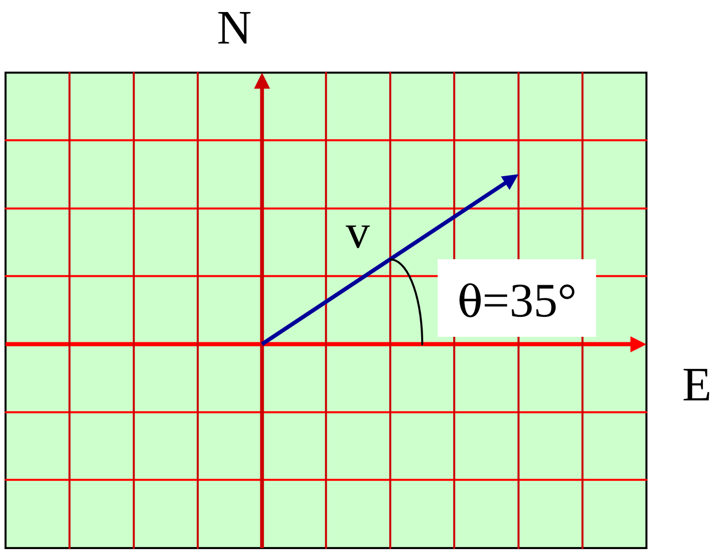
Grandezze scalari

Distanza, massa, temperatura ecc. sono completamente definite da 1 numero (+ unità misura)

Velocità, forza, spostamento ecc. sono caratterizzati da

- ♦ intensità o modulo (es. aereo viaggia a 700 km/h)
- ♦ direzione (la retta lungo cui si muove l'aereo in quell'istante)
- ♦ verso (uno dei due versi di percorrenza della retta)

Grandezze vettoriali



Un "vettore A" si indica con **A** oppure $\vec{A}$

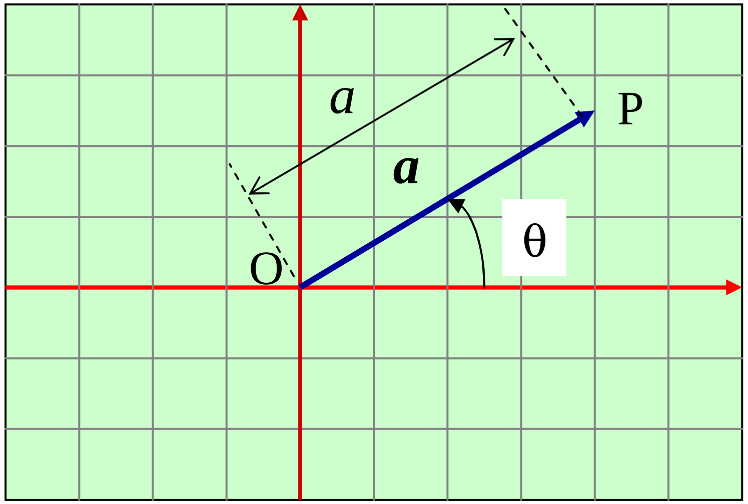
il suo modulo si indica $\left|\vec{A}\right| = A$

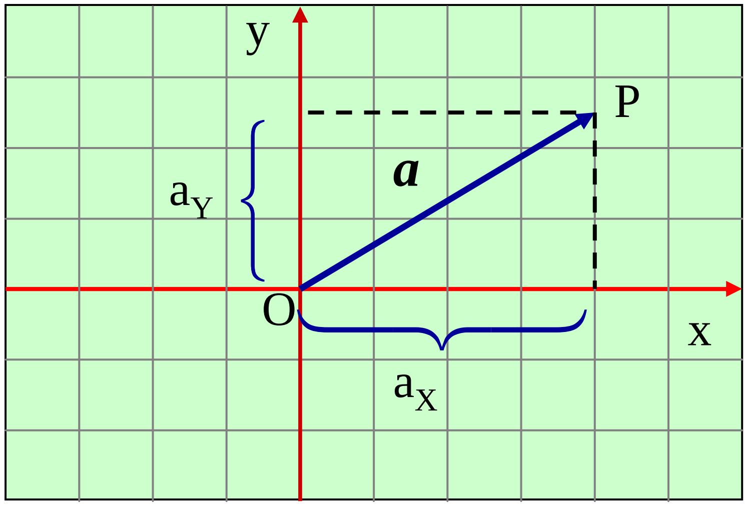
Per il suo carattere intuitivo, molti esempi utilizzeranno il vettore spostamento

Rappresentazione di un vettore

caso 2D

Ad es. lo spostamento OP in un piano





Graficamente: segmento orientato (freccia)

- lunghezza OP ($a=|\boldsymbol{a}|$) — modulo
- angolo orientato rispetto ad una retta data — direzione e verso

(rappresentazione in coordinate polari)

In alternativa:

- Componenti X e Y rispetto ad un sistema di assi cartesiani (coordinate cartesiane)

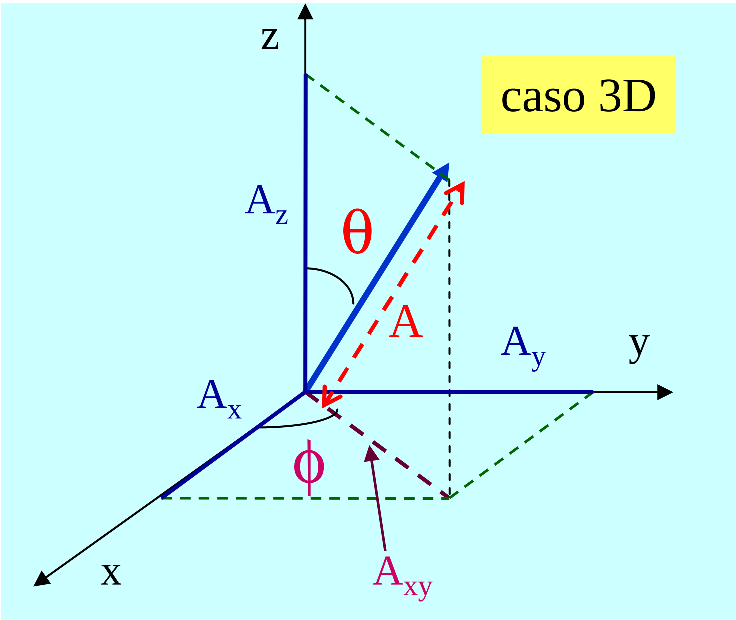
a_X, a_Y sono le "componenti cartesiane" di $\boldsymbol{a}$

nota sul segno di a_X, a_Y

Relazione fra le 2 rappresentazioni

$$\begin{cases} a_X = a\cos\theta \\ a_Y = a\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \sqrt{(a_X^2 + a_Y^2)} \\ \tan\theta = a_Y / a_X \end{cases}$$

Rappresentazione di un vettore. Caso 3D



In 3D, servono 3 componenti:

3 componenti cartesiane: A_x, A_y, A_z

oppure

modulo + 2 angoli: A, θ, ϕ

Terna cartesiana destrorsa.

Trasformazione coordinate cartesiane / coordinate polari

$$\begin{cases} A_X = A\sin\theta\cos\phi \\ A_Y = A\sin\theta\sin\phi \\ A_Z = A\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{(A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2)} \\ \cos\theta = A_Z / A \\ \tan\phi = A_Y / A_X \end{cases}$$

Due vettori sono uguali <=>
- sono uguali modulo, direzione e verso
- sono uguali le componenti X, Y, Z

Operazioni con i vettori

Consideriamo le seguenti operazioni:

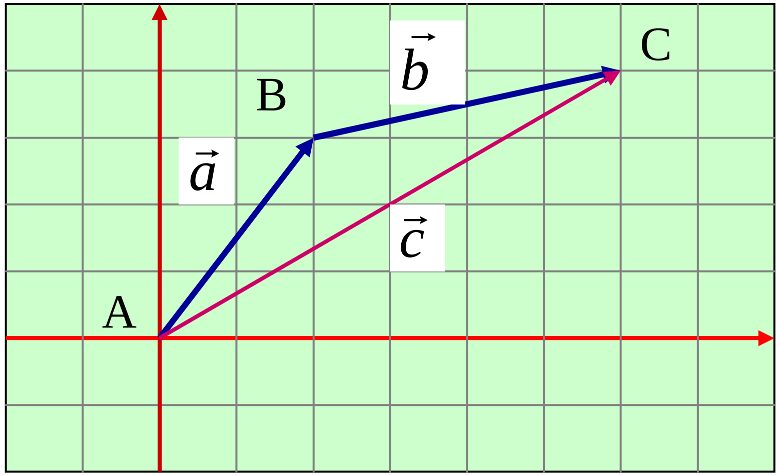
somma (o differenza) (il risultato è un vettore) es. somma di forze, di velocità ...

prodotto di un vettore per uno scalare (il risultato è un vettore) es. quantità di moto

prodotto scalare di due vettori (il risultato è uno scalare) es. lavoro

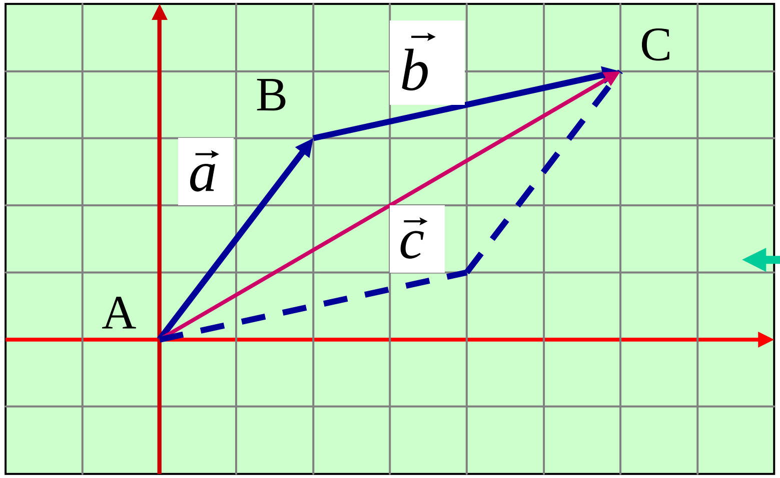
prodotto vettoriale fra due vettori (il risultato è un vettore) es. momento di una forza

Somma



Dati gli spostamenti **AB** e **BC**
lo spostamento complessivo è **AC**

Il vettore spostamento **AC**
si dice somma di **AB** e **BC**



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

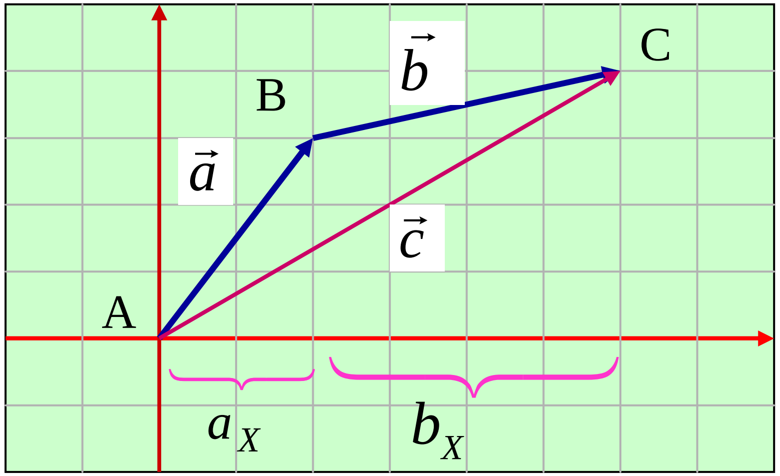
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Regola del parallelogramma

Questa regola riproduce anche la somma di due forze, due velocità ecc.

Disuguaglianza triangolare: $|a-b| \leq c \leq a+b$

Somma di vettori

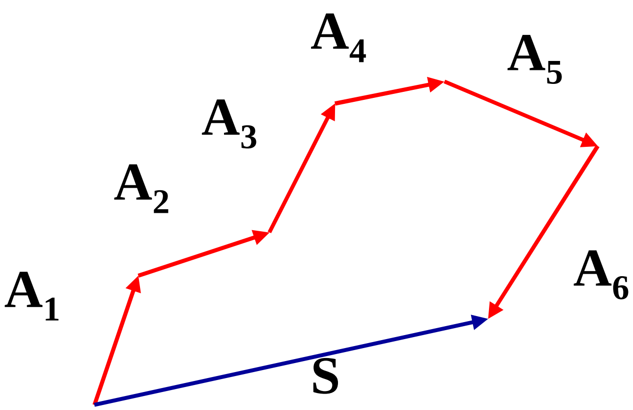


Spesso conviene usare le componenti cartesiane:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{cases} c_X = a_X + b_X \\ c_Y = a_Y + b_Y \\ c_Z = a_Z + b_Z \end{cases}$$

Somma di più vettori:



Rappresentazione grafica

$$\vec{\mathbf{S}} = \sum_{K=1}^{6} \vec{\mathbf{A}}_K$$

$$S_X = \sum_{K=1}^{6} A_{KX}$$

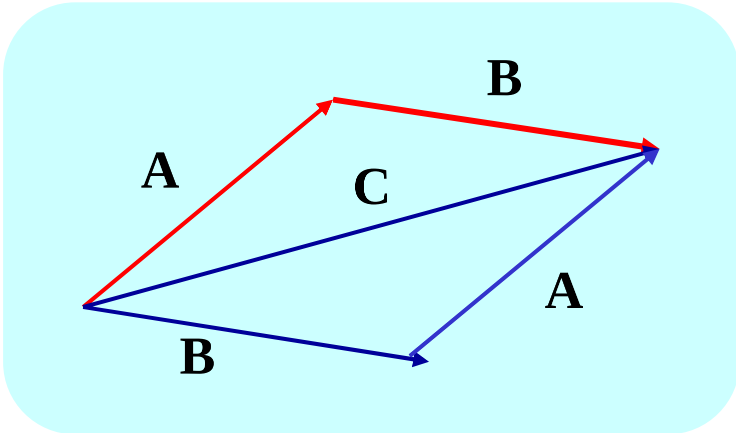
$$S_Y = \sum_{K=1}^{6} A_{KY}$$

$$S_Z = \sum_{K=1}^{6} A_{KZ}$$

Somma di vettori. Proprietà

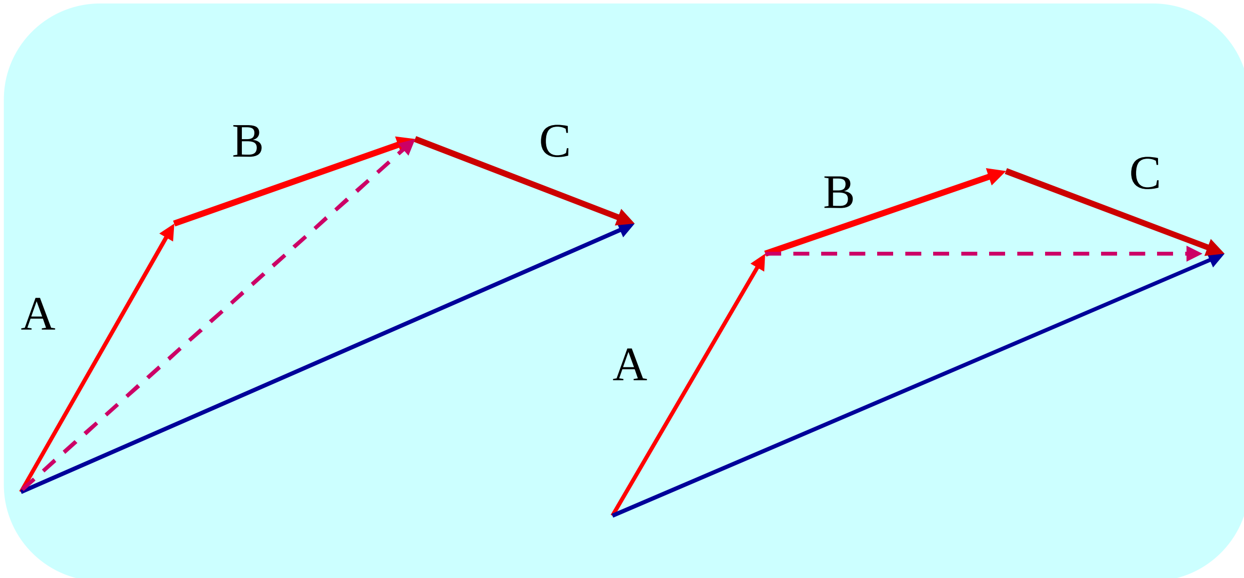
proprietà commutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



proprietà associativa

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$



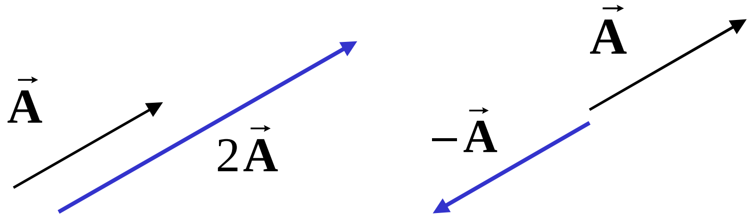
Prodotto di uno Scalare per Vettore:

es. 2**A**, quantità di moto m**v**, ...

$$\vec{\mathbf{C}} = k\vec{\mathbf{A}}$$

$$C_X = kA_X$$
$$C_Y = kA_Y$$
$$C_Z = kA_Z$$

- stessa direzione di **A**
- stesso verso se k>0
- verso opposto se k<0
- modulo: $C = |k|A$



k=2: vettore doppio

k = -1: vettore opposto

$$(k_1 + k_2)\vec{\mathbf{A}} = k_1\vec{\mathbf{A}} + k_2\vec{\mathbf{A}}$$

$$k(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = k\vec{\mathbf{A}} + k\vec{\mathbf{B}}$$

Proprietà distributive rispetto alla somma

Si può operare come con i numeri reali

Versore : vettore di modulo unitario

$$|\hat{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

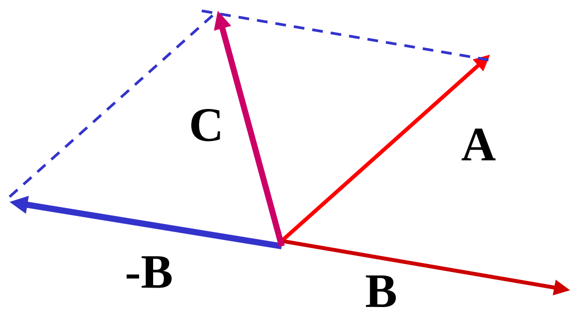
modulo $|\vec{\mathbf{A}}|$ direzione e verso $\hat{\mathbf{u}}_A = \dfrac{\vec{\mathbf{A}}}{A}$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} = A\,\hat{\mathbf{u}}_A}$$

versori degli assi:
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = (1,0,0) = \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{y}} = (0,1,0) = \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{z}} = (0,0,1) = \hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

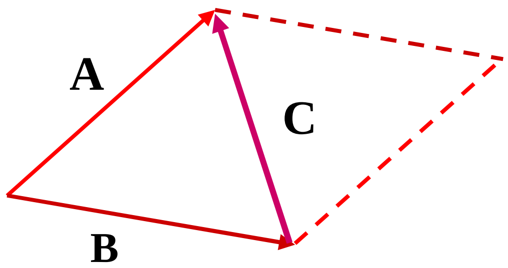
Differenza di vettori.



$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} + \left(-\vec{\mathbf{B}}\right) = \vec{\mathbf{C}}$$

si riduce alla somma



-A è il vettore opposto di **A** $\vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{A}} = 0$

si opera come sui numeri reali.

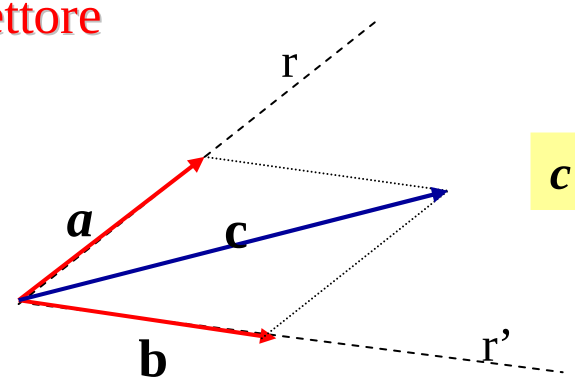
vale sempre la disuguaglianza triangolare: $|a-b| \leq c \leq a+b$

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

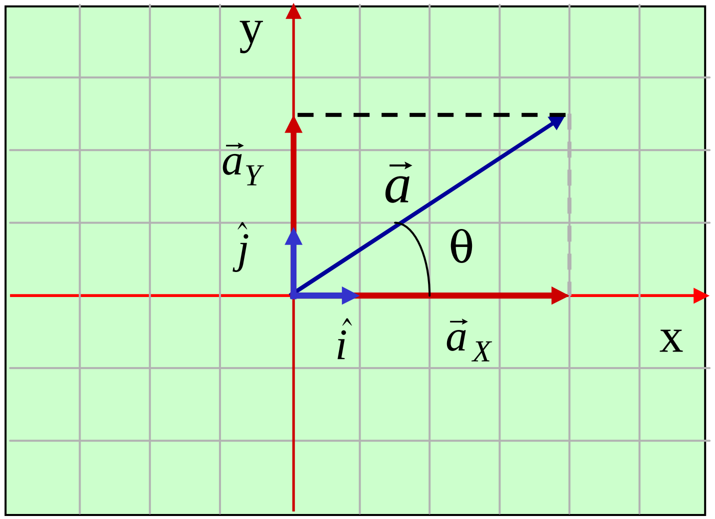
come con i numeri reali, si può portare all'altro membro cambiando di segno

Scomposizione di un vettore

Scomposizione lungo due direzioni date.
Inversione della regola del parallelogramma:



$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

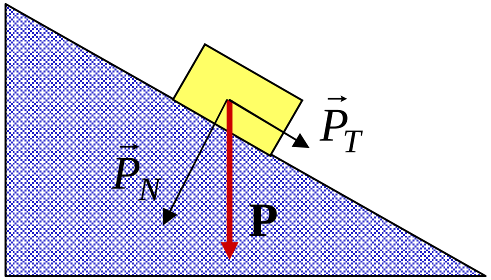


Ci interesserà solo la scomposizione lungo direzioni ortogonali fra loro (assi cartesiani)

$\boldsymbol{a}_X$ e $\boldsymbol{a}_Y$ sono i vettori componenti di $\boldsymbol{a}$

a_X e a_Y sono le componenti (cartesiane) di $\boldsymbol{a}$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$



Esempio: scomposizione della forza peso su un piano inclinato.

$$\vec{P} = \vec{P}_T + \vec{P}_N$$

Prodotto vettoriale

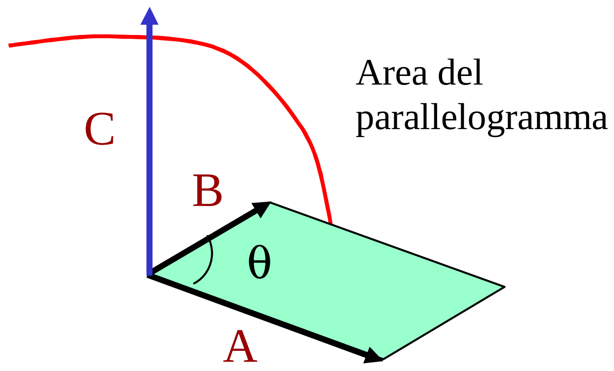
minore dei due angoli

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB \sin\theta$$

$$\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow C = 0$$

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow C = 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow C = AB$$

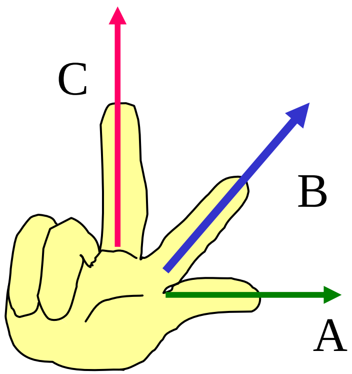


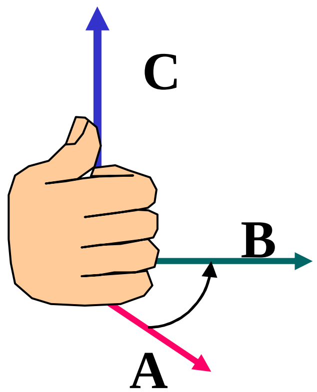
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$$

è un vettore (pseudovettore)

solo in 3D

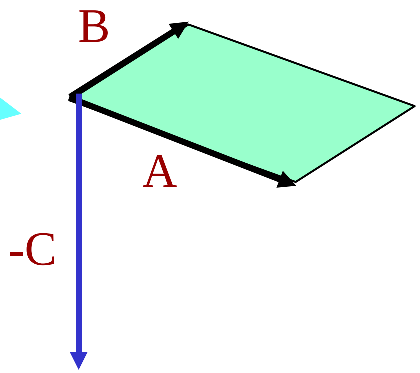
Modulo: area del parallelogramma
Direzione: ortogonale ad A e B
Verso: mano destra o vite destrorsa





Proprietà anticommutativa:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

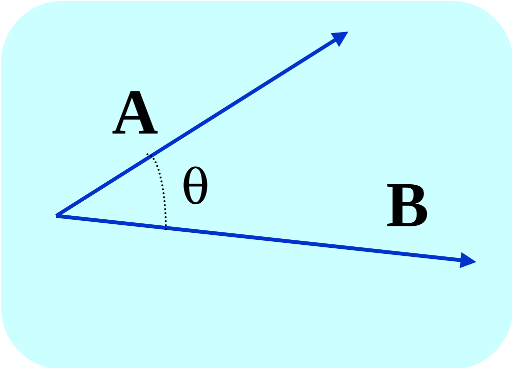


Proprietà distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

Prodotto scalare

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = c$ Associa a 2 vettori uno scalare



$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$$ il minore dei 2 angoli

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z$$

Proprietà commutativa: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$

Proprietà distributiva: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \Leftrightarrow$ A e B ortogonali

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < 90°$

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta < 180°$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = |A||A|\cos 0 = |A|^2 \qquad \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$$

$\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_X$ ecc.

Esempio: lavoro

Prodotto vettoriale

componente di **B** ortogonale ad **A**

componente di **A** ortogonale a **B**

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB \sin\theta = \left|AB_{\perp}\right| = \left|A_{\perp} B\right|$$

$$\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right)_X = A_Y B_Z - A_Z B_Y$$

$$\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right)_Y = A_Z B_X - A_X B_Z$$

$$\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right)_Z = A_X B_Y - A_Y B_X$$

Formalmente

$$\begin{Vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Vmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

permutazione ciclica

Proprietà anticommutativa:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

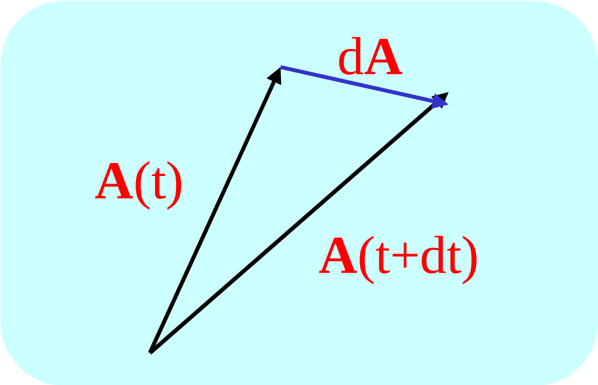
l'ordine dei fattori è importante

Proprietà distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

Derivata di un vettore:

Interpretazione geometrica.



$$\boxed{\vec{\mathbf{C}} = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}}$$

$$C_X = \frac{dA_X}{dt} \qquad C_Y = \frac{dA_Y}{dt} \qquad C_Z = \frac{dA_Z}{dt}$$

Proprietà

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(k\vec{A}\right) = \frac{dk}{dt}\vec{A} + k\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Caso di vettore di modulo costante $\quad \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{A}}\right) = 2\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \perp \vec{\mathbf{A}}$

Ciò vale in particolare per i versori (ad es. versori degli assi).

$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \perp \hat{\mathbf{x}}$ Esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che: $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{\mathbf{x}}$

ω ha il significato di velocità angolare: un vettore di modulo costante può solo ruotare.